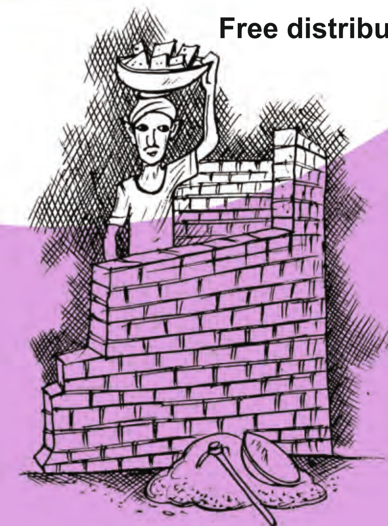
State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

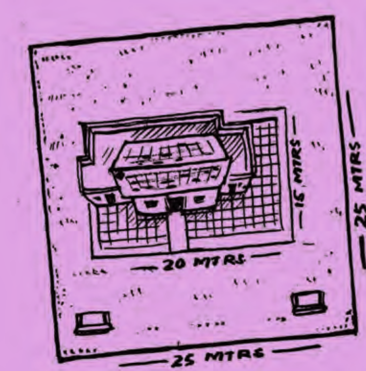
Mathematics 8th Class Semester - 2

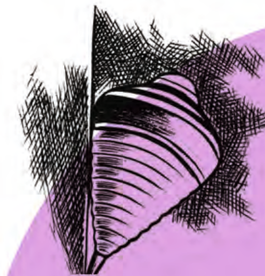
Mathematics
గణితశాస్త్రం
8

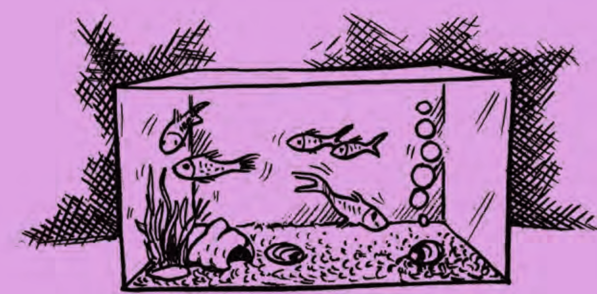
Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

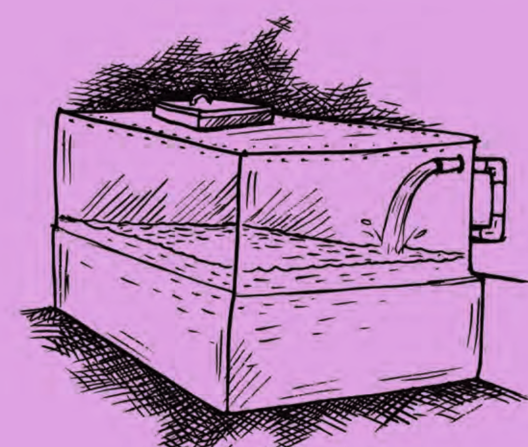
Semester - 2

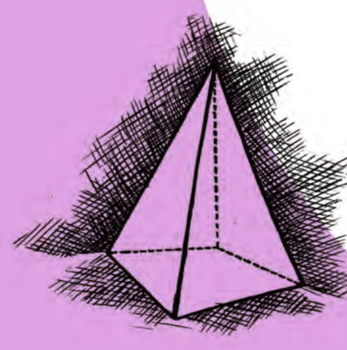












सत्यमेव जयते

CONSTITUTION OF INDIA

Preamble

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having
solemnly resolved to constitute India into a
SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC
and to secure to all its citizens:
JUSTICE
Social, economic and political;
LIBERTY
of thought, expression, belief, faith and worship;
EQUALITY
of status and of opportunity; and to
promote among them all
FRATERNITY
assuring the dignity of the individual and the unity and
integrity of the Nation;
IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY
this twenty-sixth day of November, 1949, do
HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO
OURSELVES THIS CONSTITUTION

భారత రాజ్యాంగం - పౌర విధులు

1. రాజ్యాంగమునకు బద్ధుడై వుండుట, దాని ఆదర్శాలను, సంస్థలను, జాతీయ పతాకమును,జాతీయ గీతమును గౌరవించుట;
2. జాతీయ స్వాతంత్ర్య పోరాటమునకు స్ఫూర్తినిచ్చిన ఉన్నతాదర్శములను మనస్సుయందు ఉంచుకొని వాటిని అనుసరించుట;
3. భారత సార్వభౌమత్వం, ఐక్యత, అఖండతను సమర్థించుట మరియు సంరక్షించుట.
4. దేశమును రక్షించుట మరియు కోరినపుడు జాతికి సేవ చేయుట;
5. భారత ప్రజల మధ్య మత, భాష, ప్రాంతీయ, వర్గ వైవిధ్యములను అధిగమించి, సామరస్యమును, సోదర భావమును పెంపొందించుట, స్త్రీల గౌరవం తగ్గించు ఆచారములను విడనాడుట;
6. మన ఉమ్మడి సంస్కృతినీ, సుసంపన్న సంప్రదాయాలను గౌరవించి రక్షించుట;
7. అడవులు, సరస్సులు, నదులు, అడవి జంతువులతో సహా ప్రాకృతిక పరిసరాలను కాపాడి అభివృద్ధి చేయుట మరియు సమస్త జీవుల యెడల కరుణార్ద్రత కలిగి వుండుట.
8. శాస్త్రీయ దృక్పథాన్ని, మానవతావాదాన్ని, జిజ్ఞాసను, సంస్కరణ తత్వాన్ని పెంపొందించుకొనటం;
9. ప్రజల ఆస్తిని సంరక్షించుట, హింసను విడనాడుట;
10. ప్రయత్నాలు, సాధనల ఉన్నతస్థాయిలను నిరంతరం అందుకొనునట్లుగా వైయక్తిక, సమిష్టి కార్య రంగాలన్నింటిలో శ్రేష్ఠత కోసం, కృషి చేయుట ప్రాథమిక కర్తవ్యమై వుండవలెను.
11. ఆరు నుండి పద్నాలుగు సంవత్సరముల వయస్సు కలిగిన బాలునికి లేదా బాలికకు తల్లి తండ్రి లేదా సంరక్షకునిగావున్న వ్యక్తి తనబిడ్డ లేదా సందర్భానుసారము తన సంరక్షితునికి విద్యార్జనకు అవకాశములు కల్పించవలెను.

(అధికరణం 51 A)

విద్యాహక్కు చట్టం

6 నుండి 14 సంవత్సరముల పిల్లలందరికి ఉచిత నిర్భంద ఎలిమెంటరీ విద్యనందించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇది ఏప్రిల్ 1, 2010 నుండి అమల్లోకి వచ్చింది.

చట్టంలోని ముఖ్యాంశాలు:

- పిల్లలందరికి అందుబాటులో పాఠశాలలను ఏర్పాటుచేయాలి.
- పాఠశాలలకు మౌలిక వసతులను కల్పించాలి.
- పిల్లలందరిని వయస్సుకు తగిన తరగతిలో చేర్పించాలి.
- వయస్సుకు తగ్గ తరగతిలో చేర్చిన తర్వాత తోటి వారితో సమానంగా ఉండటానికి ప్రత్యేకశిక్షణ ఇప్పించాలి.
- ప్రత్యేక అవసరాలు కల్గిన పిల్లలకు సాధారణ పిల్లలతోపాటు విద్యకొనసాగించడానికి తగువసతులు ఏర్పాట్లు చేయాలి.
- బడిలో చేర్చుకోడానికి ఎలాంటి పరీక్షలు నిర్వహించరాదు. ఎటువంటి రుసుము, చార్జీలు వసూలు చేయరాదు.
- బడిలో చేరిన పిల్లల పేరు తీసివేయడం, అదే తరగతిలో కొనసాగించడం చేయరాదు.
- పిల్లల్ని శారీరకంగా, మానసికంగా హింసించరాదు.
- వయస్సు నిర్ధారణ పత్రం, ఇతర ధృవీకరణ పత్రాలు లేవనే కారణం చేత పిల్లలకు బడిలో ప్రవేశాన్ని నిరాకరించరాదు.
- తగిన అర్హతలున్న వారిని మాత్రమే ఉపాధ్యాయులుగా నియమించాలి.
- పిల్లలు నిర్దేశించిన సామర్థ్యాలు సాధించేలా బోధనాభ్యసనం, మూల్యాంకనం ఉండాలి.
- ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పిల్లలకు ఎలాంటి బోర్డు పరీక్షలు నిర్వహించరాదు.
- పద్నాలుగు సంవత్సరాలు పూర్తయినప్పటికినీ, ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పాఠశాలలో పిల్లలు కొనసాగవచ్చును.
- బలహీన వర్గాలకు, ప్రతికూల పరిస్థితులను ఎదుర్కొంటున్న బృందాలకు చెందిన పిల్లలు ఏ విధమైన వివక్షతకు గురికాకుండా చూడాలి.
- రాజ్యాంగంలో పొందుపరిచిన విలువలకు అనుగుణంగా, విద్యార్థులను భయం, ఆందోళనకు గురిచేయని రీతిలో వారి సర్వతోముఖాభివృద్ధికి తోడ్పడే పాఠ్యప్రణాళిక రూపొందించాలి.

MATHEMATICS

Class VIII

Text Book Development Committee

Sri. **S. Suresh Kumar** IAS
Commissioner of School Education & State Project Director, SS, AP, Amaravati.

Smt. **Vetriselvi. K** IAS
Special Officer, English Medium Project, O/o CSE-AP, Amaravati.

Dr. **B. Pratap Reddy** MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP, Amaravati.

Sri **K. Ravindranath Reddy** MA., B.Ed.
Director, Govt. Textbook Press, AP, Amaravati.

Programme Co-ordinators

Dr. **G. Kesava Reddy**
Prof. C&T, SCERT, AP

Smt. **V. Swarnalatha**
Lecturer, C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri **S. Satish**
Lecturer in Mathematics, SCERT, AP

Dr. **SK. Kalesha Begum**
Lecturer, SCERT, AP

Sri **K. Satish Babu**
Professor, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. **Ch.V.S. Ramesh Kumar**
Lecturer, SCERT, AP

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

First Published 2022
New Impression - 2023

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Textbook Press
Amaravati
Andhra Pradesh

Translators

Sri **G. Bhaskar Reddy,** SA (Maths), ZPHS, Venkatagiri, Tirupati

Sri **Jayaraj Sekhar,** SA (Maths), ZPHS, Katherapalle, Chittoor

Sri **G V S Sastry,** SA (Maths), ZPHS, Kollipadu, Srikakulam

Sri **Komanapalli Nagendra Rao,** SA (Maths), ZPHS, Gandepalli, Kakinada

Sri **T. Venkat,** SA (Maths), ZPHS, (Pathapeta) Uravakonda, Ananthapuram

Sri **A. Audinarayana Sarma,** SA (Maths), ZPHS Valamedu, Tirupati

Sri **M. A. Nabi,** SA (Maths), ZPHS (B), Jangareddy Gudem, Eluru

Smt. **T. Jayasatya,** SA (Maths), GTWAGH, Haddubangi, Manyam

Smt. **G. Jyothi Lakshmi,** SA (Maths), MPUS, Sunkarametta, Alluri Seetha Rama Raju

Smt. **K. Sree Vijaya,** SA (Maths), ZPHS, Veerapaneni Gudem, Krishna

Smt. **Ch. Hemalatha,** PGT (Maths), APRS (Girls), Venkatagiri, Tirupati

Sri **Kottakota Krishnam Raju,** SA (Maths), ZPHS, Laxmipuram, Vizianagaram

Sri **PVLN Sri Ram,** SA (Maths), JNMHS, Amalapuram, Konaseema

Sri **S. Ramesh,** SA (Maths), ZPHS Bayyavaram, Anakapalli

Sri **T. Murali,** SA (Maths), ZPHS, Karakambadi, Tirupati

Sri **DVVSRA Sarma,** SA (Maths) MPUPS, Yenudu Tuni, Anakapalli

Sri **T. Eswara Rao,** SA (Maths), ZPHS, Vadada, Vizianagaram

Sri **R. Raja Sekhar,** SA (Maths), ZPHS, Satrampadu, Eluru

Smt. **Ch. Jhansi Rani,** PGT (Maths) APTW&URJC, Pedda Dornala, Prakasam

Smt. **B. Nirmala Devi,** PGT (Maths), APSWRS Vinukonda, Palnadu

Sri **B. V. Malleswara Rao,** PGT (Maths), APSWRS, Tadikonda, Guntur

Editors for Translation

Dr. **D.S.N. Sastry,** Rtd. Principal, AJ College of Education, Machilipatnam

Dr. **P. Satyanarayana Sarma,** Rtd. Lecturer, Montessori College of Education, Vijayawada

Sri **B.V.L. Narasimha Rao,** Rtd. Lecturer, SRSV.College of Education, Vijayawada

Dr. **D. Bhaskara Rao,** Rtd. Principal, CRR College of Education, Eluru

Sri **S. Mahesh,** PGT (Maths), JNV.Visakhapatnam (CBSE)

Smt. **G. Sudha Lakshmi,** Lecturer, SCERT, A.P

Sri **K Murali Srinivas,** Principal, APTWRS, Stuvartpuram, Bapatla

Sri **G.S.S. Bhavanarayana,** TGT (Maths), JNV, Ongole, (CBSE)

Sri **M. Anjani Kumar,** TGT (Maths), Atkinson Sr. Sec. School, Vijayawada(CBSE)

Sri **A. Sivaji Rao,** TGT Maths, JNV, Kurnool (CBSE)

Sri **RHV. Kishore,** SA, ZPHS Penamaluru, Krishna

Sri. **A.S.V. Prabhakar,** Lecturer, SCERT, A.P

Designing & Page Layout : Stock Assortment, Bapatla.

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Dr H.K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

Foreword

The Government of Andhra Pradesh has unleashed a new era in school education by introducing extensive curricular reforms from the academic year 2020-21. The Government has taken up curricular reforms intending to enhance the learning outcomes of the children with focus on building solid foundational learning and to build up an environment; conducive for an effective teaching-learning process. To achieve this objective, special care has been taken in designing the textbooks to achieve global standards. The Government of Andhra Pradesh has decided to introduce NCERT Textbooks from class VIII onwards.

As a part of the curricularm reform, an effort was made to ensure quality transaction of textbooks, bilingual method was used. The mathematical concepts in the text book are developed based on themes like Number System, Arithmetic, Algebra, Mensuration, Geometry and Statistics. In this text book, concepts are introduced through activities related to daily life situations and conversations. To strengthen these concepts, individual activities, group activities and whole class activities are designed. The textbook attempted to enhance this endeavor through incorporating QR codes in each chapter to enable efficient learning outside the class room.

We are grateful to our Honourable Chief Minister, Sri Y.S. Jagan Mohan Reddy, Andhra Pradesh for being our source of inspiration to carry out this extensive reform in the Education Department. We extend our gratitude to our Honourable Minister of Education, Sri B. Satyanarayana, Andhra Pradesh for striving towards qualitative education. Our special thanks to Sri B. Rajasekhar, IAS, Special Chief Secretary, School Education, Andhra Pradesh. Sri S. Suresh Kumar IAS, Commissioner of School Education and State Project Director, Samagra Shiksha, Andhra Pradesh. Smt. K. Vetriselvi. IAS, Special Officer, English Medium Project, Andhra Pradesh for their constant motivation and guidance.

We convey our sincere thanks to the text book writers, who studied curriculum and best practices across the globe to reach global standards. Our heartful thanks to Director NCERT in designing the text book and for issuing copyrights to print the textbooks by the State Government. We also thank our Coordinators, Editors, Subject Coordinators, Technical team members, Artists, DTP and Layout designers for their contribution in the development of this text book. We invite constructive feedback from the teachers, parents and Educationalists for the further refinement of the text book.

Dr. B. Pratap Reddy
Director
SCERT – Andhra Pradesh

Preface

This is the final book of the upper primary series. It has been an interesting journey to define mathematics learning in a different way. The attempt has been to retain the nature of mathematics, engage with the question why learn mathematics while making an attempt to create materials that would address the interest of the learners at this stage and provide sufficient and approachable challenge to them. There have been many views on the purpose of school mathematics. These range from the fully utilitarian to the entirely aesthetic perceptions. Both these end up not engaging with the concepts and enriching the apparatus available to the learner for participating in life. The NCF emphasises the need for developing the ability to mathematise ideas and perhaps experiences as well. An ability to explore the ideas and framework given by mathematics in the struggle to find a richer life and a more meaningful relationship with the world around.

This is not even easy to comprehend, far more difficult to operationalise. But NCF adds to this an even more difficult goal. The task is to involve everyone of that age group in the classroom or outside in doing mathematics. This is the aim we have been attempting to make in the series.

We have, therefore, provided space for children to engage in reflection, creating their own rules and definitions based on problems/tasks solved and following their ideas logically. The emphasis is not on remembering algorithms, doing complicated arithmetical problems or remembering proofs, but understanding how mathematics works and being able to identify the way of moving towards solving problems.

The important concern for us has also been to ensure that all students at this stage learn mathematics and begin to feel confident in relating mathematics. We have attempted to help children read the book and to stop and reflect at each step where a new idea has been presented. In order to make the book less formidable we have included illustrations and diagrams. These combined with the text help the child comprehend the idea. Throughout the series and also therefore in this book we have tried to avoid the use of technical words and complex formulations. We have left many things for the student to describe and write in her own words.

We have made an attempt to use child friendly language. To attract attention to some points blurbs have been used. The attempt has been to reduce the weight of long explanations by using these and the diagrams. The illustrations and fillers also attempt to break the monotony and provide contexts.

Class VIII is the bridge to Class IX where children will deal with more formal mathematics. The attempt here has been to introduce some ideas in a way that is moving towards becoming formal. The tasks included expect generalisation from the gradual use of such language by the child.

The team that developed this textbook consisted teachers with experience and appreciation of children learning mathematics. This team also included people with experience of research in mathematics teaching-learning and an experience of producing materials for children. The feedback on the textbooks for Classes VI and VII was kept in mind while developing this textbook. This process of development also included discussions with teachers during review workshop on the manuscript.

In the end, I would like to express the grateful thanks of our team to Professor Krishna Kumar, *Director*, NCERT, Professor G. Ravindra, *Joint Director*, NCERT and Professor Hukum Singh, *Head*, DESM, for giving us an opportunity to work on this task with freedom and with full support. I am also grateful to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics for his suggestions. I am also grateful for the support of the team members from NCERT, Professor S.K. Singh Gautam, Dr V.P. Singh and in particular Dr Ashutosh K. Wazalwar who coordinated this work and made arrangements possible. In the end I must thank the Publication Department of NCERT for its support and advice and those from Vidya Bhawan who helped produce the book.

It need not be said but I cannot help mentioning that all the authors worked as a team and we accepted ideas and advice from each other. We stretched ourselves to the fullest and hope that we have done some justice to the challenge posed before us.

The process of developing materials is, however, a continuous one and we would hope to make this book better. Suggestions and comments on the book are most welcome.

H.K. Dewan
Chief Advisor
Textbook Development Committee

A Note for the Teacher

This is the third and the last book of this series. It is a continuation of the processes initiated to help the learners in abstraction of ideas and principles of mathematics. Our students to be able to deal with mathematical ideas and use them need to have the logical foundations to abstract and use postulates and construct new formulations. The main points reflected in the NCF-2005 suggest relating mathematics to development of wider abilities in children, moving away from complex calculations and algorithm following to understanding and constructing a framework of understanding. As you know, mathematical ideas do not develop by telling them. They also do not reach children by merely giving explanations. Children need their own framework of concepts and a classroom where they are discussing ideas, looking for solutions to problems, setting new problems and finding their own ways of solving problems and their own definitions.

As we have said before, it is important to help children to learn to read the textbook and other books related to mathematics with understanding. The reading of materials is clearly required to help the child learn further mathematics. In Class VIII please take stock of where the students have reached and give them more opportunities to read texts that use language with symbols and have brevity and terseness with no redundancy. For this if you can, please get them to read other texts as well. You could also have them relate the physics they learn and the equations they come across in chemistry to the ideas they have learnt in mathematics. These cross-disciplinary references would help them develop a framework and purpose for mathematics. They need to be able to reconstruct logical arguments and appreciate the need for keeping certain factors and constraints while they relate them to other areas as well. Class VIII children need to have opportunity for all this.

As we have already emphasised, mathematics at the Upper Primary Stage has to be close to the experience and environment of the child and be abstract at the same time. From the comfort of context and/or models linked to their experience they need to move towards working with ideas. Learning to abstract helps formulate and understand arguments. The capacity to see interrelations among concepts helps us deal with ideas in other subjects as well. It also helps us understand and make better patterns, maps, appreciate area and volume and see similarities between shapes and sizes. While this is regarding the relationship of other fields of knowledge to mathematics, its meaning in life and our environment needs to be re-emphasised.

Children should be able to identify the principles to be used in contextual situations, for solving problems sift through and choose the relevant information as the first important step. Once students do that they need to be able to find the way to use the knowledge they have and reach where the problem requires them to go. They need to identify and define a problem, select or design possible solutions and revise or redesign the steps, if required. As they go further there would be more to of this to be done. In Class VIII we have to get them to be conscious of the steps they follow. Helping children to develop the ability to construct appropriate models by breaking up the problems and evolving their own strategies and analysis of problems is extremely important. This is in the place of giving them prescriptive algorithms.

Cooperative learning, learning through conversations, desire and capacity to learn from each other and the recognition that conversation is not noise and consultation not cheating is an important part of change in attitude for you as a teacher and for the students as well. They should be asked to make presentations as a group with the inclusion of examples from the contexts of their own experiences. They should be encouraged to read the book in groups and formulate and express what they understand from it. The assessment pattern has to recognise and appreciate this and the classroom groups should be such that all children enjoy being with each other and are contributing to the learning of the group. As you would have seen different groups use different strategies. Some of these are not as efficient as others as they reflect the modeling done and reflect the thinking used. All these are appropriate and need to be analysed with children. The exposure to a variety of strategies deepens the mathematical understanding. Each group moves from where it is and needs to be given an opportunity for that.

For conciseness we present the key ideas of mathematics learning that we would like you to remember in your classroom.

1. Enquiry to understand is one of the natural ways by which students acquire and construct knowledge. The process can use generation of observations to acquire knowledge. Students need to deal with different forms of questioning and challenging investigations- explorative, open-ended, contextual and even error detection from geometry, arithmetic and generalising it to algebraic relations etc.
2. Children need to learn to provide and follow logical arguments, find loopholes in the arguments presented and understand the requirement of a proof. By now children have entered the formal stage. They need to be encouraged to exercise creativity and imagination and to communicate their mathematical reasoning both verbally and in writing.
3. The mathematics classroom should relate language to learning of mathematics. Children should talk about their ideas using their experiences and language. They should be encouraged to use their own words and language but also gradually shift to formal language and use of symbols.
4. The number system has been taken to the level of generalisation of rational numbers and their properties and developing a framework that includes all previous systems as sub-sets of the generalised rational numbers. Generalisations are to be presented in mathematical language and children have to see that algebra and its language helps us express a lot of text in small symbolic forms.
5. As before children should be required to set and solve a lot of problems. We hope that as the nature of the problems set up by them becomes varied and more complex, they would become confident of the ideas they are dealing with.
6. Class VIII book has attempted to bring together the different aspects of mathematics and emphasise the commonality. Unitary method, Ratio and proportion, Interest and dividends are all part of one common logical framework. The idea of variable and equations is needed wherever we need to find an unknown quantity in any branch of mathematics.

We hope that the book will help children learn to enjoy mathematics and be confident in the concepts introduced. We want to recommend the creation of opportunity for thinking individually and collectively.

We look forward to your comments and suggestions regarding the book and hope that you will send interesting exercises, activities and tasks that you develop during the course of teaching, to be included in the future editions. This can only happen if you would find time to listen carefully to children and identify gaps and on the other hand also find the places where they can be given space to articulate their ideas and verbalise their thoughts.

Textbook Development Committee - NCERT

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, *Chairman*, Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor and Head*, DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Gupte, *Teacher*, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan
Avantika Dam, *TGT*, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

B.C. Basti, *Senior Lecturer*, Regional Institute of Education, Mysore, Karnataka

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai Maharashtra

K.A.S.S.V. Kameshwar Rao, *Lecturer*, Regional Institute of Education, Shyamala Hills Bhopal (M.P.)

Mahendra Shankar, *Lecturer (S.G.)* (Retd.), NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, *Teacher*, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

P. Bhaskar Kumar, *PGT*, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Distt. Anantpur (A.P.)

R. Athmaraman, *Mathematics Education Consultant*, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), NCERT, New Delhi

Shailesh Shirali, Rishi Valley School, Rishi Valley, Madanapalle (A.P.)

S.K.S. Gautam, *Professor*, DEME, NCERT, New Delhi

Shradha Agarwal, *Principal*, Florets International School, Panki, Kanpur (U.P.)

Srijata Das, *Senior Lecturer* in Mathematics, SCERT, New Delhi

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Member-coordinator

Ashutosh K. Wazalwar, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Shri Pradeep Bhardwaj, *TGT* (Mathematics) Bal Sthali Public Secondary School, Kirari, Nangloi, New Delhi; Shri Sankar Misra, *Teacher* in Mathematics, Demonstration Multipurpose School, Regional Institute of Education, Bhubaneswar (Orissa); Shri Manohar M. Dhok, *Supervisor,* M.P. Deo Smruti Lokanchi Shala, Nagpur (Maharashtra); Shri Manjit Singh Jangra, *Maths teacher,* Government Senior Secondary School, Sector-4/7, Gurgoan (Haryana); Dr. Rajendra Kumar Pooniwala, U.D.T., Government Subhash Excellence School, Burhanpur (M.P.); Shri K. Balaji, TGT (Mathematics), Kendriya Vidyalaya No.1, Tirupati (A.P.); Ms. Mala Mani, Amity International School, Sector-44, Noida; Ms. Omlata Singh, *TGT* (Mathematics), Presentation Convent Senior Secondary School, Delhi; Ms. Manju Dutta, Army Public School, Dhaula Kuan, New Delhi; Ms. Nirupama Sahni, *TGT* (Mathematics), Shri Mahaveer Digambar Jain Senior Secondary School, Jaipur (Rajasthan); Shri Nagesh Shankar Mone, *Head Master,* Kantilal Purshottam Das Shah Prashala, Vishrambag, Sangli (Maharashtra); Shri Anil Bhaskar Joshi, *Senior teacher* (Mathematics), Manutai Kanya Shala, Tilak Road, Akola (Maharashtra); Dr. Sushma Jairath, *Reader,* DWS, NCERT, New Delhi; Shri Ishwar Chandra, *Lecturer (S.G.)* (Retd.) NCERT, New Delhi.

The Council is grateful for the suggestions/comments given by the following participants during the workshop of the mathematics Textbook Development Committee – Shri Sanjay Bolia and Shri Deepak Mantri from Vidya Bhawan Basic School, Udaipur; Shri Inder Mohan Singh Chhabra, Vidya Bhawan Educational Resource Centre, Udaipur.

The Council acknowledges the comments/suggestions given by Dr. R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi; Dr. Sanjay Mudgal, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi; Dr. T.P. Sharma, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi for the improvement of the book.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur, for conducting workshops of the development committee at Udaipur and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, Head, DESM, NCERT.

The Council also acknowledges the efforts of Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar, Neelam Walecha, *DTP Operators*; Kanwar Singh, *Copy Editor;* Abhimanu Mohanty, *Proof Reader,* Deepak Kapoor, *Computer Station Incharge*, DESM, NCERT for technical assistance, APC Office and the Administrative Staff, DESM, NCERT and the Publication Department of the NCERT.

NATIONAL ANTHEM

Jana gana mana adhinayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata
Panjaba Sindhu Gujarata Maratha
Dravida Utkala Banga
Vindhya Himachala Yamuna Ganga
uchchala jaladhi taranga
Tava Subha name jage, tave subha asisa mage,
gahe tava jaya gatha.
Jana gana mangala dayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

-Rabindranath Tagore

జాతీయ గీతం

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగా!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

PLEDGE | ప్రతిజ్ఞ

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా
నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

- పైడిమర్రి వెంకటసుబ్బారావు

MATHEMATICS
గణితం

Class / తరగతి – VIII

Semester (సెమిస్టర్) – II

CONTENTS / విషయ సూచిక

K3Z9B3
Teacher Corner

V6F6R8
Student Corner

Algebraic Expressions and Identities

CHAPTER 9

0852CH09

9.1 What are Expressions?

In earlier classes, we have already become familiar with what algebraic expressions (or simply expressions) are. Examples of expressions are:

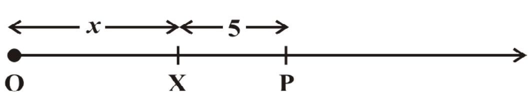
$$x + 3,\ 2y - 5,\ 3x^2,\ 4xy + 7 \text{ etc.}$$

You can form many more expressions. As you know expressions are formed from variables and constants. The expression $2y - 5$ is formed from the variable y and constants 2 and 5. The expression $4xy + 7$ is formed from variables x and y and constants 4 and 7.

We know that, the value of y in the expression, $2y - 5$, may be anything. It can be $2, 5, -3, 0, \frac{5}{2}, -\frac{7}{3}$ etc.; actually countless different values. The value of an expression changes with the value chosen for the variables it contains. Thus as y takes on different values, the value of $2y - 5$ goes on changing. When $y = 2$, $2y - 5 = 2(2) - 5 = -1$; when $y = 0$, $2y - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5$, etc. Find the value of the expression $2y - 5$ for the other given values of y.

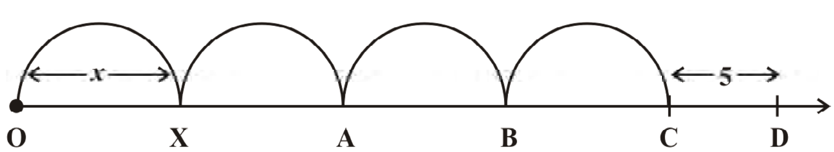
Number line and an expression:

Consider the expression $x + 5$. Let us say the variable x has a position X on the number line;



X may be anywhere on the number line, but it is definite that the value of $x + 5$ is given by a point P, 5 units to the right of X. Similarly, the value of $x - 4$ will be 4 units to the left of X and so on.

What about the position of $4x$ and $4x + 5$?



The position of $4x$ will be point C; the distance of C from the origin will be four times the distance of X from the origin. The position D of $4x + 5$ will be 5 units to the right of C.

బీజీయ సమాసాలు సర్వ సమీకరణాలు

అధ్యాయం
9

K4N9S4

9.1 సమాసములు అంటే ఏమిటి?

మనం గత తరగతులలో బీజీయ సమాసాలు (లేదా క్లుప్తంగా సమాసములు) గురించి తెలుసుకున్నాము. సమాసాలకు ఉదాహరణలు

$x + 3$, $2y - 5$, $3x^2$, $4xy + 7$ మొదలగునవి.

నీవు అనేక రకములైన సమాసాలను వ్రాయగలవు. సమాసములు చర రాశులు, స్థిర రాశులతో ఏర్పడునని నీకు తెలుసు. సమాసము 2y-5 చర రాశి y మరియు స్థిర రాశులు 2, 5 లతో ఏర్పడినది. సమాసము 4xy+7 చరరాశులు x,y మరియు స్థిరరాశులు 4, 7 లతో ఏర్పడినది.

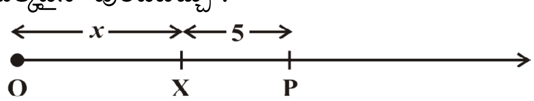
2y-5 సమాసంలో y విలువ ఏదైనా అయి ఉండవచ్చు అని మనకు తెలుసు. అది $2, 5, -3, 0, \frac{5}{2}, -\frac{7}{3}$ .. మొదలగునవి అగును. ఇవి లెక్కించలేనన్ని విభిన్న విలువలు. సమాసం విలువ అందులో ఉండే చరరాశికి ఇచ్చిన విలువ ఆధారంగా మారుతుంది. ఆవిధంగా 2y-5 విలువ y విలువ ఆధారంగా మారుతుంది.

$y = 2$ అయితే $2y - 5 = 2(2) - 5 = -1$, $y=0$ అయితే $2(0)-5= -5$ మొదలగునవి ఇదేవిధంగా ఇచ్చిన y యొక్క ఇతర విలువలకు 2y-5 యొక్క విలువను కనుగొనండి.

సంఖ్యా రేఖ మరియు సమాసము :

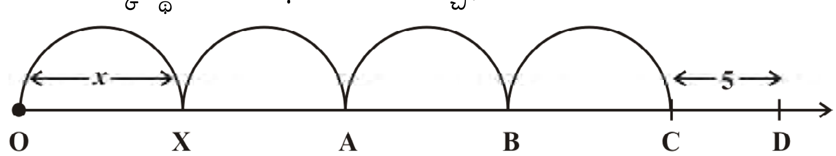
$x + 5$ బీజీయ సమాసం తీసుకోండి. $x + 5$ బీజీయ సమాసంలో చరరాశి x యొక్క స్థానం సంఖ్యారేఖపై X వద్ద ఉంది అనుకోండి.

X అనేది సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడైనా వుండవచ్చు .



కానీ $x + 5$ యొక్క స్థానం X కు కుడి వైపు 5 ప్రమాణాల దూరంలో P వద్ద ఉంటుందనేది ఖచ్చితం. ఇదేవిధంగా, మిగిలినవి కూడా రాయవచ్చు. $x-4$ అనునది X కు ఎడమవైపు 4 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంటుంది.

$4x$ మరియు $4x+5$ యొక్క స్థానాలు ఏవిధంగా ఉండవచ్చు?



ఇక్కడ $4x$ యొక్క స్థానము C బిందువు అవుతుంది. మూల బిందువు నుండి C బిందువుకు గల దూరం, మూల బిందువు నుండి X బిందువుకు గల దూరమునకు నాలుగు రెట్లు. $4x+5$ యొక్క స్థానం అయిన D అనేది C కు కుడివైపున 5 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంటుంది.

TRY THESE

1. Give five examples of expressions containing one variable and five examples of expressions containing two variables.
2. Show on the number line x, $x - 4$, $2x + 1$, $3x - 2$.

9.2 Terms, Factors and Coefficients

Take the expression $4x + 5$. This expression is made up of two terms, $4x$ and 5. **Terms are added to form expressions**. **Terms** themselves **can be** formed as **the product of factors**. The term $4x$ is the product of its factors 4 and x. The term 5 is made up of just one factor, i.e., 5.

TRY THESE

Identify the coefficient of each term in the expression $x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$.

The expression $7xy - 5x$ has two terms $7xy$ and $-5x$. The term $7xy$ is a product of factors 7, x and y. The numerical factor of a term is called its **numerical coefficient or simply coefficient**. The coefficient in the term $7xy$ is 7 and the coefficient in the term $-5x$ is -5.

9.3 Monomials, Binomials and Polynomials

Expression that contains only one term is called a **monomial**. Expression that contains two terms is called a **binomial**. An expression containing three terms is a **trinomial** and so on. In general, an expression containing, one or more terms with non-zero coefficient (with variables having non negative integers as exponents) is called a **polynomial**. A polynomial may contain any number of terms, one or more than one.

Examples of monomials: $4x^2$, $3xy$, $-7z$, $5xy^2$, $10y$, -9, $82mnp$, etc.

Examples of binomials: $a + b$, $4l + 5m$, $a + 4$, $5 - 3xy$, $z^2 - 4y^2$, etc.

Examples of trinomials: $a + b + c$, $2x + 3y - 5$, $x^2y - xy^2 + y^2$, etc.

Examples of polynomials: $a + b + c + d$, $3xy$, $7xyz - 10$, $2x + 3y + 7z$, etc.

TRY THESE

1. Classify the following polynomials as monomials, binomials, trinomials.
   $-z + 5$, $x + y + z$, $y + z + 100$, $ab - ac$, 17
2. Construct
   (a) 3 binomials with only x as a variable;
   (b) 3 binomials with x and y as variables;
   (c) 3 monomials with x and y as variables;
   (d) 2 polynomials with 4 or more terms.

9.4 Like and Unlike Terms

Look at the following expressions:

$7x$, $14x$, $-13x$, $5x^2$, $7y$, $7xy$, $-9y^2$, $-9x^2$, $-5yx$

Like terms from these are:

(i) $7x$, $14x$, $-13x$ are like terms.

ప్రయత్నించండి

1. ఏక చరరాశి గల సమాసాలకు ఐదు ఉదాహరణలు, రెండు చరరాశులు గల సమాసాలకు ఐదు ఉదాహరణలు రాయండి.
2. $x, x-4, 2x+1, 3x-2$ లను సంఖ్యారేఖపై చూపండి.

9.2 పదాలు, కారణాంకాలు మరియు గుణకాలు

సమాసము $4x+5$ ను తీసుకోండి. ఈ సమాసం $4x$ మరియు 5 అను రెండు పదాలతో ఏర్పడింది. **పదాల కలయికతో సమాసం ఏర్పడుతుంది. పదాలు కారణాంకాల లబ్ధంగా ఏర్పడును.** $4x$ అను పదము 4 మరియు x అను రెండు కారణాంకాల లబ్ధము. 5 అను పదము కేవలం ఒక కారణాంకం 5తో ఏర్పడింది.

ప్రయత్నించండి

$x^2y^2 - 10x^2y + 5xy^2 - 20$ సమాసంలో ప్రతి పదము యొక్క గుణకాలను గుర్తించండి.

$7xy - 5x$ సమాసంలో రెండు పదాలు $7xy$ మరియు $-5x$ ఉన్నాయి. $7xy$ అను పదం 7, x, y కారణాంకాల లబ్ధము. ఒక పదంలోని సంఖ్యా కారణాంకాలను **సంఖ్యా గుణకం లేదా క్లుప్తంగా గుణకం** అని అంటారు. పదము $7xy$ లో గుణకం 7 మరియు పదం $-5x$ లో గుణకం -5.

9.3 ఏకపదులు, ద్విపదులు మరియు బహుపదులు

సమాసములో ఒకే ఒక పదము ఉంటే **ఏకపది** అని, రెండు పదాలు ఉంటే **ద్విపది** అని, మూడు పదాలు ఉంటే **త్రిపది** అని అంటారు. ఇట్లే మిగిలిన వాటిని కూడా రాయవచ్చును. సాధారణంగా, శూన్యేతర గుణకాలతో ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాలు గల (ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు ఘాతంగా కలిగి ఉన్న చరరాశులతో కూడిన)సమాసాన్ని **బహుపది** అంటారు. ఒక బహుపది ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాలను కలిగి ఉండవచ్చు.

ఏకపదులకు ఉదాహరణలు: $4x^2, 3xy, -7z, 5xy^2, 10y, -9, 82mnp$, మొదలైనవి.

ద్విపదులకు ఉదాహరణలు: $a+b, 4l+5m, a+4, 5-3xy, z^2-4y^2$, మొదలైనవి.

త్రిపదులకు ఉదాహరణలు: $a+b+c, 2x+3y-5, x^2y-xy^2+y^2$, మొదలైనవి.

బహుపదులకు ఉదాహరణలు: $a+b+c+d, 3xy, 7xyz-10, 2x+3y+7z$, మొదలైనవి.

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది బహుపదులను ఏకపదులు, ద్విపదులు, త్రిపదులుగా వర్గీకరించండి.
   $-z+5, x+y+z, y+z+100, ab-ac, 17$
2. బహుపదులను రాయండి.
   (a) x చరరాశి మాత్రమే కలిగిన 3 ద్విపదులు;
   (b) x మరియు y చరరాశులు కలిగిన 3 ద్విపదులు;
   (c) x మరియు y చరరాశులు కలిగిన 3 ఏక పదులు;
   (d) 4 లేదా ఎక్కువ పదాలతో కూడిన 2 బహుపదులు.

9.4 సజాతి మరియు విజాతి పదాలు

క్రింది సమాసాలను గమనించండి:

$7x, 14x, -13x, 5x^2, 7y, 7xy, -9y^2, -9x^2, -5yx$

పై వానిలో : (i) $7x, 14x, -13x$ లు సజాతి పదాలు.

(ii) $5x^2$ and $-9x^2$ are like terms.
(iii) $7xy$ and $-5yx$ are like terms.

Why are $7x$ and $7y$ not like?
Why are $7x$ and $7xy$ not like?
Why are $7x$ and $5x^2$ not like?

TRY THESE

Write two terms which are like
(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

9.5 Addition and Subtraction of Algebraic Expressions

In the earlier classes, we have also learnt how to add and subtract algebraic expressions. For example, to add $7x^2 - 4x + 5$ and $9x - 10$, we do

$$\begin{array}{rrrr} & 7x^2 & -\,4x & +\;5 \\ + & & 9x & -\;10 \\ \hline & 7x^2 & +\,5x & -\;5 \end{array}$$

Observe how we do the addition. We write each expression to be added in a separate row. While doing so we write like terms one below the other, and add them, as shown. Thus $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$. Similarly, $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. Let us take some more examples.

Example 1: Add: $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$.

Solution: Writing the three expressions in separate rows, with like terms one below the other, we have

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7xy & +\,5yz & -3zx & & \\ + & & 4yz & +\;9zx & & -\,4y \\ + & -2xy & & -\,3zx & +\,5x & \\ \hline & 5xy & +\;9yz & +3zx & +\,5x & -\,4y \end{array}$$

(Note xz is same as zx)

Thus, the sum of the expressions is $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$. Note how the terms, $-4y$ in the second expression and $5x$ in the third expression, are carried over as they are, since they have no like terms in the other expressions.

Example 2: Subtract $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ from $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$.

Solution:

$$\begin{array}{rrrrrr} 7x^2 & -\,4xy & +\,8y^2 & +\,5x & -\;3y & \\ 5x^2 & & -\,4y^2 & & +\;6y & -\,3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & -\,4xy & +\,12y^2 & +\,5x & -\,9y & +\,3 \end{array}$$

(ii) $5x^2$ మరియు $-9x^2$ లు సజాతి పదాలు

(iii) $7xy$ మరియు $-5yx$ లు సజాతి పదాలు

$7x$ మరియు $7y$ లు సజాతి పదాలు ఎందుకు కావు?

$7x$ మరియు $7xy$ లు సజాతి పదాలు ఎందుకు కావు?

$7x$ మరియు $5x^2$లు సజాతి పదాలు ఎందుకు కావు?

ప్రయత్నించండి

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

లకు రెండేసి సజాతి పదాలను రాయండి.

9.5 బీజీయ సమాసాల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం

మనము క్రింది తరగతులలో బీజీయ సమాసాల సంకలనం, వ్యవకలనం గూర్చి తెలుసుకున్నాం. ఉదాహరణకు $7x^2 - 4x + 5$ మరియు $9x - 10$ లను సంకలనం చేయుటకు, మనము

$$\begin{array}{rrrr} & 7x^2 - 4x & + & 5 \\ + & 9x & - & 10 \\ \hline & 7x^2 + 5x & - & 5 \end{array}$$

గా రాస్తాము.

సంకలనాన్ని మనం ఎలా చేస్తామో పరిశీలించండి. ఇచ్చట మనం సంకలనం చేయవలసిన బీజీయ సమాసాలను వేర్వేరు అడ్డు వరుసలలో రాస్తాం. ఇలా రాసినప్పుడు సజాతి పదాలు ఒక దాని క్రింద ఒకటి ఉండేటట్లు రాసి క్రిందివిధంగా సంకలనం చేయాలి. ఆవిధంగా $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$. అదేవిధంగా, $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 1: $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$ లను సంకలనం చేయండి.

సాధన: మూడు సమాసాలను మూడు వరుసలలో, సజాతి పదాలు ఒకదాని క్రింద ఒకటి వచ్చేవిధంగా రాసిన

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7xy & + 5yz & - 3zx & & \\ + & & 4yz & + 9zx & & - 4y \\ + & - 2xy & & -3zx & + 5x & \\ \hline & 5xy & + 9yz & +3zx & + 5x & - 4y \end{array}$$

(గమనిక: xz , zxలు సమానము)

ఈవిధంగా, బీజీయ సమాసాల మొత్తం $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$. రెండవ బీజీయ సమాసంలో $-4y$ మరియు మూడవ బీజీయ సమాసంలో $5x$ లకు మిగిలిన సమాసాలలో సజాతి పదాలు లేనందున, వాటిని అలాగే రాయడం జరిగిందని గమనించండి.

ఉదాహరణ 2: $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ నుండి $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ను తీసివేయండి.

సాధన:

$$\begin{array}{rrrrrr} 7x^2 & - 4xy & + 8y^2 & + 5x & - 3y & \\ 5x^2 & & - 4y^2 & & + 6y & - 3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & - 4xy & +12y^2 & + 5x & - 9y & + 3 \end{array}$$

Note that subtraction of a number is the same as addition of its additive inverse. Thus subtracting –3 is the same as adding +3. Similarly, subtracting $6y$ is the same as adding $-6y$; subtracting $-4y^2$ is the same as adding $4y^2$ and so on. The signs in the third row written below each term in the second row help us in knowing which operation has to be performed.

EXERCISE 9.1

1. Identify the terms, their coefficients for each of the following expressions.

(i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$

(iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$

2. Classify the following polynomials as monomials, binomials, trinomials. Which polynomials do not fit in any of these three categories?

$x + y$, 1000, $x + x^2 + x^3 + x^4$, $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$, $4z - 15z^2$, $ab + bc + cd + da$, pqr, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

3. Add the following.

(i) $ab - bc$, $bc - ca$, $ca - ab$ (ii) $a - b + ab$, $b - c + bc$, $c - a + ac$

(iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4$, $5 + 7pq - 3p^2q^2$ (iv) $l^2 + m^2$, $m^2 + n^2$, $n^2 + l^2$, $2lm + 2mn + 2nl$

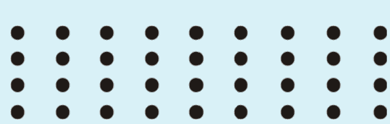
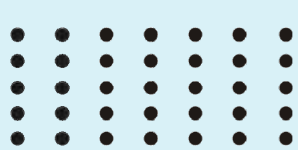
4. (a) Subtract $4a - 7ab + 3b + 12$ from $12a - 9ab + 5b - 3$

(b) Subtract $3xy + 5yz - 7zx$ from $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$

(c) Subtract $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ from $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$

9.6 Multiplication of Algebraic Expressions: Introduction

(i) Look at the following patterns of dots.

Pattern of dots	Total number of dots
	4×9
	5×7

ఒక సంఖ్యను తీసివేయడం అనగా దాని సంకలన విలోమాన్ని కలపడం అని గమనించండి. అందువలన -3 ను తీసివేయడం అంటే $+3$ ను కూడడం కు సమానం. అదేవిధంగా, $6y$ ను తీసివేయడం, $-6y$ ను కలపడం ఒకటే అవుతుంది . అదేవిధంగా $-4y^2$ ను తీసివేయడం $4y^2$ ను కలపడం ఒకటే అవుతుంది. ఇట్లే మిగిలినవి కూడా రాయవచ్చు. మూడవ వరుసలో, రెండవ వరుసలోని ప్రతీ పదాల క్రింద మారిన గుర్తుల ద్వారా మనం ఏ పరిక్రియ చేయాలో తెలుస్తుంది

అభ్యాసం 9.1

1. క్రింది సమాసాలలో పదాలు మరియు వాటి గుణకాలను గుర్తించండి.

(i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$

(iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$

2. క్రింది బహుపదులను ఏకపది, ద్విపది, త్రిపదులుగా వర్గీకరించండి. వాటిలో ఏ వర్గానికి చెందని బహుపదులు ఏవి?

$x + y$, 1000, $x + x^2 + x^3 + x^4$, $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$, $4z - 15z^2$, $ab + bc + cd + da$, pqr, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

3. క్రింది వాటిని సంకలనం చేయండి.

(i) $ab - bc, bc - ca, ca - ab$ (ii) $a - b + ab, b - c + bc, c - a + ac$

(iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4, 5 + 7pq - 3p^2q^2$ (iv) $l^2 + m^2, m^2 + n^2, n^2 + l^2,$
$2lm + 2mn + 2nl$

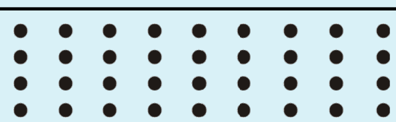
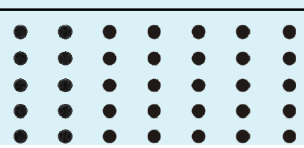
4. (a) $4a - 7ab + 3b + 12$ ను $12a - 9ab + 5b - 3$ నుండి తీసివేయండి

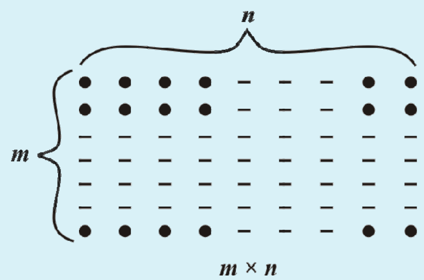
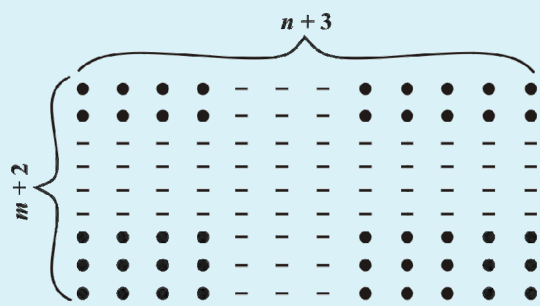
(b) $3xy + 5yz - 7zx$ ను $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$ నుండి తీసివేయండి

(c) $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ ను
$18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$ నుండి తీసివేయండి

9.6 బీజీయ సమాసాల గుణకారం: పరిచయం

(i) ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన చుక్కల అమరికను పరిశీలించండి.

చుక్కల అమరిక	మొత్తం చుక్కల సంఖ్య
	4×9
	5×7

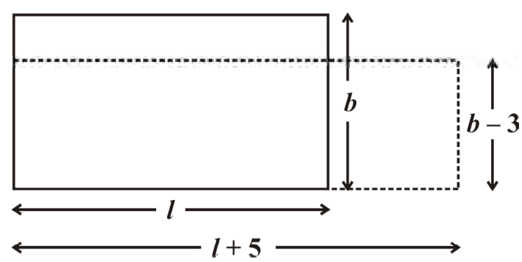
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

To find the number of dots we have to multiply the expression for the number of rows by the expression for the number of columns.

Here the number of rows is increased by 2, i.e., $m + 2$ and number of columns increased by 3, i.e., $n + 3$.

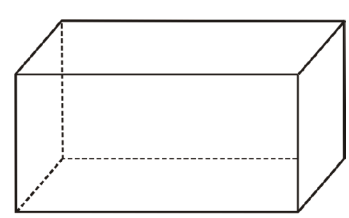
(ii) Can you now think of similar other situations in which two algebraic expressions have to be multiplied?

Ameena gets up. She says, "We can think of area of a rectangle." The area of a rectangle is $l \times b$, where l is the length, and b is breadth. If the length of the rectangle is increased by 5 units, i.e., $(l + 5)$ and breadth is decreased by 3 units , i.e., $(b - 3)$ units, the area of the new rectangle will be $(l + 5) \times (b - 3)$.



To find the area of a rectangle, we have to multiply algebraic expressions like $l \times b$ or $(l + 5) \times (b - 3)$.

(iii) Can you think about volume? (The volume of a rectangular box is given by the product of its length, breadth and height).



(iv) Sarita points out that when we buy things, we have to carry out multiplication. For example, if

price of bananas per dozen = ` p

and for the school picnic bananas needed = z dozens,

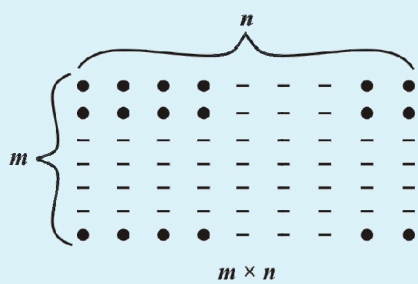
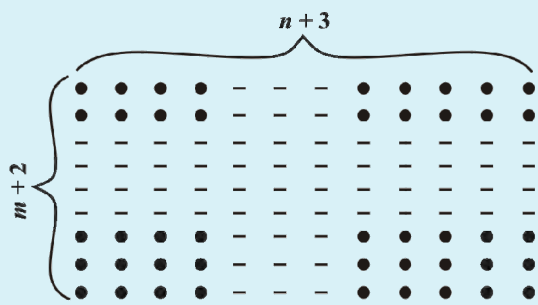
then we have to pay = ` $p \times z$

Suppose, the price per dozen was less by ` 2 and the bananas needed were less by 4 dozens.

Then, price of bananas per dozen = ` $(p - 2)$

and bananas needed = $(z - 4)$ dozens,

Therefore, we would have to pay = ` $(p - 2) \times (z - 4)$

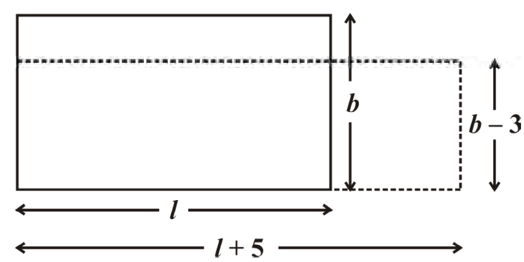
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

చుక్కల సంఖ్యను కనుగొనడానికి మనం అడ్డ వరుసల సంఖ్యను తెలిపే సమాసాన్ని నిలువు వరుసల సంఖ్యను తెలిపే సమాసంతో గుణించాలి.

ఇక్కడ అడ్డువరుసల సంఖ్య 2 కు పెంచబడినది అనగా $m + 2$ మరియు నిలువు వరుసల సంఖ్య 3కు పెంచబడినది అనగా $n + 3$

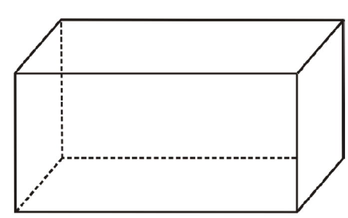
(ii) మీరు ఏవైనా రెండు బీజీయ సమాసాలను గుణించడానికి ఇలాంటి ఇతర సందర్భాలను ఆలోచించగలరా?

అమీనా నిలబడి "దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం గురించి చెప్పవచ్చు అని చెప్పింది." దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం l x b, ఇక్కడ l పొడవును, b వెడల్పును సూచిస్తాయి. దీర్ఘ చతురస్ర పొడవును 5 యూనిట్లు పెంచిన అనగా $(l + 5)$ యూనిట్లు మరియు వెడల్పును 3 యూనిట్లు తగ్గించిన అనగా (b-3) యూనిట్లు, అపుడు ఏర్పడిన క్రొత్త దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $(l+5)\,(b-3)$.



దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం కనుగొనడానికి $l \times b$ లేదా $(l + 5) \times (b - 3)$ వంటి బీజీయ సమాసాలను గుణించాలి.

(iii) మీరు ఘనపరిమాణం గురించి ఆలోచించగలరా? (దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం దాని యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల లబ్ధం అవుతుంది)



(iv) మనం వస్తువులను కొన్నప్పుడు, గుణకారం చేయవలసి ఉంటుందని సరిత సూచించింది. ఉదాహరణకు

ఒక డజను అరటిపండ్లు ఖరీదు = ` p

మరియు పాఠశాల విహార యాత్రకు అవసరమైన అరటిపండ్లు = z డజన్లు అయిన,

మనం చెల్లించాల్సిన ధర = ` $p \times z$

ఒకవేళ, అరటి పండ్ల వెల డజనుకు `2 తగ్గి, కావలసిన అరటిపండ్ల సంఖ్య 4 డజన్లు తగ్గినట్లయితే

అప్పుడు ప్రతి డజను అరటిపండ్ల ఖరీదు = ` $(p - 2)$

మరియు అవసరమైన అరటిపండ్లు = $(z - 4)$ డజన్లు,

కావున, మనం చెల్లించాల్సిన ధర = ` $(p - 2) \times (z - 4)$

TRY THESE

Can you think of two more such situations, where we may need to multiply algebraic expressions?

[**Hint:** • Think of speed and time;
• Think of interest to be paid, the principal and the rate of simple interest; etc.]

In all the above examples, we had to carry out multiplication of two or more quantities. If the quantities are given by algebraic expressions, we need to find their product. This means that we should know how to obtain this product. Let us do this systematically. To begin with we shall look at the multiplication of two monomials.

9.7 Multiplying a Monomial by a Monomial

9.7.1 Multiplying two monomials

We begin with

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$ as seen earlier.

Similarly, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

Now, observe the following products.

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (–3y) = 5 \times x \times (–3) \times y$

$= 5 \times (–3) \times x \times y = –15xy$

Notice that all the three products of monomials, $3xy$, $15xy$, $–15xy$, are also monomials.

Some more useful examples follow.

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (– 4xyz) = (5 \times – 4) \times (x \times xyz)$

$= –20 \times (x \times x \times yz) = –20x^2yz$

Note that $5 \times 4 = 20$
i.e., coefficient of product = coefficient of first monomial × coefficient of second monomial;
and $x \times x^2 = x^3$
i.e., algebraic factor of product = algebraic factor of first monomial × algebraic factor of second monomial.

Observe how we collect the powers of different variables in the algebraic parts of the two monomials. While doing so, we use the rules of exponents and powers.

9.7.2 Multiplying three or more monomials

Observe the following examples.

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\ (x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

It is clear that we first multiply the first two monomials and then multiply the resulting monomial by the third monomial. This method can be extended to the product of any number of monomials.

ప్రయత్నించండి

బీజీయ సమాసాల గుణకారం అవసరమైన ఇటువంటి మరో రెండు సందర్భాల గురించి ఆలోచించండి.

[**గమనిక:**
- వేగం మరియు కాలం గురించి ఆలోచించండి.
- చెల్లించాల్సిన వడ్డీ, అసలు మరియు సాధారణ వడ్డీరేటు, మొదలైన వాటి గురించి ఆలోచించండి.]

పై అన్ని ఉదాహరణలలో, రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రాశులను గుణించాలి. ఒకవేళ రాశులు బీజీయ సమాసాలు అయితే అప్పుడు మనము వాటి లబ్ధాన్ని కనుక్కోవాలి. అనగా ఈ లబ్ధాన్ని ఎలా కనుగొనాలో మనకు తెలియాలి. దీనిని మనం ఒక క్రమ పద్ధతిలో చేద్దాం. మనం ముందుగా రెండు ఏకపదుల గుణకారంతో మొదలుపెడదాం.

9.7 ఏకపదిని ఏకపదితో గుణించడం

9.7.1 రెండు ఏకపదులను గుణించడం

ముందుగా మనకు తెలిసిన దానితో మొదలుపెడదాం.

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

అదేవిధంగా, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

ఇప్పుడు, క్రింది గుణకారాలను పరిశీలించండి.

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ఏకపదులతో ఏర్పడే లబ్ధాలు $3xy$, $15xy$, $-15xy$ మూడూ కూడా ఏకపదులే అని గమనించండి.

మరికొన్ని ఉపయోగకరమైన ఉదాహరణలు చూడండి.

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

గమనిక : $5 \times 4 = 20$

అనగా లబ్ధం యొక్క గుణకం = మొదటి ఏకపది గుణకం × రెండవ ఏకపది గుణకం ;

మరియు $x \times x^2 = x^3$

అనగా, బీజీయ కారణాంకాల లబ్ధం = మొదటి ఏకపది యొక్క బీజీయ కారణాంకం × రెండవ ఏకపది యొక్క బీజీయ కారణాంకం.

రెండు ఏకపదులలోని బీజీయ భాగాలలో విభిన్న చరరాశుల ఘాతాలు ఏవిధంగా సమీకరించబడినవో గమనించండి. అలాచేయుటలో ఘాతాలు మరియు ఘాతాంక న్యాయాలను మనం ఉపయోగిస్తాం.

9.7.2 మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఏకపదుల గుణకారం

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\,(x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

మనం ముందుగా మొదటి రెండు ఏకపదులను గుణించి వచ్చిన లబ్ధాన్ని, మూడవ ఏకపదితో గుణించాలి అనేది స్పష్టం. ఈ పద్ధతిని ఎన్ని ఏకపదులను గుణించడానికైనా ఉపయోగించవచ్చు.

TRY THESE

Find $4x \times 5y \times 7z$
First find $4x \times 5y$ and multiply it by $7z$;
or first find $5y \times 7z$ and multiply it by $4x$.
Is the result the same? What do you observe?
Does the order in which you carry out the multiplication matter?

We can find the product in other way also.
$4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3 y^3$
$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$
$= 120\ x^6y^6$

Example 3: Complete the table for area of a rectangle with given length and breadth.

Solution:

length	breadth	area
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

Example 4: Find the volume of each rectangular box with given length, breadth and height.

	length	breadth	height
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

Solution: Volume = length × breadth × height

Hence, for (i) volume $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$
$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

for (ii) volume $= m^2n \times n^2p \times p^2m$
$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3n^3p^3$

for (iii) volume $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$
$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

EXERCISE 9.2

1. Find the product of the following pairs of monomials.
   (i) $4, 7p$ (ii) $-4p, 7p$ (iii) $-4p, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$
   (v) $4p, 0$
2. Find the areas of rectangles with the following pairs of monomials as their lengths and breadths respectively.
   (p, q); $(10m, 5n)$; $(20x^2, 5y^2)$; $(4x, 3x^2)$; $(3mn, 4np)$

ప్రయత్నించండి

$4x \times 5y \times 7z$ ను కనుగొనండి.
ముందుగా $4x \times 5y$ కనుగొని తరువాత $7z$ చే గుణించాలి
లేదా మొదట $5y \times 7z$ కనుగొని తరువాత $4x$ చే గుణించాలి.
రెండు జవాబులు సమానమేనా? నీవు ఏమి గమనించావు?
పదాలు గుణించినప్పుడు వాటి క్రమానికి ప్రాధాన్యత ఉంటుందా?

మరొక పద్ధతిలో కూడా పదాల లబ్ధాన్ని కనుగొనవచ్చు.
$4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3 y^3$
$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$
$= 120\ x^6y^6$

ఉదాహరణ 3: ఇవ్వబడిన పొడవు, వెడల్పుల ఆధారంగా దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం కనుగొని పట్టికను పూర్తి చేయండి.

సాధన:

పొడవు	వెడల్పు	వైశాల్యం
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

ఉదాహరణ 4: ఇవ్వబడిన పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు కొలతలు కలిగిన ప్రతి దీర్ఘచతురస్రాకార పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనండి.

	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

సాధన: ఘనపరిమాణం = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు

కావున, (i) యొక్క ఘనపరిమాణం $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$
$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

(ii) యొక్క ఘనపరిమాణం $= m^2n \times n^2p \times p^2m$
$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3n^3p^3$

(iii) యొక్క ఘనపరిమాణం $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$
$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

అభ్యాసం 9.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన ఏకపదుల జతల లబ్ధాలను కనుగొనండి.
   (i) $4, 7p$　(ii) $-4p, 7p$　(iii) $-4p, 7pq$　(iv) $4p^3, -3p$
   (v) $4p, 0$
2. క్రింద ఇవ్వబడిన ఏకపదుల జతలను పొడవు, వెడల్పులుగా కలిగిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.
   (p, q); $(10m, 5n)$; $(20x^2, 5y^2)$; $(4x, 3x^2)$; $(3mn, 4np)$

3. Complete the table of products.

First monomial → Second monomial ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	...	...	...	...	...
$-5y$	...	...	$-15x^2y$	...	...	...
$3x^2$	...	...	...	...	...	...
$-4xy$	...	...	...	...	...	...
$7x^2y$	...	...	...	...	...	...
$-9x^2y^2$	...	...	...	...	...	...

4. Obtain the volume of rectangular boxes with the following length, breadth and height respectively.

(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

5. Obtain the product of

(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$

(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

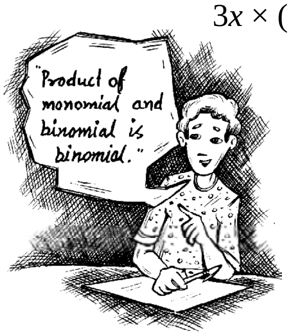
9.8 Multiplying a Monomial by a Polynomial

9.8.1 Multiplying a monomial by a binomial

Let us multiply the monomial $3x$ by the binomial $5y + 2$, i.e., find $3x \times (5y + 2) = ?$

Recall that $3x$ and $(5y + 2)$ represent numbers. Therefore, using the distributive law,

$3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$



We commonly use distributive law in our calculations. For example:

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$
$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (Here, we used distributive law)
$= 700 + 42 = 742$
$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$
$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (Here, we used distributive law)
$= 280 - 14 = 266$

Similarly, $(-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

and $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy.$

What about a binomial × monomial? For example, $(5y + 2) \times 3x = ?$

We may use commutative law as : $7 \times 3 = 3 \times 7$; or in general $a \times b = b \times a$

Similarly, $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$ as before.

TRY THESE

Find the product (i) $2x(3x + 5xy)$ (ii) $a^2(2ab - 5c)$

3. గుణకార పట్టికను పూరించండి.

మొదటి ఏకపది → / రెండవ ఏకపది ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	…	…	…	…	…
$-5y$	…	…	$-15x^2y$	…	…	…
$3x^2$	…	…	…	…	…	…
$-4xy$	…	…	…	…	…	…
$7x^2y$	…	…	…	…	…	…
$-9x^2y^2$	…	…	…	…	…	…

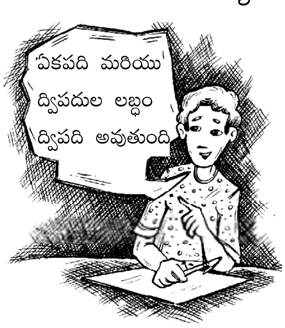
4. క్రింద ఇవ్వబడిన పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు కలిగిన దీర్ఘఘనాకార పెట్టె ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.
(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

5. క్రింది వాటి లబ్ధాలను కనుగొనండి.
(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$
(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

9.8 ఏకపదిని బహుపదితో గుణించడం

9.8.1 ఏకపదిని ద్విపదితో గుణించడం

ఉదాహరణకు, ఏకపది $3x$ ను ద్విపది $5y + 2$చే గుణిద్దాం. అనగా $3x \times (5y + 2) = ?$ కనుగొనండి. $3x$ మరియు $(5y + 2)$ అనునవి సంఖ్యలను సూచిస్తాయని గుర్తు తెచ్చుకోండి. అందువలన, విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి $3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$.



సాధారణంగా సమస్యల సాధనలో విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగిస్తాం. ఉదాహరణకు:

$$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$$
$$= 7 \times 100 + 7 \times 6 \quad \text{(ఇచ్చుట, విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించాం)}$$
$$= 700 + 42 = 742$$
$$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$$
$$= 7 \times 40 - 7 \times 2 \quad \text{(ఇచ్చుట, విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించాం)}$$
$$= 280 - 14 = 266$$

అదేవిధంగా, $(-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

మరియు $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy$.

ద్విపది × ఏకపది గురించి ఏమి చెప్పగలవు? ఉదాహరణకు, $(5y + 2) \times 3x = ?$

మనం స్థిత్యంతర న్యాయాన్ని ఉపయోగించవచ్చు: $7 \times 3 = 3 \times 7$; లేదా సాధారణంగా $a \times b = b \times a$

అదేవిధంగా, ముందువలే $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$ అని చేయవచ్చు.

ప్రయత్నించండి

లబ్ధం కనుగొనండి. (i) $2x (3x + 5xy)$ (ii) $a^2 (2ab - 5c)$

9.8.2 Multiplying a monomial by a trinomial

Consider $3p \times (4p^2 + 5p + 7)$. As in the earlier case, we use distributive law;

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

Multiply each term of the trinomial by the monomial and add products.

> Observe, by using the distributive law, we are able to carry out the multiplication term by term.

TRY THESE

Find the product:
$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$

Example 5: Simplify the expressions and evaluate them as directed:

(i) $x (x – 3) + 2$ for $x = 1$, (ii) $3y (2y – 7) – 3 (y – 4) – 63$ for $y = –2$

Solution:

(i) $x (x – 3) + 2 = x^2 – 3x + 2$

For $x = 1$, $x^2 – 3x + 2 = (1)^2 – 3 (1) + 2$
$= 1 – 3 + 2 = 3 – 3 = 0$

(ii) $3y (2y – 7) – 3 (y – 4) – 63 = 6y^2 – 21y – 3y + 12 – 63$
$= 6y^2 – 24y – 51$

For $y = –2$, $6y^2 – 24y – 51 = 6 (–2)^2 – 24(–2) – 51$
$= 6 \times 4 + 24 \times 2 – 51$
$= 24 + 48 – 51 = 72 – 51 = 21$

Example 6: Add

(i) $5m (3 – m)$ and $6m^2 – 13m$ (ii) $4y (3y^2 + 5y – 7)$ and $2 (y^3 – 4y^2 + 5)$

Solution:

(i) First expression $= 5m (3 – m) = (5m \times 3) – (5m \times m) = 15m – 5m^2$

Now adding the second expression to it, $15m – 5m^2 + 6m^2 – 13m = m^2 + 2m$

(ii) The first expression $= 4y (3y^2 + 5y – 7) = (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (–7))$
$= 12y^3 + 20y^2 – 28y$

The second expression $= 2 (y^3 – 4y^2 + 5) = 2y^3 + 2 \times (– 4y^2) + 2 \times 5$
$= 2y^3 – 8y^2 + 10$

Adding the two expressions,

$$\begin{array}{rrrrr} & 12y^3 & + & 20y^2 – 28y & \\ + & 2y^3 & – & 8y^2 & + 10 \\ \hline & 14y^3 & + & 12y^2 – 28y & + 10 \end{array}$$

Example 7: Subtract $3pq (p – q)$ from $2pq (p + q)$.

Solution: We have $3pq (p – q) = 3p^2q – 3pq^2$ and
$2pq (p + q) = 2p^2q + 2pq^2$

Subtracting,

$$\begin{array}{rrrr} & 2p^2q & + & 2pq^2 \\ & 3p^2q & – & 3pq^2 \\ – & & + & \\ \hline & – p^2q & + & 5pq^2 \end{array}$$

9.8.2 ఏకపదిని త్రిపదితో గుణించడం

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ ను తీసుకోవాలి. ముందు చేసిన విధంగానే, విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగిస్తాము;

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

ఏకపదితో త్రిపది యొక్క ప్రతి పదాన్ని గుణించి, ఆ లబ్ధాలను సంకలనం చేయాలి.

విభాగ న్యాయం ఉపయోగించి ప్రతి పదాన్ని మరొక పదంతో గుణించి చేయగలమని గమనించండి.

ప్రయత్నించండి

లబ్ధంను కనుగొనండి.
$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$

ఉదాహరణ 5: క్రింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించి, వాటి విలువలను సూచించిన విధంగా కనుగొనండి.

(i) $x = 1$ వద్ద $x(x - 3) + 2$ (ii) $y = -2$ వద్ద $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63$

సాధన: (i) $x(x - 3) + 2 = x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ అయిన $x^2 - 3x + 2 = (1)^2 - 3(1) + 2$
$= 1 - 3 + 2 = 3 - 3 = 0$

(ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63 = 6y^2 - 21y - 3y + 12 - 63$
$= 6y^2 - 24y - 51$

$y = -2$ అయిన $6y^2 - 24y - 51 = 6(-2)^2 - 24(-2) - 51$
$= 6 \times 4 + 24 \times 2 - 51$
$= 24 + 48 - 51 = 72 - 51 = 21$

ఉదాహరణ 6: కూడండి.

(i) $5m(3 - m)$ మరియు $6m^2 - 13m$ (ii) $4y(3y^2 + 5y - 7)$ మరియు $2(y^3 - 4y^2 + 5)$

సాధన:

(i) మొదటి సమాసం $= 5m(3 - m) = (5m \times 3) - (5m \times m) = 15m - 5m^2$

దీనిని రెండవ సమాసానికి కూడితే $15m - 5m^2 + 6m^2 - 13m = m^2 + 2m$

(ii) మొదటి సమాసం $= 4y(3y^2 + 5y - 7) = (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (-7))$
$= 12y^3 + 20y^2 - 28y$

రెండవ సమాసం $= 2(y^3 - 4y^2 + 5) = 2y^3 + 2 \times (-4y^2) + 2 \times 5$
$= 2y^3 - 8y^2 + 10$

ఇప్పుడు రెండు సమాసాలను కూడినపుడు

$$\begin{array}{rrrrr} & 12y^3 & + & 20y^2 - 28y & \\ + & 2y^3 & - & 8y^2 & + 10 \\ \hline & 14y^3 & + & 12y^2 - 28y & + 10 \end{array}$$

ఉదాహరణ 7: $3pq(p - q)$ ను $2pq(p + q)$ నుండి తీసివేయుము.

సాధన:

$3pq(p - q) = 3p^2q - 3pq^2$ మరియు
$2pq(p + q) = 2p^2q + 2pq^2$

తీసివేయగా,

$$\begin{array}{rr} 2p^2q & + 2pq^2 \\ 3p^2q & - 3pq^2 \\ - & + \\ \hline -p^2q & + 5pq^2 \end{array}$$

EXERCISE 9.3

1. Carry out the multiplication of the expressions in each of the following pairs.

(i) $4p, q + r$ (ii) $ab, a - b$ (iii) $a + b, 7a^2b^2$ (iv) $a^2 - 9, 4a$

(v) $pq + qr + rp, 0$

2. Complete the table.

	First expression	Second expression	Product
(i)	a	$b + c + d$	...
(ii)	$x + y - 5$	$5xy$	...
(iii)	p	$6p^2 - 7p + 5$	...
(iv)	$4p^2q^2$	$p^2 - q^2$	...
(v)	$a + b + c$	abc	...

3. Find the product.

(i) $(a^2) \times (2a^{22}) \times (4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right) \times \left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

(iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right) \times \left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x \times x^2 \times x^3 \times x^4$

4. (a) Simplify $3x(4x - 5) + 3$ and find its values for (i) $x = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}$.

(b) Simplify $a(a^2 + a + 1) + 5$ and find its value for (i) $a = 0$, (ii) $a = 1$ (iii) $a = -1$.

5. (a) Add: $p(p - q), q(q - r)$ and $r(r - p)$

(b) Add: $2x(z - x - y)$ and $2y(z - y - x)$

(c) Subtract: $3l(l - 4m + 5n)$ from $4l(10n - 3m + 2l)$

(d) Subtract: $3a(a + b + c) - 2b(a - b + c)$ from $4c(-a + b + c)$

9.9 Multiplying a Polynomial by a Polynomial

9.9.1 Multiplying a binomial by a binomial

Let us multiply one binomial $(2a + 3b)$ by another binomial, say $(3a + 4b)$. We do this step-by-step, as we did in earlier cases, following the distributive law of multiplication,

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b \times (2a + 3b)$$

Observe, every term in one binomial multiplies every term in the other binomial.

$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$
$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$
$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad \text{(Since } ba = ab\text{)}$$

When we carry out term by term multiplication, we expect $2 \times 2 = 4$ terms to be present. But two of these are like terms, which are combined, and hence we get 3 terms. **In multiplication of polynomials with polynomials, we should always look for like terms, if any, and combine them.**

అభ్యాసం 9.3

1. క్రింది సమాసాల జతల లబ్ధాలను కనుగొనండి.

   (i) $4p, q + r$ (ii) $ab, a - b$ (iii) $a + b, 7a^2b^2$ (iv) $a^2 - 9, 4a$

   (v) $pq + qr + rp, 0$

2. పట్టికను పూర్తి చేయండి.

	మొదటి సమాసం	రెండవ సమాసం	లబ్ధం
(i)	a	$b + c + d$	...
(ii)	$x + y - 5$	$5xy$	...
(iii)	p	$6p^2 - 7p + 5$	...
(iv)	$4p^2q^2$	$p^2 - q^2$	...
(v)	$a + b + c$	abc	...

3. లబ్ధంను కనుగొనండి.

   (i) $(a^2) \times (2a^{22}) \times (4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right) \times \left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

   (iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right) \times \left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x \times x^2 \times x^3 \times x^4$

4. (a) $3x(4x - 5) + 3$ ను సూక్ష్మీకరించి (i) $x = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}$ ల వద్ద వాటి విలువను కనుగొనండి.

   (b) $a(a^2 + a + 1) + 5$ ను సూక్ష్మీకరించి

   (i) $a = 0$ (ii) $a = 1$ (iii) $a = -1$ ల వద్ద వాటి విలువను కనుగొనండి.

5. (a) కూడండి: $p(p - q), q(q - r)$ మరియు $r(r - p)$

   (b) కూడండి: $2x(z - x - y)$ మరియు $2y(z - y - x)$

   (c) తీసివేయండి: $3l(l - 4m + 5n)$ ను $4l(10n - 3m + 2l)$ నుండి

   (d) తీసివేయండి: $3a(a + b + c) - 2b(a - b + c)$ ను $4c(-a + b + c)$ నుండి

9.9 బహుపదిని బహుపదితో గుణించడం

9.9.1 ద్విపదిని ద్విపదితో గుణించడం

ఒక ద్విపది $(2a + 3b)$ ని మరొక ద్విపది $(3a + 4b)$ తో గుణిద్దాం. దీనిని గుణాకార విభాగ న్యాయంను ఉపయోగించి వరుసక్రమంలో ఇంతకుముందు చేసిన ఉదాహరణల వలే సాధించవచ్చును.

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b \times (2a + 3b)$$

ఒక ద్విపది యొక్క ప్రతి పదాన్ని మరొక ద్విపది యొక్క ప్రతి పదంతో గుణించడాన్ని గమనించండి.

$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$
$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$
$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad (ba = ab \text{ కావున})$$

ఇక్కడ పదాల గుణకారం చేయడం వల్ల లబ్ధంలో $2 \times 2 = 4$ పదాలు ఉంటాయని అనుకుంటాం. అయితే ఇక్కడ రెండు సజాతి పదాలు ఉన్నప్పుడు వాటిని కలపడం వల్ల మొత్తం 3 పదాలను పొందుతాం. **బహుపదులతో బహుపదుల గుణకారంలో సజాతి పదాలను గమనించి, ఒకవేళ ఉంటే వాటిని కూడాలి.**

Example 8: Multiply

(i) $(x - 4)$ and $(2x + 3)$ (ii) $(x - y)$ and $(3x + 5y)$

Solution:

(i) $(x - 4) \times (2x + 3) = x \times (2x + 3) - 4 \times (2x + 3)$
$= (x \times 2x) + (x \times 3) - (4 \times 2x) - (4 \times 3) = 2x^2 + 3x - 8x - 12$
$= 2x^2 - 5x - 12$ (Adding like terms)

(ii) $(x - y) \times (3x + 5y) = x \times (3x + 5y) - y \times (3x + 5y)$
$= (x \times 3x) + (x \times 5y) - (y \times 3x) - (y \times 5y)$
$= 3x^2 + 5xy - 3yx - 5y^2 = 3x^2 + 2xy - 5y^2$ (Adding like terms)

Example 9: Multiply

(i) $(a + 7)$ and $(b - 5)$ (ii) $(a^2 + 2b^2)$ and $(5a - 3b)$

Solution:

(i) $(a + 7) \times (b - 5) = a \times (b - 5) + 7 \times (b - 5)$
$= ab - 5a + 7b - 35$

Note that there are no like terms involved in this multiplication.

(ii) $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b) = a^2 (5a - 3b) + 2b^2 \times (5a - 3b)$
$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$

9.9.2 Multiplying a binomial by a trinomial

In this multiplication, we shall have to multiply each of the three terms in the trinomial by each of the two terms in the binomial. We shall get in all 3 × 2 = 6 terms, which may reduce to 5 or less, if the term by term multiplication results in like terms. Consider

$$\underbrace{(a+7)}_{\text{binomial}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{trinomial}} = a \times (a^2 + 3a + 5) + 7 \times (a^2 + 3a + 5)$$
[using the distributive law]
$$= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$$
$$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$$
$$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$$
(Why are there only 4 terms in the final result?)

Example 10: Simplify $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c$.

Solution: We have

$(a + b)(2a - 3b + c) = a(2a - 3b + c) + b(2a - 3b + c)$
$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$
$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$ (Note, $-3ab$ and $2ab$ are like terms)

and $(2a - 3b)c = 2ac - 3bc$

Therefore,

$(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$
$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$
$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$
$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$

ఉదాహరణ 8: లబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $(x-4)$ మరియు $(2x+3)$ (ii) $(x-y)$ మరియు $(3x+5y)$

సాధన:

(i) $(x-4)\times(2x+3) = x\times(2x+3)-4\times(2x+3)$

$= (x\times 2x)+(x\times 3)-(4\times 2x)-(4\times 3) = 2x^2+3x-8x-12$

$= 2x^2-5x-12$ (సజాతి పదాలను కలుపగా)

(ii) $(x-y)\times(3x+5y) = x\times(3x+5y)-y\times(3x+5y)$

$= (x\times 3x)+(x\times 5y)-(y\times 3x)-(y\times 5y)$

$= 3x^2+5xy-3yx-5y^2 = 3x^2+2xy-5y^2$ (సజాతి పదాలను కలుపగా)

ఉదాహరణ 9: లబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $(a+7)$ మరియు $(b-5)$ (ii) (a^2+2b^2) మరియు $(5a-3b)$

సాధన:

(i) $(a+7)\times(b-5) = a\times(b-5)+7\times(b-5) = ab-5a+7b-35$

ఇచ్చుట లబ్ధంలో సజాతి పదాలు ఏమీలేవని గమనించండి.

(ii) $(a^2+2b^2)\times(5a-3b) = a^2(5a-3b)+2b^2\times(5a-3b)$

$= 5a^3-3a^2b+10ab^2-6b^3$

9.9.2 ద్విపదిని త్రిపదితో గుణించడం

ఈ గుణకారంలో, ద్విపదిలోని రెండుపదాలతో త్రిపదిలోని మూడు పదాలను గుణించాలి. ద్విపదిలోని ప్రతి పదమును, త్రిపదిలోని ప్రతి పదముతో గుణించినప్పుడు మొత్తం $3\times 2 = 6$ పదాలు లభిస్తాయి. అయితే పదాల గుణకారంలో సజాతి పదాలు ఉంటే ఆ సందర్భంలో పదాల సంఖ్య 5 లేదా అంతకన్నా తక్కువ కావచ్చు. క్రింది లబ్ధాన్ని పరిశీలించండి.

$\underbrace{(a+7)}_{\text{ద్విపది}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{త్రిపది}} = a\times(a^2+3a+5)+7\times(a^2+3a+5)$ (విభాగ న్యాయం ప్రకారం)

$= a^3+3a^2+5a+7a^2+21a+35$

$= a^3+(3a^2+7a^2)+(5a+21a)+35$

$= a^3+10a^2+26a+35$ (చివరి ఫలితంలో 4 పదాలు మాత్రమే ఉండటానికి కారణం ఏమిటి?)

ఉదాహరణ 10: $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

సాధన: $(a+b)(2a-3b+c) = a(2a-3b+c)+b(2a-3b+c)$

$= 2a^2-3ab+ac+2ab-3b^2+bc$

$= 2a^2-ab-3b^2+bc+ac$ ($-3ab$, $2ab$లు సజాతి పదాలని గమనించండి)

మరియు $(2a-3b)c = 2ac-3bc$

కావున, $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c = 2a^2-ab-3b^2+bc+ac-(2ac-3bc)$

$= 2a^2-ab-3b^2+bc+ac-2ac+3bc$

$= 2a^2-ab-3b^2+(bc+3bc)+(ac-2ac)$

$= 2a^2-3b^2-ab+4bc-ac$

EXERCISE 9.4

1. Multiply the binomials.

(i) $(2x + 5)$ and $(4x - 3)$ (ii) $(y - 8)$ and $(3y - 4)$

(iii) $(2.5l - 0.5m)$ and $(2.5l + 0.5m)$ (iv) $(a + 3b)$ and $(x + 5)$

(v) $(2pq + 3q^2)$ and $(3pq - 2q^2)$

(vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ and $4\left(a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)$

2. Find the product.

(i) $(5 - 2x)\,(3 + x)$ (ii) $(x + 7y)\,(7x - y)$

(iii) $(a^2 + b)\,(a + b^2)$ (iv) $(p^2 - q^2)\,(2p + q)$

3. Simplify.

(i) $(x^2 - 5)\,(x + 5) + 25$ (ii) $(a^2 + 5)\,(b^3 + 3) + 5$

(iii) $(t + s^2)\,(t^2 - s)$

(iv) $(a + b)\,(c - d) + (a - b)\,(c + d) + 2\,(ac + bd)$

(v) $(x + y)(2x + y) + (x + 2y)(x - y)$ (vi) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(vii) $(1.5x - 4y)(1.5x + 4y + 3) - 4.5x + 12y$

(viii) $(a + b + c)(a + b - c)$

9.10 What is an Identity?

Consider the equality $(a + 1)\,(a + 2) = a^2 + 3a + 2$

We shall evaluate both sides of this equality for some value of a, say $a = 10$.

For $a = 10$, LHS $= (a + 1)\,(a + 2) = (10 + 1)\,(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

RHS $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

Thus, the values of the two sides of the equality are equal for $a = 10$.

Let us now take $a = -5$

LHS $= (a + 1)\,(a + 2) = (-5 + 1)\,(-5 + 2) = (-4) \times (-3) = 12$

RHS $= a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3\,(-5) + 2$

$= 25 - 15 + 2 = 10 + 2 = 12$

Thus, for $a = -5$, also LHS = RHS.

We shall find that for any value of a, LHS = RHS. **Such an equality, true for every value of the variable in it, is called an identity**. Thus,

$$(a + 1)\,(a + 2) = a^2 + 3a + 2 \text{ is an identity.}$$

An equation is true for only certain values of the variable in it. It is not true for all values of the variable. For example, consider the equation

$$a^2 + 3a + 2 = 132$$

It is true for $a = 10$, as seen above, but it is not true for $a = -5$ or for $a = 0$ etc.

Try it: Show that $a^2 + 3a + 2 = 132$ is not true for $a = -5$ and for $a = 0$.

9.11 Standard Identities

We shall now study three identities which are very useful in our work. These identities are obtained by multiplying a binomial by another binomial.

అభ్యాసం 9.4

1. ద్విపదులను గుణించండి.

(i) $(2x + 5)$ మరియు $(4x – 3)$ (ii) $(y – 8)$ మరియు $(3y – 4)$

(iii) $(2.5l – 0.5m)$ మరియు $(2.5l + 0.5m)$ (iv) $(a + 3b)$ మరియు $(x + 5)$

(v) $(2pq + 3q^2)$ మరియు $(3pq – 2q^2)$

(vi) $\left(\frac{3}{4}a^2+3b^2\right)$ మరియు $4\left(a^2-\frac{2}{3}b^2\right)$

2. లబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $(5 – 2x)(3 + x)$ (ii) $(x + 7y)(7x – y)$

(iii) $(a^2 + b)(a + b^2)$ (iv) $(p^2 – q^2)(2p + q)$

3. సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $(x^2 – 5)(x + 5) + 25$ (ii) $(a^2 + 5)(b^3 + 3) + 5$

(iii) $(t + s^2)(t^2 – s)$

(iv) $(a + b)(c – d) + (a – b)(c + d) + 2(ac + bd)$

(v) $(x + y)(2x + y) + (x + 2y)(x – y)$ (vi) $(x + y)(x^2 – xy + y^2)$

(vii) $(1.5x – 4y)(1.5x + 4y + 3) – 4.5x + 12y$

(viii) $(a + b + c)(a + b – c)$

9.10 సర్వ సమీకరణము అనగానేమి?

సమానత్వం $(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ ను తీసుకుందాం.

a యొక్క కొన్ని విలువలకు సమానత్వానికి ఇరువైపుల ఉన్న విలువలను గణిద్దాం. $a = 10$ అనుకుందాం

$a = 10$కు, LHS $= (a + 1)(a + 2) = (10 + 1)(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

RHS $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

$a = 10$ అయినప్పుడు, సమానత్వానికి ఇరువైపులా విలువలు సమానంగా ఉన్నాయి.

$a = –5$కు LHS $= (a + 1)(a + 2) = (–5 + 1)(–5 + 2) = (– 4) \times (–3) = 12$

RHS $= a^2 + 3a + 2 = (–5)^2 + 3(–5) + 2$

$= 25 – 15 + 2 = 10 + 2 = 12$

ఆవిధంగా, $a = –5$ అయినప్పుడు కూడా LHS = RHS.

a యొక్క ఏ విలువకైనా LHS = RHS అగుట మనం చూడవచ్చు. **ఈవిధంగా చరరాశి యొక్క ప్రతి విలువకు సత్యమగు సమానత్వాన్ని సర్వ సమీకరణం అంటారు.** కావున,

$(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$ ఒక సర్వసమీకరణం.

ఒక సమీకరణం చరరాశి యొక్క కొన్ని నిర్దిష్ట విలువలకు మాత్రమే సత్యమవుతుంది. ఇది చరరాశి అన్ని విలువలకు సత్యం కాదు. ఉదాహరణకు $a^2 + 3a + 2 = 132$ సమీకరణం తీసుకొనగా
పైన చూపినట్లు $a = 10$ అయితే సత్యమవుతుంది. కానీ, $a = –5$ లేదా $a = 0$ మొదలైనవి అయితే ఇది సత్యము కాదు.
ప్రయత్నించండి: $a^2 + 3a + 2 = 132$ సమీకరణం $a = –5$ మరియు $a = 0$ కు సత్యం కాదని నిరూపించండి.

9.11 ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు

ఇప్పుడు మనం ఉపయోగకరమైన మూడు సర్వసమీకరణాలను అధ్యయనం చేద్దాం. ఈ సర్వసమీకరణాలను ఒక ద్విపదిని మరొక ద్విపదిచే గుణించడం ద్వారా పొందవచ్చును.

Let us first consider the product $(a + b)(a + b)$ or $(a + b)^2$.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a(a + b) + b(a + b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(since } ab = ba\text{)}\end{aligned}$$

Thus $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ (I)

Clearly, this is an identity, since the expression on the RHS is obtained from the LHS by actual multiplication. One may verify that for any value of a and any value of b, the values of the two sides are equal.

- Next we consider $(a – b)^2 = (a – b)(a – b) = a(a – b) – b(a – b)$

  We have $= a^2 – ab – ba + b^2 = a^2 – 2ab + b^2$

  or $\boxed{(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2}$ (II)

- Finally, consider $(a + b)(a – b)$. We have $(a + b)(a – b) = a(a – b) + b(a – b)$

  $= a^2 – ab + ba – b^2 = a^2 – b^2$ (since $ab = ba$)

  or $\boxed{(a + b)(a – b) = a^2 – b^2}$ (III)

The identities (I), (II) and (III) are known as **standard identities**.

TRY THESE

1. Put $– b$ in place of b in Identity (I). Do you get Identity (II)?

- We shall now work out one more useful identity.

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b)\\ &= x^2 + bx + ax + ab\end{aligned}$$

or $\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$ (IV)

TRY THESE

1. Verify Identity (IV), for $a = 2$, $b = 3$, $x = 5$.
2. Consider, the special case of Identity (IV) with $a = b$, what do you get? Is it related to Identity (I)?
3. Consider, the special case of Identity (IV) with $a = – c$ and $b = – c$. What do you get? Is it related to Identity (II)?
4. Consider the special case of Identity (IV) with $b = – a$. What do you get? Is it related to Identity (III)?

We can see that Identity (IV) is the general form of the other three identities also.

9.12 Applying Identities

We shall now see how, for many problems on multiplication of binomial expressions and also of numbers, use of the identities gives a simple alternative method of solving them.

మొదట $(a+b)(a+b)$ లేదా $(a+b)^2$ లబ్ధాన్ని పరిశీలిద్దాం.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b) + b(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \qquad (ab = ba \text{ కాబట్టి})\end{aligned}$$

కావున $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ (I)

స్పష్టంగా ఇది ఒక సర్వసమీకరణం. ఎందుకనగా LHS లో సమాసాలను గుణించగా RHS వచ్చును. a మరియు b యొక్క ఏ విలువలకైనా ఇరువైపులా సమానమవుతుందని నిరూపించబడింది.

- తర్వాత మనం $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b)$ ను తీసుకుందాం.

$$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

లేదా $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ (II)

- చివరిగా, $(a+b)(a-b)$ ని పరిశీలిద్దాం. $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$

లేదా $= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ ($ab = ba$ కాబట్టి)

$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ (III)

(I), (II) మరియు (III) సర్వ సమీకరణాలను **ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు** అని అంటారు.

ప్రయత్నించండి

1. సర్వ సమీకరణం (I) లో bకు బదులుగా $-b$ ను ప్రతిక్షేపించిన మీరు సర్వసమీకరణము (II)ను పొందగలరా?

- మనమిప్పుడు మరొక ఉపయోగకరమైన సర్వ సమీకరణాన్ని సాదిద్దాం.

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x(x+b) + a(x+b)\\ &= x^2 + bx + ax + ab\end{aligned}$$

లేదా $\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$ (IV)

ప్రయత్నించండి

1. $a = 2, b = 3, x = 5$ లకు సర్వసమీకరణం (IV) ను సరిచూడండి.
2. $a = b$ అయిన ప్రత్యేక సందర్భంలో సర్వసమీకరణం (IV) ద్వారా మీరు ఏమి పొందుతారు? అది సర్వసమీకరణం (I) కు సంబంధించినదా?
3. సర్వసమీకరణం (IV) ను ప్రత్యేక సందర్భంలో $a = -c$ మరియు $b = -c$ గా పరిగణించండి. మీరు ఏమి పొందుతారు? ఇది సర్వసమీకరణం (II) కు సంబంధించినదా?
4. సర్వసమీకరణం (IV) ను ప్రత్యేక సందర్భంలో $b = -a$ గా పరిశీలించినచో మీరు ఏమి పొందుతారు? ఇది సర్వసమీకరణం (III) కు సంబంధించినదా?

సర్వసమీకరణం (IV) మిగిలిన మూడు సర్వసమీకరణాల సాధారణ రూపంగా గమనించవచ్చు.

9.12 సర్వ సమీకరణాల వినియోగం

ద్విపదుల మరియు సంఖ్యల గుణకారానికి సంబంధించిన అనేక సమస్యల సాధనలో సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి సులభమైన, ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతులలో ఎలా సాధించగలమో మనం ఇప్పుడు చూద్దాం.

Example 11: Using the Identity (I), find (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 103^2

Solution:

(i) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$ [Using the Identity (I)]

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

We may work out $(2x + 3y)^2$ directly.

$$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$$
$$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$$
$$= 4x^2 + 6xy + 6\,yx + 9y^2 \quad (\text{as } xy = yx)$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Using Identity (I) gave us an alternative method of squaring $(2x + 3y)$. Do you notice that the Identity method required fewer steps than the above direct method? You will realise the simplicity of this method even more if you try to square more complicated binomial expressions than $(2x + 3y)$.

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$ (Using Identity I)

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

We may also directly multiply 103 by 103 and get the answer. Do you see that Identity (I) has given us a less tedious method than the direct method of squaring 103? Try squaring 1013. You will find in this case, the method of using identities even more attractive than the direct multiplication method.

Example 12: Using Identity (II), find (i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$

Solution:

(i) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2$ [Using the Identity (II)]

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$

Do you agree that for squaring $(4p - 3q)^2$ the method of identities is quicker than the direct method?

(ii) $(4.9)^2 = (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01 = 24.01$

Is it not that, squaring 4.9 using Identity (II) is much less tedious than squaring it by direct multiplication?

Example 13: Using Identity (III), find

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×206

Solution:

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$= \frac{9}{4}m^2 - \frac{4}{9}n^2$

Try doing this directly. You will realise how easy our method of using Identity (III) is.

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)(983 - 17)$

[Here $a = 983$, $b = 17$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

Therefore, $983^2 - 17^2 = 1000 \times 966 = 966000$

ఉదాహరణ 11: సర్వసమీకరణం (I) ను ఉపయోగించి (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 103^2లను కనుగొనండి.

సాధన:

(i) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$ [సర్వసమీకరణం (I) ఉపయోగించి]

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$(2x + 3y)^2$ ను ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా చేయవచ్చును.

$(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$

$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$

$= 4x^2 + 6xy + 6\,yx + 9y^2$ ($xy = yx$ కనుక)

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$(2x + 3y)$ను మనం వర్గం చేయడానికి సర్వసమీకరణం (I) ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతిని ఏర్పరచింది. పై ప్రత్యక్ష పద్ధతి కంటే సర్వ సమీకరణ పద్ధతి తక్కువ సోపానాలను కలిగి ఉండడం నీవు గమనించావా? $(2x + 3y)$ కన్నా క్లిష్టమైన ద్విపదులకు వర్గములను కనుగొనేటప్పుడు సర్వసమీకరణ పద్ధతి సులభమని తెలుసుకొనవచ్చు.

(ii) $(103)^2 = (100 + 3)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$ (సర్వసమీకరణం (I) ఉపయోగించి)

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

మనం 103ను 103తో నేరుగా గుణించి జవాబు పొందవచ్చును. 103 యొక్క వర్గమును కనుగొనడానికి సర్వసమీకరణం (I) ద్వారా, ప్రత్యక్ష పద్ధతి కంటే సులభంగా సాధన దొరుకుతుందని గమనించావా? 1013ను వర్గం చేయడం గుణకార ప్రత్యక్ష విధానం కంటే సర్వ సమీకరణ విధానము ఎక్కువ ఆకర్షణీయంగా ఉండుటను మనం తెలుసుకొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 12: సర్వసమీకరణం (II)ను ఉపయోగించి కనుగొనండి. (i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$

సాధన:

(i) $(4p - 3q)^2 = (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2$ [సర్వసమీకరణం (II) ఉపయోగించి]

$= 16p^2 - 24pq + 9q^2$

$(4p - 3q)^2$ ను కనుగొనడానికి ప్రత్యక్ష పద్ధతి కంటే సర్వసమీకరణ పద్ధతి త్వరితమని మీరు ఒప్పుకుంటారా?

(ii) $(4.9)^2 = (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01 = 24.01$

4.9 యొక్క వర్గం కనుగొనడానికి సర్వసమీకరణం (II) ను ఉపయోగించడం, ప్రత్యక్ష పద్ధతి కంటే సులభం కాదా?

ఉదాహరణ 13: సర్వసమీకరణం (III) ఉపయోగించి

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×206 లను కనుగొనండి.

సాధన:

(i) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right) = \left(\frac{3}{2}m\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^2 = \frac{9}{4}m^2 - \frac{4}{9}n^2$

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)(983 - 17)$

[ఇక్కడ $a = 983$, $b = 17$, మరియు $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

అందువలన, $983^2 - 17^2 = 1000 \times 966 = 966000$

దీనిని ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో గణించడానికి ప్రయత్నించండి. సర్వసమీకరణం (III)తో దీనిని ఎంత సులభంగా చేయవచ్చో తెలుసుకుంటారు.

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2$
$= 40000 - 36 = 39964$

Example 14: Use the Identity $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ to find the following:

(i) 501×502 (ii) 95×103

Solution:

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2) = 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$
$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3) = 100^2 + (-5 + 3) \times 100 + (-5) \times 3$
$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

EXERCISE 9.5

1. Use a suitable identity to get each of the following products.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$ (iii) $(2a - 7)(2a - 7)$

(iv) $(3a - \frac{1}{2})(3a - \frac{1}{2})$ (v) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(vi) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vii) $(6x - 7)(6x + 7)$ (viii) $(-a + c)(-a + c)$

(ix) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a - 9b)(7a - 9b)$

2. Use the identity $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ to find the following products.

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

(v) $(2x + 5y)(2x + 3y)$ (vi) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$

(vii) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

3. Find the following squares by using the identities.

(i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6x^2 - 5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy + 5y)^2$

4. Simplify.

(i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$

(vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$ (vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. Show that.

(i) $(3x + 7)^2 - 84x = (3x - 7)^2$ (ii) $(9p - 5q)^2 + 180pq = (9p + 5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}\mathrm{m} - \frac{3}{4}\mathrm{n}\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq + 3q)^2 - (4pq - 3q)^2 = 48pq^2$

(v) $(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a) = 0$

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2$
$= 40000 - 36 = 39964$

ఉదాహరణ 14: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

(i) 501×502 (ii) 95×103

సాధన:

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2) = 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$
$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3) = 100^2 + (-5 + 3) \times 100 + (-5) \times 3$
$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

అభ్యాసం 9.5

1. సరైన సర్వ సమీకరణం ఉపయోగించి క్రింది లబ్ధాలను కనుగొనండి.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$ (iii) $(2a - 7)(2a - 7)$

(iv) $(3a - \frac{1}{2})(3a - \frac{1}{2})$ (v) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(vi) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vii) $(6x - 7)(6x + 7)$ (viii) $(-a + c)(-a + c)$

(ix) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a - 9b)(7a - 9b)$

2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ సర్వ సమీకరణం ఉపయోగించి క్రింది లబ్ధాలు కనుగొనండి.

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$
(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$
(v) $(2x + 5y)(2x + 3y)$ (vi) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$
(vii) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

3. క్రింది వర్గాలను సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగించి కనుగొనండి.

(i) $(b - 7)^2$ (ii) $(xy + 3z)^2$ (iii) $(6x^2 - 5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p - 0.5q)^2$ (vi) $(2xy + 5y)^2$

4. సూక్ష్మీకరించండి:

(i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$
(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$
(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$
(vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$ (vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

5. నిరూపించండి.

(i) $(3x + 7)^2 - 84x = (3x - 7)^2$ (ii) $(9p - 5q)^2 + 180pq = (9p + 5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}\text{m} - \frac{3}{4}\text{n}\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq + 3q)^2 - (4pq - 3q)^2 = 48pq^2$

(v) $(a - b)(a + b) + (b - c)(b + c) + (c - a)(c + a) = 0$

6. Using identities, evaluate.

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2
(v) 5.2^2 (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2
(ix) 10.5×9.5

7. Using $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, find

(i) $51^2 - 49^2$ (ii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$ (iii) $153^2 - 147^2$
(iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. Using $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, find

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Expressions are formed from **variables** and **constants**.

2. Terms are added to form **expressions**. Terms themselves are formed as product of **factors**.

3. Expressions that contain exactly one, two and three terms are called **monomials**, **binomials** and **trinomials** respectively. In general, any expression containing one or more terms with non-zero coefficients (and with variables having non- negative integers as exponents) is called a **polynomial**.

4. **Like** terms are formed from the same variables and the powers of these variables are the same, too. Coefficients of like terms need not be the same.

5. While adding (or subtracting) polynomials, first look for like terms and add (or subtract) them; then handle the unlike terms.

6. There are number of situations in which we need to multiply algebraic expressions: for example, in finding area of a rectangle, the sides of which are given as expressions.

7. A monomial multiplied by a monomial always gives a monomial.

8. While multiplying a polynomial by a monomial, we multiply every term in the polynomial by the monomial.

9. In carrying out the multiplication of a polynomial by a binomial (or trinomial), we multiply term by term, i.e., every term of the polynomial is multiplied by every term in the binomial (or trinomial). Note that in such multiplication, we may get terms in the product which are like and have to be combined.

10. An **identity** is an equality, which is true for all values of the variables in the equality.

On the other hand, an equation is true only for certain values of its variables. An equation is not an identity.

11. The following are the standard identities:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (III)

12. Another useful identity is $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (IV)

13. The above four identities are useful in carrying out squares and products of algebraic expressions. They also allow easy alternative methods to calculate products of numbers and so on.

6. సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించి, గణించండి.

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2
(v) 5.2^2 (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2
(ix) 10.5×9.5

7. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ను ఉపయోగించి క్రింది వానిని కనుగొనండి.

(i) $51^2 - 49^2$ (ii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$ (iii) $153^2 - 147^2$
(iv) $12.1^2 - 7.9^2$

8. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ఉపయోగించి క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. సమాసం అనేది **చరరాశులు** మరియు **స్థిరరాశులతో** ఏర్పడినది.
2. పదాల కలయిక ద్వారా **సమాసాలు** ఏర్పడతాయి. **కారణాంకాల** లబ్ధంతో పదాలు ఏర్పడతాయి.
3. ఒకటి, రెండు మరియు మూడు పదాలతో కూడిన సమాసాలను వరుసగా **ఏకపది, ద్విపది** మరియు **త్రిపది** అని అంటారు. సాధారణంగా, శూన్యేతర గుణకాలతో ఒకటి లేదా ఎక్కువ పదాలు (ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు ఘాతంగా కలిగి వున్న చరరాశులతో కూడిన) గల సమాసాన్ని **బహుపది** అంటారు.
4. చరరాశులు మరియు వాటి ఘాత విలువలు సమానంగా ఉన్న పదాలను **సజాతి పదాలు** అంటారు. సజాతి పదాల గుణకం సమానంగా ఉండాలని లేదు.
5. బహుపదులను కూడినప్పుడు (లేదా తీసివేసినప్పుడు) మొదట సజాతి పదాలను కూడాలి (లేదా తీసివేయాలి). తర్వాత విజాతి పదాలను రాయాలి.
6. మనం బీజీయ సమాసాలను గుణకారం చేయవలసిన అనేక సందర్భాలను చూస్తాం. ఉదా: ఇవ్వబడిన ఒక దీర్ఘ చతురస్రపు పొడవు మరియు వెడల్పులు బీజీయ సమాసాలైతే, దాని వైశాల్యం కనుగొనవలసినప్పుడు వాటిని గుణిస్తాం.
7. ఒక ఏకపదిని మరొక ఏకపదితో గుణించినప్పుడు, వాటి లబ్ధం ఏకపది అగును.
8. ఒక బహుపదిని ఏకపదితో గుణించినప్పుడు బహుపదిలోని ప్రతి పదాన్ని ఏకపదితో గుణిస్తాం.
9. బహుపదిని ద్విపది (లేదా త్రిపదితో) గుణించేటప్పుడు పదాల వారీగా గుణాకారం చేయాలి. అనగా బహుపదిలోని ప్రతి పదంతో ద్విపది (లేదా త్రిపది) యొక్క ప్రతి పదంను గుణించాలి. ఈవిధంగా వచ్చిన లబ్ధంలో సజాతి పదాలు ఉన్నచో వాటిని కూడాలి.
10. **సర్వసమీకరణం** అనునది అన్ని చరరాశుల అన్ని విలువలకు సత్యమైన సమీకరణం. మరోవైపు, ఒక సమీకరణం అందులోని చరరాశుల కొన్ని విలువలకే సత్యం. ఒక సమీకరణం సర్వ సమీకరణం కాదు.
11. ప్రామాణిక సర్వ సమీకరణాలు

    $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)
    $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)
    $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (III)
12. మరొక ఉపయోగకరమైన సర్వసమీకరణం $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (IV)
13. పై నాలుగు సర్వ సమీకరణాలు బీజీయ సమాసాల వర్గం మరియు లబ్ధములు కనుగొనడానికి ఉపయోగకరమైనవి. అవి సంఖ్యల లబ్ధం మొదలగు వాటిని కనుగొనడానికి కూడా సులభమైన ప్రత్యామ్నాయ విధానాలుగా ఉంటాయి.

CHAPTER 10

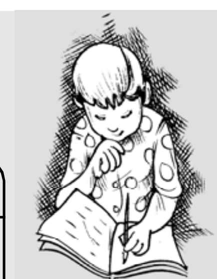
Visualising Solid Shapes

0852CH10

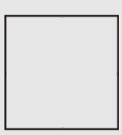
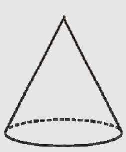
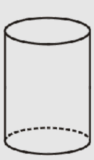
10.1 Introduction

In Class VII, you have learnt about plane shapes and solid shapes. Plane shapes have two measurements like length and breadth and therefore they are called two-dimensional shapes whereas a solid object has three measurements like length, breadth, height or depth. Hence, they are called three-dimensional shapes. Also, a solid object occupies some space. Two-dimensional and three-dimensional figures can also be briefly named as 2-D and 3-D figures. You may recall that triangle, rectangle, circle etc., are 2-D figures while cubes, cylinders, cones, spheres etc. are three-dimensional figures.

DO THIS



Match the following: (First one is done for you)

Shape	Type of Shape	Name of the shape
	3-dimensional	Sphere
	2-Dimensional	Cylinder
	3-dimensional	Square
	2-dimensional	Circle

అధ్యాయం 10

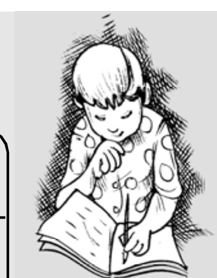
ఘనాకృతుల దృశ్యీకరణ

R6M2T4

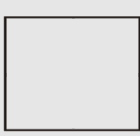
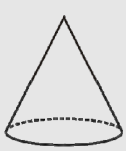
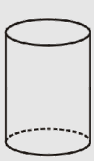
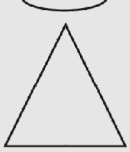
10.1 పరిచయం

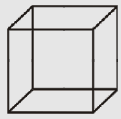
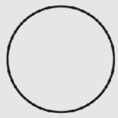
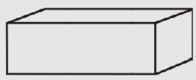
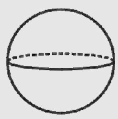
7వ తరగతిలో మీరు సమతల ఆకారాలు మరియు ఘనాకృతులు గురించి నేర్చుకున్నారు. సమతల ఆకారాలు పొడవు మరియు వెడల్పు అను రెండు కొలతలను కలిగి ఉంటాయి. కనుక వాటిని ద్విమితీయ ఆకారాలు అని అంటారు. అయితే ఘనాకృతి పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు లేదా లోతు అను మూడు కొలతల్ని కలిగి ఉంటుంది. కనుక వాటిని త్రిమితీయ ఆకృతులు అని అంటారు. ఘనాకార వస్తువు కొంత ప్రదేశాన్ని కూడా ఆక్రమిస్తుంది. ద్విమితీయ మరియు త్రిమితీయ పటాలను క్లుప్తంగా 2-D మరియు 3-D పటాలు అని పేర్కొనవచ్చు. త్రిభుజము, దీర్ఘచతురస్రము, వృత్తము మొదలగునవి 2-D పటాలు అని, అదేవిధంగా ఘనాలు, స్థూపాలు, శంఖువులు, గోళములు మొదలగునవి త్రిమితీయ వస్తువులు అని మీరు గుర్తుకుతెచ్చుకోండి.

ఇవి చేయండి

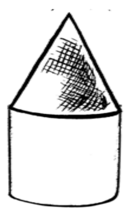


జతపరచండి. (మొదటిది మీకోసం చేయబడినది)

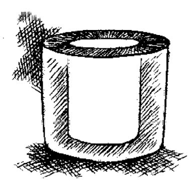
ఆకృతి	ఆకృతి రకము	ఆకృతి పేరు
	త్రిమితీయ	గోళము
	ద్విమితీయ	స్థూపం
	త్రిమితీయ	చతురస్రం
	ద్విమితీయ	వృత్తం

	3-dimensional	Cuboid
	3- dimensional	Cube
	2-dimensional	Cone
	3-dimensional	Triangle

Note that all the above shapes are single. However, in our practical life, many a times, we come across combinations of different shapes. For example, look at the following objects.

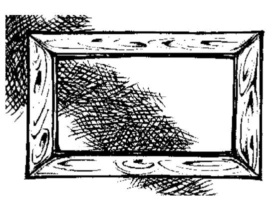


A tent
A cone surmounted on a cylinder



A tin
A cylinderical shell

Softy (ice-cream)
A cone surmounted by a hemisphere



A photoframe
A rectangular path

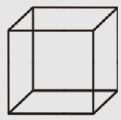
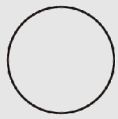
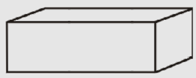
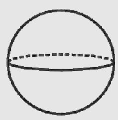
A bowl
A hemispherical shell

Tomb on a pillar
Cylinder surmounted by a hemisphere

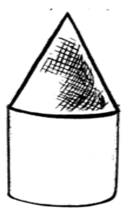
DO THIS

Match the following pictures (objects) with their shapes:

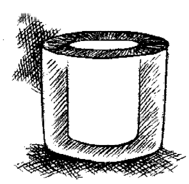
Picture (object)		Shape
(i) An agricultural field		Two rectangular cross paths inside a rectangular park.

	త్రిమితీయ	దీర్ఘఘనం
	త్రిమితీయ	సమఘనం
	ద్విమితీయ	శంఖువు
	త్రిమితీయ	త్రిభుజము

పైనగల ఆకృతులు అన్నీ దేనికవే విడి విడిగా కలవు అని గమనించండి. అయితే మన నిత్యజీవితంలో అనేకసార్లు విభిన్న ఆకృతుల కలయికలను చూస్తుంటాము. ఉదాహరణకు క్రింది వస్తువులను చూడండి.

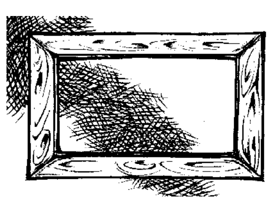


ఒక గుడారం
స్థూపముపై శంఖువు

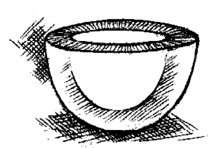


ఒక డబ్బా
గుల్ల స్థూపం

ఐస్‌క్రీమ్
శంఖువుపై అర్ధగోళం



ఫోటో ఫ్రేమ్
దీర్ఘ చతురస్రాకార బాట



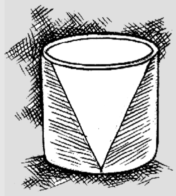
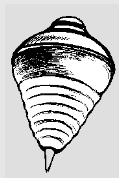
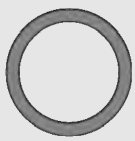
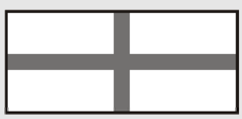
ఒక గిన్నె
గుల్ల అర్ధగోళం

స్థంభం పై గల సమాధి
స్థూపముపై అర్ధగోళం

ఇవి చేయండి

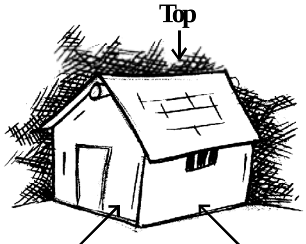
క్రింది ఇవ్వబడిన పటాలను (వస్తువులను) వాటి ఆకృతులతో జతపరచండి.

చిత్రం (వస్తువు)		ఆకృతి
(i) వ్యవసాయ భూమి		ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార ఉద్యానవనంలో ఖండించుకొను రెండు దీర్ఘచతురస్రాకార బాటలు

(ii)	A groove		A circular path around a circular ground.
(iii)	A toy		A triangular field adjoining a square field.
(iv)	A circular park		A cone taken out of a cylinder.
(v)	A cross path		A hemisphere surmounted on a cone.

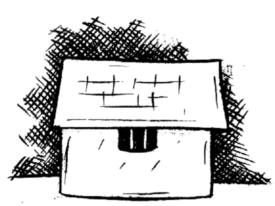
10.2 Views of 3D-Shapes

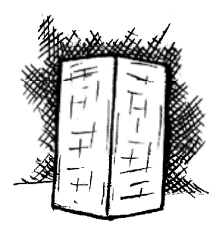
You have learnt that a 3-dimensional object can look differently from different positions so they can be drawn from different perspectives. For example, a given hut can have the following views.



A hut

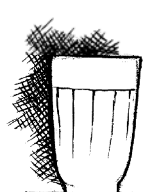

Front view

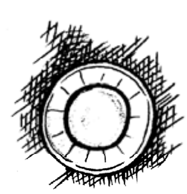

Side view


Top view

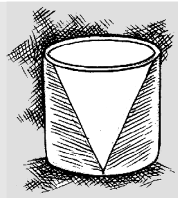
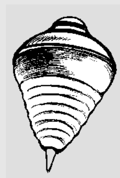
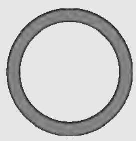
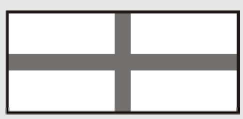
similarly, a glass can have the following views.


A glass


Side view

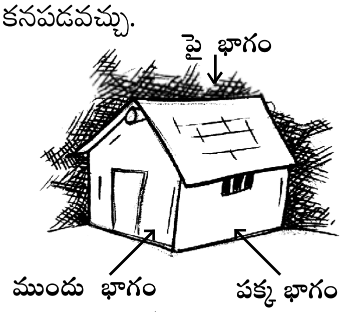

Top view

Why is the top view of the glass a pair of concentric circles? Will the side view appear different if taken from some other direction? Think about this! Now look at the different views of a brick.

(ii) గాడి		వృత్తాకార మైదానం చుట్టూ ఉన్న వృత్తాకార బాట
(iii) బొంగరం		చతురస్రాకార మైదానానికి అనుకుని ఉ త్రిభుజాకార మైదానం
(iv) వృత్తాకార పార్కు		స్థూపం నుండి బయటకు తీసిన శంఖువు
(v) ఖండించుకొను బాట		శంఖువుపై అర్ధగోళం

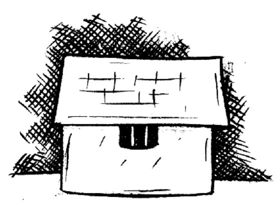
10.2 త్రిమితీయ ఆకృతుల అవలోకనం

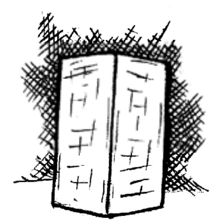
త్రిమితీయ వస్తువులను వేర్వేరు స్థానాల నుంచి చూసినప్పుడు అవి వేర్వేరుగా కనిపిస్తాయని మీరు నేర్చుకున్నారు. అందువలన అవి విభిన్న దృష్టికోణంలో చూసినప్పుడు కనబడు విధానంను చిత్రీకరించవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక పూరిల్లు క్రిందివిధంగా కనపడవచ్చు.



పూరిల్లు


ముందు నుండి చూసినప్పుడు

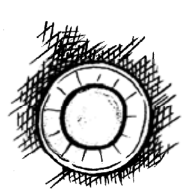

ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు


పై నుండి చూసినప్పుడు

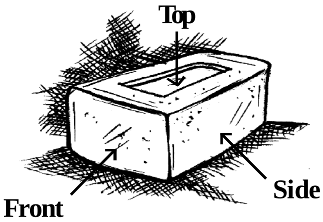
అదేవిధంగా, ఒక గ్లాసు క్రింది విధాలుగా కనబడవచ్చు.


ఒక గ్లాసు

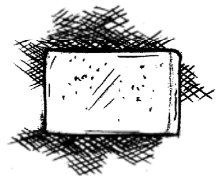

ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు

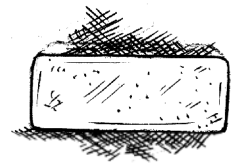

పై నుండి చూసినప్పుడు

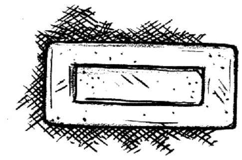
ఒక గ్లాసును పై నుండి చూస్తే ఒక జత ఏకకేంద్ర వృత్తాలుగా ఎందుకు కనిపిస్తుంది? ప్రక్క నుండి వేర్వేరు దిక్కులలో చూసినపుడు ఏమైనా విభిన్నంగా కనిపిస్తున్నాయా? దీని గురించి ఆలోచించండి! ఇప్పుడు ఒక ఇటుకను వేర్వేరు దిశలలో చూద్దాం.



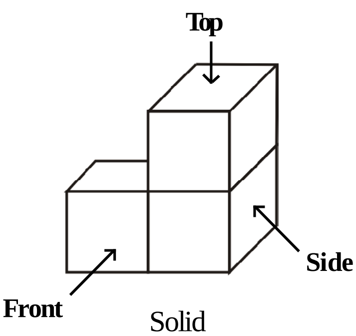
A brick


Front view

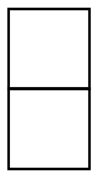

Side view

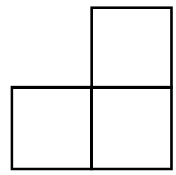

Top view

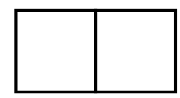
We can also get different views of figures made by joining cubes. For example.

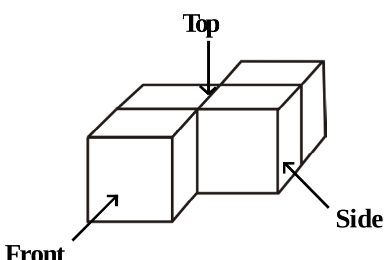


Solid
made of three cubes

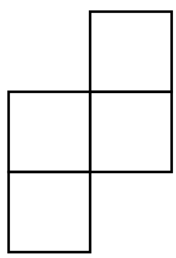

Side view

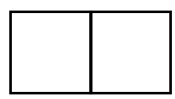

Front view

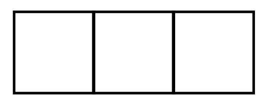

Top view

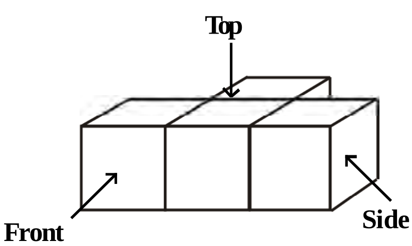


Solid
made of four cubes

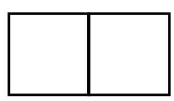

Top view

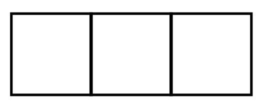

Front view

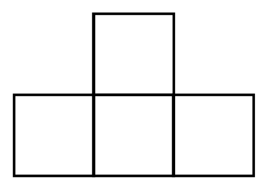

Side view



Solid
made of four cubes

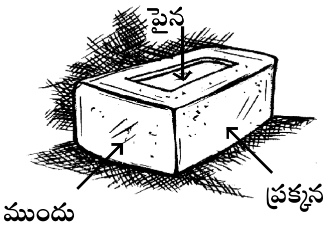

Side view


Front view

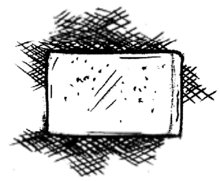

Top view

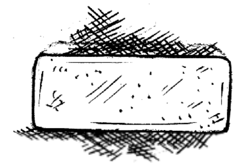
DO THIS

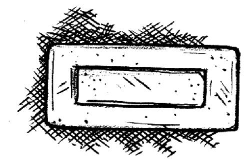
Observe different things around you from different positions. Discuss with your friends their various views.



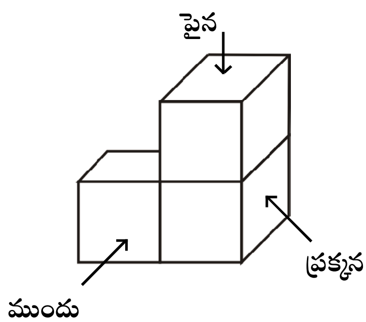
ఇటుక


ముందు నుండి చూసినప్పుడు

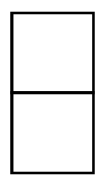

ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు

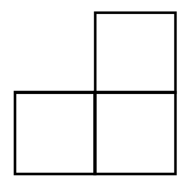

పై నుండి చూసినప్పుడు

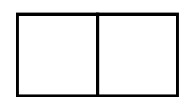
ఘనములను కలపడం ద్వారా మనం విభిన్న ఆకృతులను పొందవచ్చు. ఉదాహరణకు

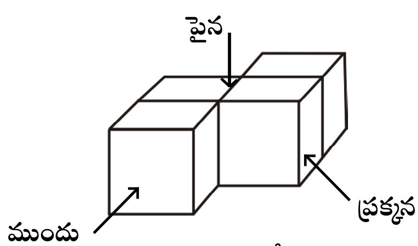


మూడు ఘనములతో ఏర్పడిన ఘనాకృతి

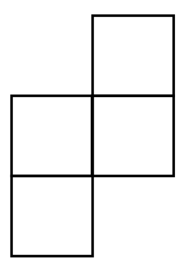

ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు

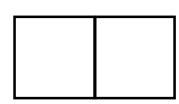

ముందు నుండి చూసినప్పుడు

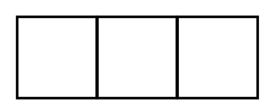

పై నుండి చూసినప్పుడు

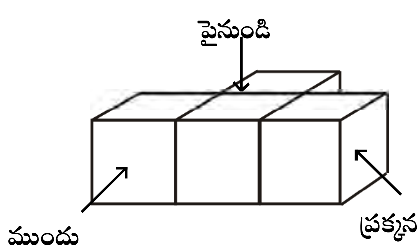


నాలుగు ఘనములతో ఏర్పడిన ఘనాకృతి

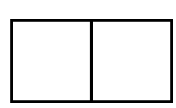

పై నుండి చూసినప్పుడు

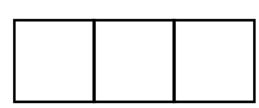

ముందు నుండి చూసినప్పుడు

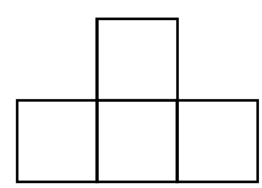

ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు



నాలుగు ఘనములతో ఏర్పడిన ఘనాకృతి


ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు


ముందు నుండి చూసినప్పుడు


పై నుండి చూసినప్పుడు

ఇవి చేయండి

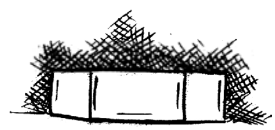
మీ చుట్టు ప్రక్కన గల వివిధ వస్తువులను వివిధ స్థానాల నుండి గమనించండి. అవి కనపడే విభిన్న ఆకారాల గురించి మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

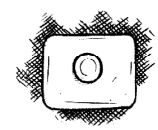
EXERCISE 10.1

1. For each of the given solid, the two views are given. Match for each solid the corresponding top and front views. The first one is done for you.

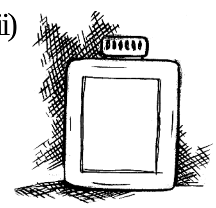
Object **Side view** **Top view**

(a) 
A bottle

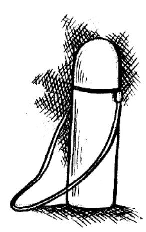
(i) 

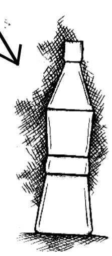
(i) 

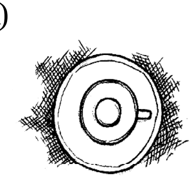
(b) 
A weight

(ii) 

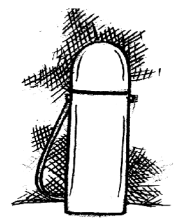
(ii) 

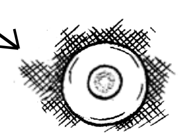
(c) 
A flask

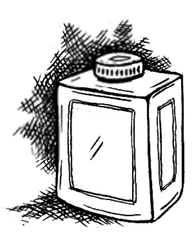
(iii) 

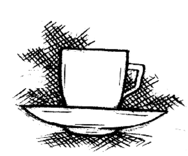
(iii) 

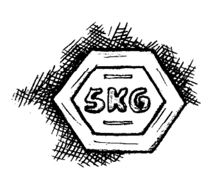
(d) 
Cup and Saucer

(iv) 

(iv) 

(e) 
Container

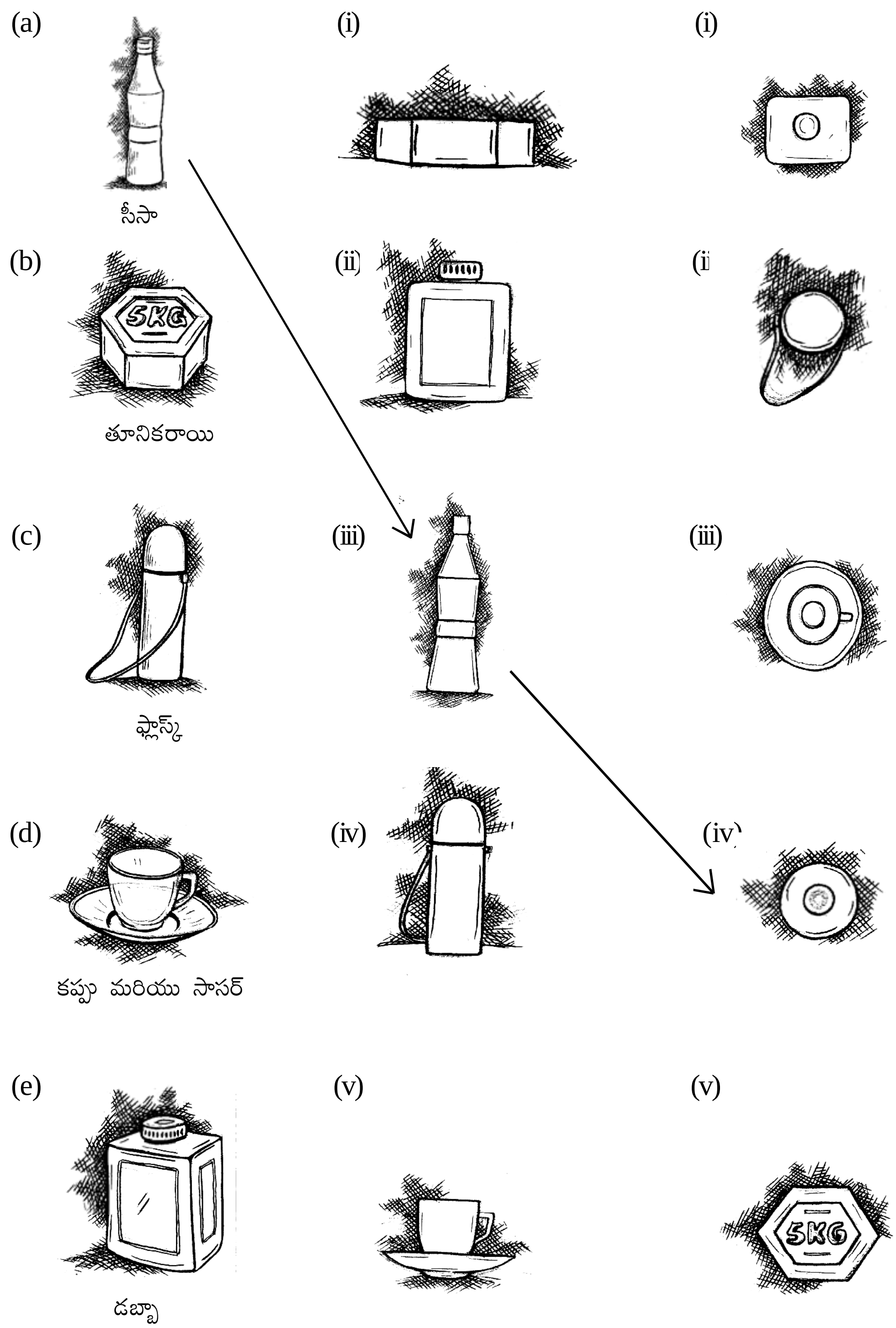
(v) 

(v) 

అభ్యాసం 10.1

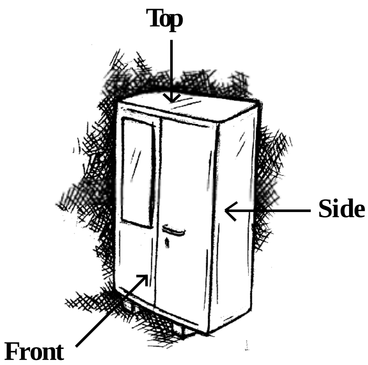
1. ఇచ్చిన ప్రతి ఘన వస్తువును పై నుండి, ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు కనబడు దృశ్యాలు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి వస్తువును దానిపై నుండి, ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు కనబడు దృశ్యాలతో జతపరచండి. మొదటిది మీ కొరకు చేయబడినది.

వస్తువు | **ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు** | **పై నుండి చూసినప్పుడు**

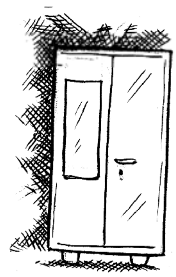


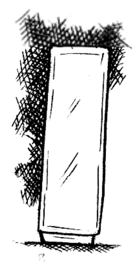
2. For each of the given solid, the three views are given. Identify for each solid the corresponding top, front and side views.

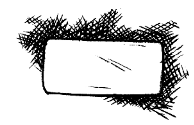
(a) **Object** (i) (ii) (iii)



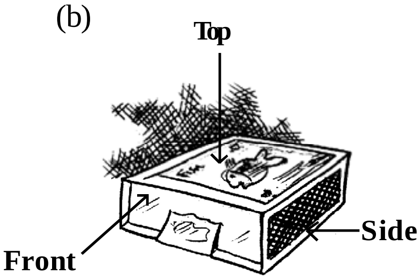
An almirah



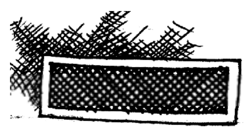


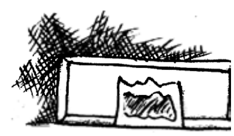


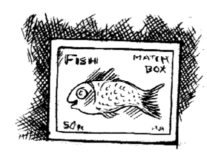
(b)



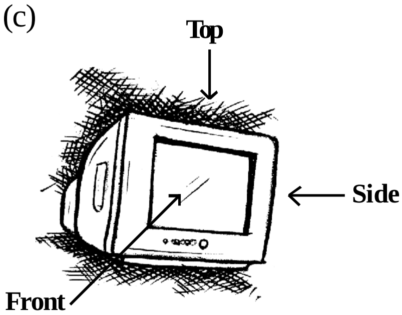
A Match box



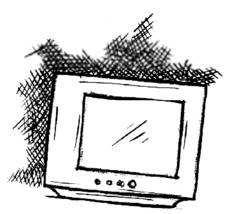


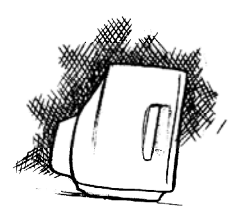


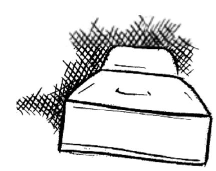
(c)



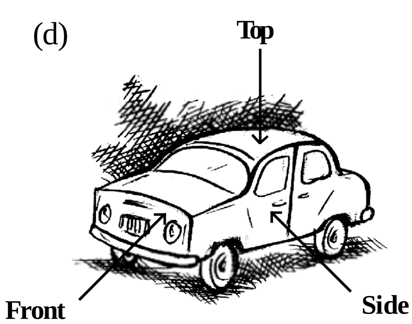
A Television



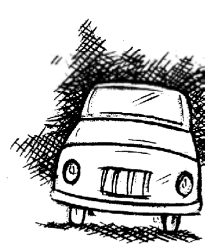


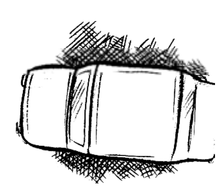


(d)



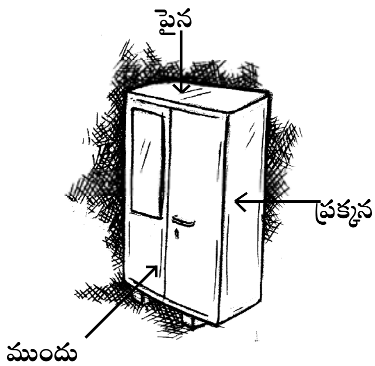
A car

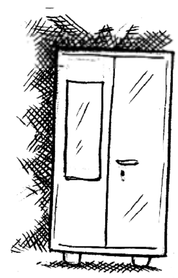


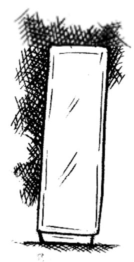


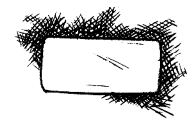
2. క్రింది ఇచ్చిన ఘనాకార వస్తువు యొక్క మూడు రకాల వీక్షణలు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి వస్తువును పై నుండి, ముందు నుండి మరియు ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు కనబడు దృశ్యాలను గుర్తించండి.

(a) **వస్తువు** (i) (ii) (iii)



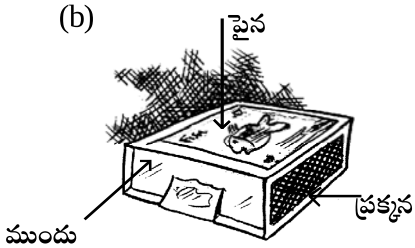


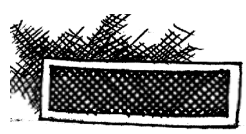


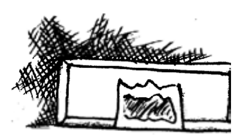


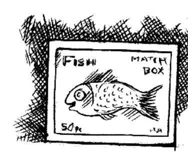
బీరువా

(b)



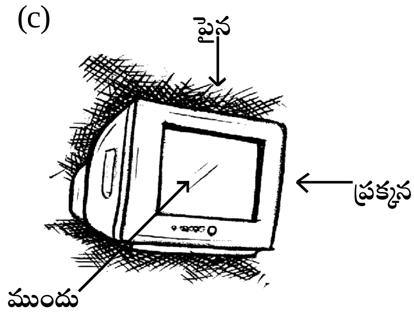


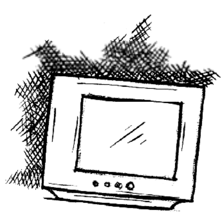


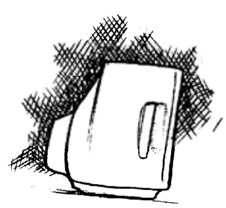


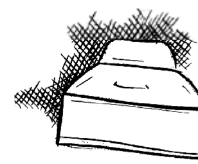
అగ్గిపెట్టె

(c)



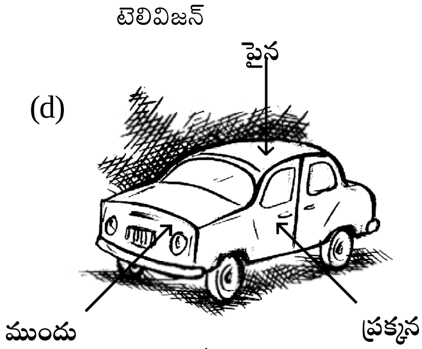


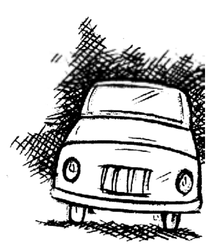


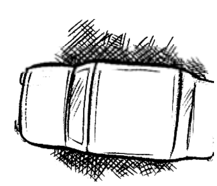


టెలివిజన్

(d)



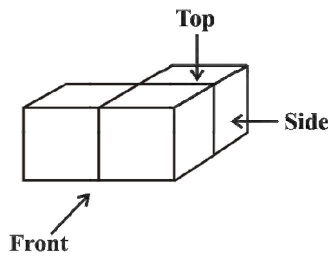


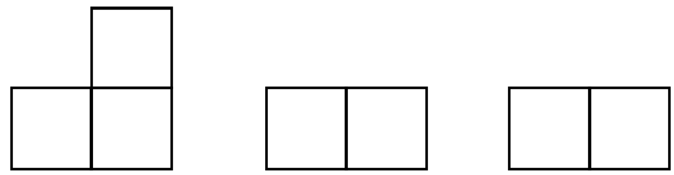


కారు

3. For each given solid, identify the top view, front view and side view.

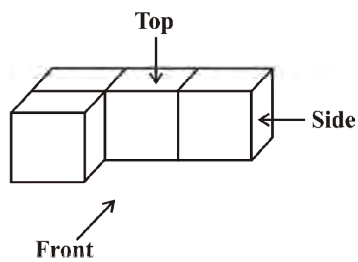
(a)

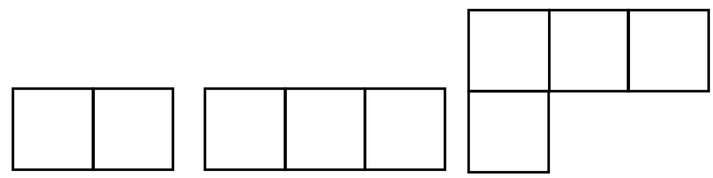




(i) (ii) (iii)

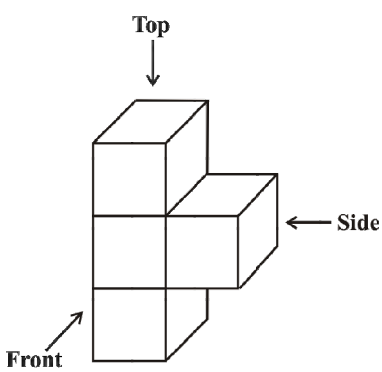
(b)

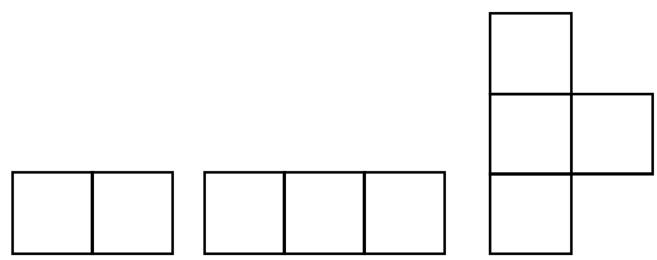




(i) (ii) (iii)

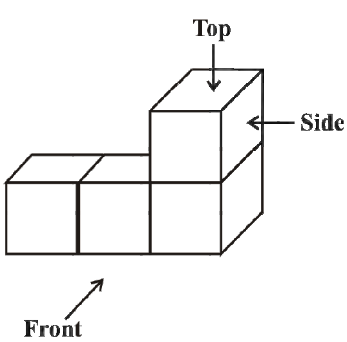
(c)

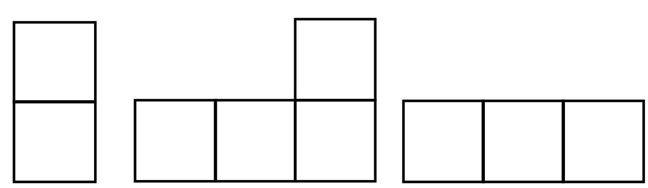




(i) (ii) (iii)

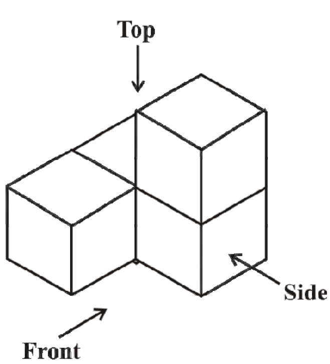
(d)

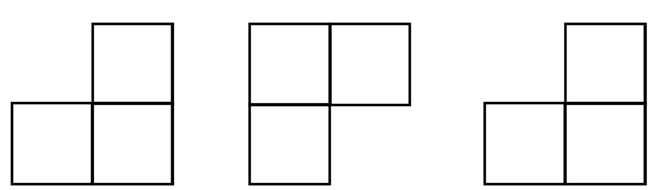




(i) (ii) (iii)

(e)

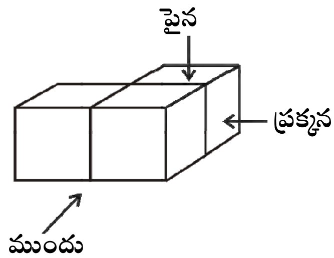


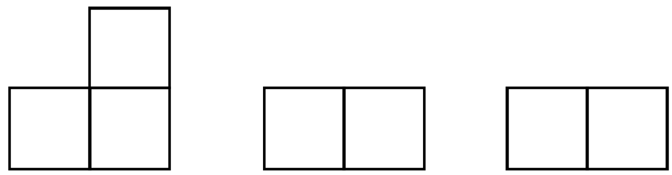


(i) (ii) (iii)

3. ఇవ్వబడిన ప్రతి ఘనాకార వస్తువును పై నుండి, ముందు నుండి మరియు ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు కనబడు దృశ్యాలను గుర్తించండి.

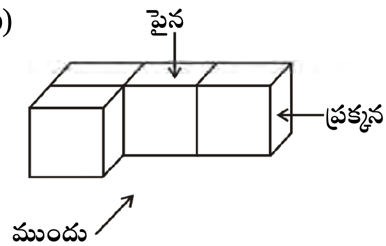
(a)

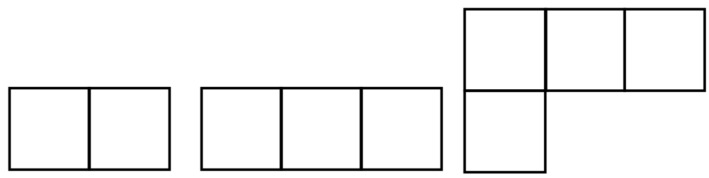




(i) (ii) (iii)

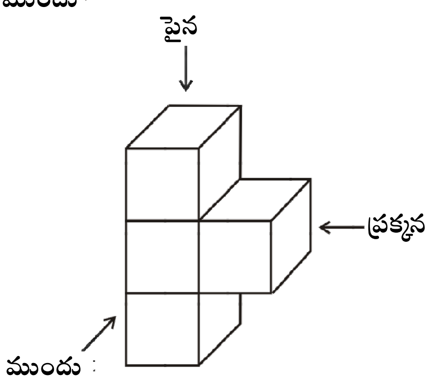
(b)

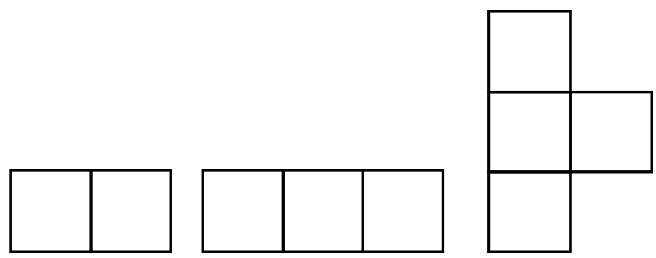




(i) (ii) (iii)

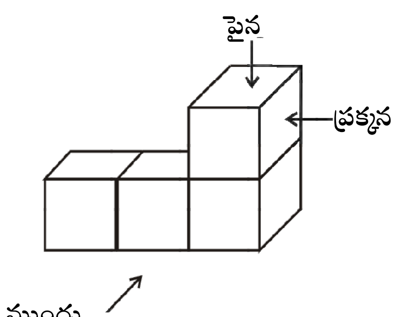
(c)

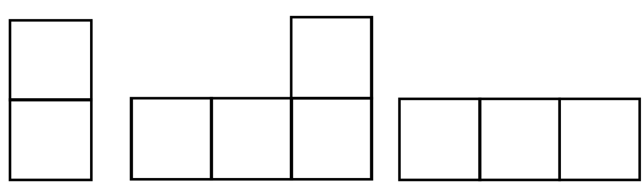




(i) (ii) (iii)

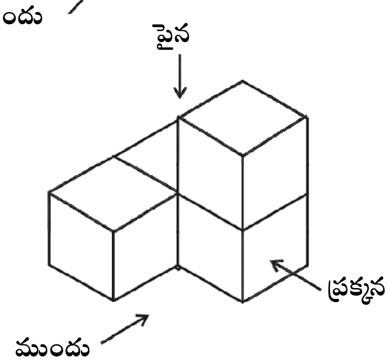
(d)

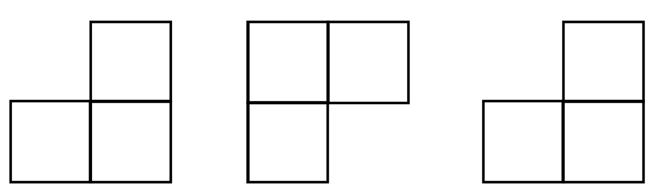




(i) (ii) (iii)

(e)

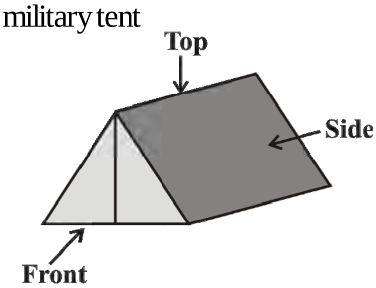




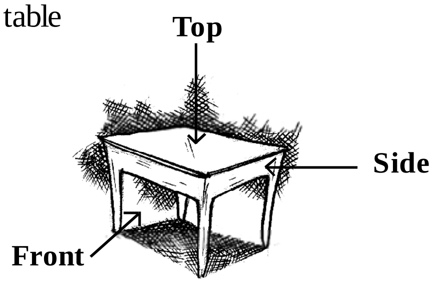
(i) (ii) (iii)

4. Draw the front view, side view and top view of the given objects.

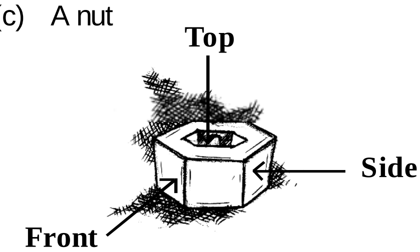
(a) A military tent



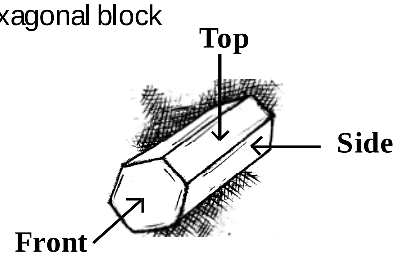
(b) A table



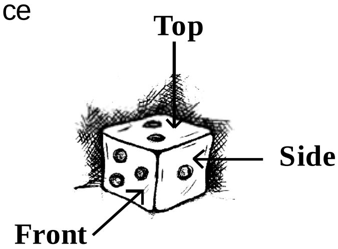
(c) A nut



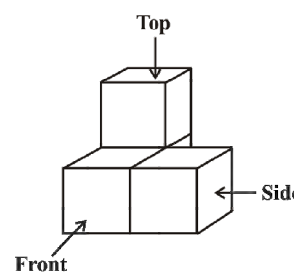
(d) A hexagonal block



(e) A dice



(f) A solid

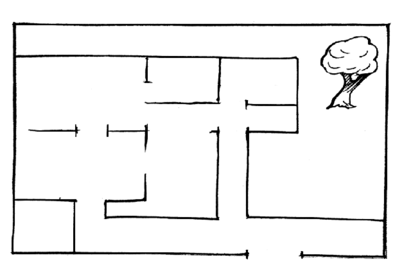


10.3 Mapping Space Around Us

You have been dealing with maps since you were in primary, classes. In Geography, you have been asked to locate a particular State, a particular river, a mountain etc., on a map. In History, you might have been asked to locate a particular place where some event had occured long back. You have traced routes of rivers, roads, railwaylines, traders and many others.

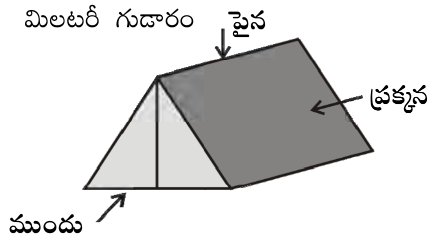
How do we read maps? What can we conclude and understand while reading a map? What information does a map have and what it does not have? Is it any different from a picture? In this section, we will try to find answers to some of these questions. Look at the map of a house whose picture is given alongside (Fig 10.1).

Fig 10.1

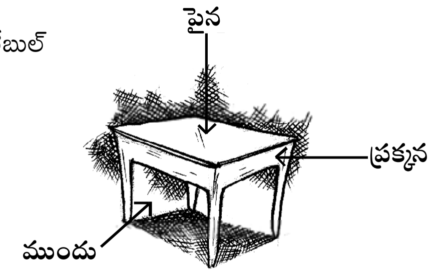


4. ఇవ్వబడిన ఘనాకార వస్తువును పై నుండి, ముందు నుండి మరియు ప్రక్క నుండి చూసినప్పుడు కనబడు దృశ్యాలను గీయండి.

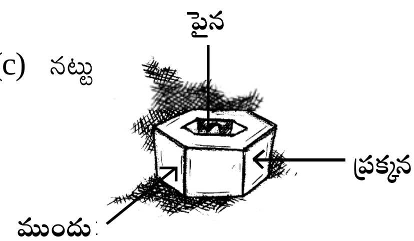
(a) మిలటరీ గుడారం



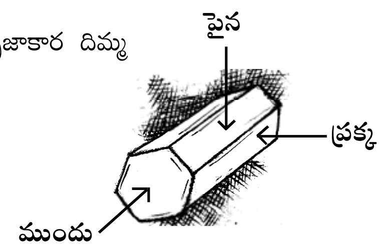
(b) టేబుల్



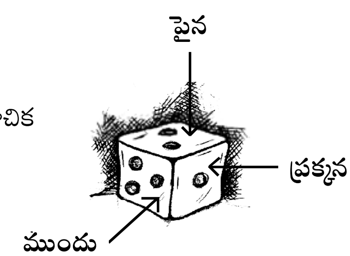
(c) నట్టు



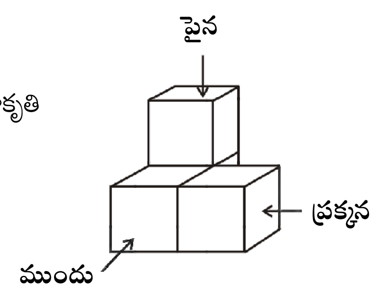
(d) షడ్భుజాకార దిమ్మ



(e) పాచిక



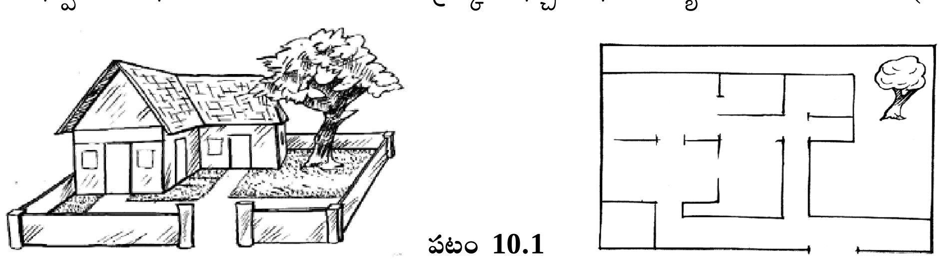
(f) ఘనాకృతి



10.3 మన చుట్టూ గల ప్రదేశాలను మ్యాపులలో చూపుట

మీరు ప్రాథమిక తరగతులలో ఉన్నప్పటి నుండే మ్యాప్‌లను గురించి నేర్చుకున్నారు. భూగోళశాస్త్రంలో నిర్దిష్ట రాష్ట్రాలు, నదులు, పర్వతాలు మొదలైన వాటిని మ్యాప్‌లలో గుర్తించమని మిమ్మల్ని అడిగేవారు. చరిత్రలో ఎప్పుడో జరిగిన సంఘటనలకు సంబంధించిన నిర్దిష్ట ప్రదేశాలను గుర్తించమని అడిగేవారు. నదులు, రహదారులు, రైలు మార్గాలు, వ్యాపార మార్గాలు మొదలగు దారులను మీరు గుర్తించేవారు.

మనం మ్యాపులను ఎలా చదవాలి? మ్యాపులను గుర్తించేటప్పుడు మనం ఏమి నిర్ధారించుకోవాలి మరియు ఏమి అవగాహన చేసుకోవాలి? మ్యాప్ ఏయే విషయాలను తెలుపుతుంది మరియు ఏయే విషయాలను తెలపదు? ఇది పటం కంటే ఏమైనా విభిన్నమైనదా? ఈ పాఠ్య విభాగంలో, ఇటువంటి కొన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలను తెలుసుకొనుటకు ప్రయత్నిద్దాం. క్రింది ఇవ్వబడిన ఇంటి పటం మరియు దాని ప్రక్కనే ఇచ్చిన ఇంటి మ్యాప్‌ను పరిశీలించండి (పటం 10.1).



పటం 10.1

What can we conclude from the above illustration? When we draw a picture, we attempt to represent reality as it is seen with all its details, whereas, a map depicts only the location of an object, in relation to other objects. Secondly, different persons can give descriptions of pictures completely different from one another, depending upon the position from which they are looking at the house. But, this is not true in the case of a map. The map of the house remains the same irrespective of the position of the observer. In other words, **perspective is very important for drawing a picture but it is not relevant for a map.**

Now, look at the map (Fig 10.2), which has been drawn by seven year old Raghav, as the route from his house to his school:

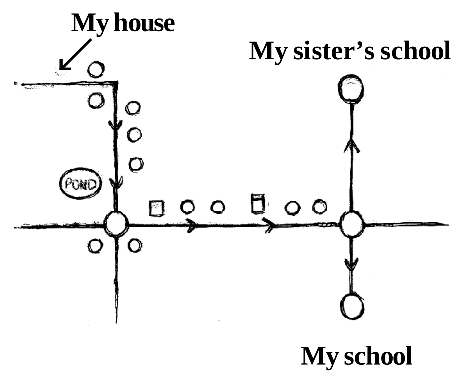


Fig 10.2

From this map, can you tell –

(i) how far is Raghav's school from his house?

(ii) would every circle in the map depict a round about?

(iii) whose school is nearer to the house, Raghav's or his sister's?

It is very difficult to answer the above questions on the basis of the given map. Can you tell why?

The reason is that we do not know if the distances have been drawn properly or whether the circles drawn are roundabouts or represent something else.

Now look at another map drawn by his sister, ten year old Meena, to show the route from her house to her school (Fig 10.3).

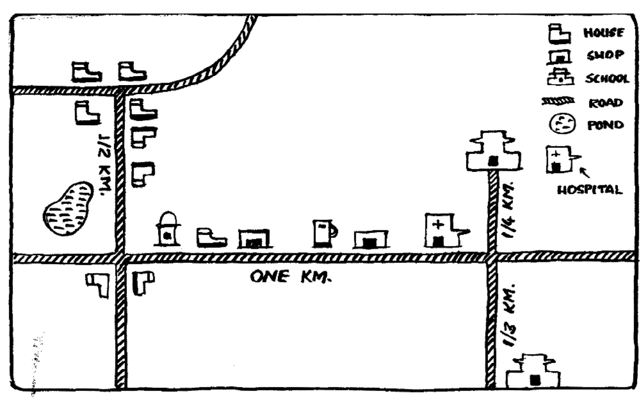


Fig 10.3

This map is different from the earlier maps. Here, Meena has used different symbols for different landmarks. Secondly, longer line segments have been drawn for longer distances and shorter line segments have been drawn for shorter distances, i.e., she has drawn the map to a scale.

Now, you can answer the following questions:

- How far is Raghav's school from his residence?
- Whose school is nearer to the house, Raghav's or Meena's?
- Which are the important landmarks on the route?

Thus we realise that, use of certain symbols and mentioning of distances has helped us read the map easily. Observe that the distances shown on the map are proportional to the actual distances on the ground. This is done by considering a proper scale. While drawing (or reading) a map, one must know, to what scale it has to be drawn (or has been drawn), i.e., how much of actual distance is denoted by 1mm or 1cm in the map. This means, that if one draws a map, he/she has to decide that 1cm of space in that map shows a certain fixed distance of say 1 km or 10 km. This scale can vary from map to map but not within a map. For instance, look at the map of India alongside the map of Delhi.

పై వివరణ నుండి మనం ఏమి నిర్ధారించవచ్చు? ఏదైనా ఒక పటం గీచేటప్పుడు, దాని యొక్క అన్ని వివరాలతో వాస్తవికంగా ఉండేటట్లు చూస్తాం. కానీ మ్యాపులలో మిగిలిన వస్తువుల దృష్ట్యా ఇవ్వబడిన వస్తువు స్థానాన్ని మాత్రమే గుర్తించబడుతుంది. రెండవది, ఒక ఇంటిని వేర్వేరు స్థానాల నుండి చూసే విధానాన్ని బట్టి వేర్వేరు వ్యక్తులు వివిధ రకాలుగా పటాలను విశదీకరిస్తారు. కానీ, ఇది మ్యాప్ విషయంలో సత్యం కాదు. పరిశీలకుడు యొక్క స్థానంతో సంబంధం లేకుండా ఒక ఇంటి యొక్క మ్యాప్ ఒకేవిధంగా ఉంటుంది. వేరే విధంగా చెప్పాలంటే, **ఒక పటాన్ని గీయాలి అంటే దాన్ని చూసే దృష్టికోణం చాలా ముఖ్యం. కానీ మ్యాప్‌కి అది వర్తించదు.**

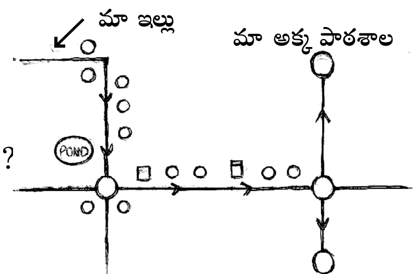
ఇప్పుడు, ఏడు సంవత్సరాల వయస్సు గల రాఘవ తన ఇంటి నుండి పాఠశాలకు వెళ్లే దారిని గీచిన మ్యాప్ (పటం 10.2) ను చూడండి. ఈ మ్యాప్‌ను చూసి, క్రింది వాటికి జవాబు చెప్పగలరా?

(i) రాఘవ పాఠశాల అతని ఇంటి నుండి ఎంత దూరంలో కలదు?

(ii) మ్యాప్‌లో గల ప్రతి వృత్తం ఒక కూడలి (సెంటర్) ని సూచిస్తుందా?

(iii) రాఘవ లేదా అతని అక్క పాఠశాలల్లో ఎవరి పాఠశాల ఇంటికి దగ్గరగా ఉంది?

ఇచ్చిన మ్యాప్ ఆధారంగా ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానం చెప్పడం చాలా కష్టం. ఎందుకో చెప్పగలరా?

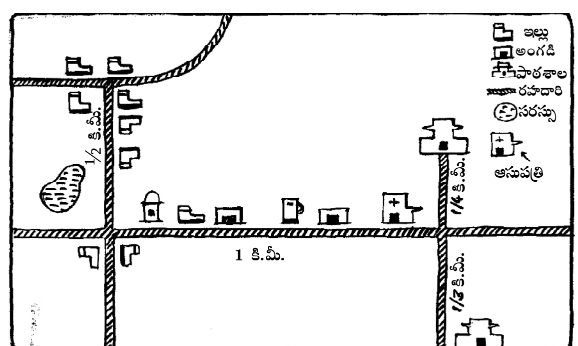


పటం 10.2

కారణం, ఇక్కడ ఆ దూరాలను సరిగా సూచించారో లేదో తెలియదు. అంతేకాకుండా మ్యాప్‌లో గల వృత్తాలు ట్రాఫిక్ సర్కిల్‌ను సూచిస్తాయో లేదా వేరే దేనినైనా సూచిస్తాయో అనేది మనకు తెలియదు.

ఇప్పుడు పది సంవత్సరాల వయస్సు గల రాఘవకు అక్క , మీనా తన ఇంటి నుండి పాఠశాలకు వెళ్ళే దారిని చూపడానికి గీచిన మరో మ్యాప్‌ను పరిశీలించండి (పటం10.3).

ఈ మ్యాప్ మునుపటి మ్యాప్ కంటే భిన్నమైనది. ఇక్కడ మీనా వేర్వేరు ప్రదేశాలకు వేర్వేరు సంకేతాలను ఉపయోగించినది. రెండవది ఎక్కువ దూరం సూచించడానికి పొడవైన రేఖలు మరియు తక్కువ దూరాన్ని సూచించడానికి పొట్టి రేఖలను గీచింది. అనగా ఆమె మ్యాప్‌ను కొలతలకు తగినట్లు గీచింది.



పటం 10.3

ఇప్పుడు, మీరు ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం చెప్పగలరు:

- రాఘవ పాఠశాల, అతని ఇంటి నుండి ఎంత దూరంలో కలదు?
- ఎవరి పాఠశాల ఇంటికి దగ్గరగా ఉన్నది? రాఘవదా లేక మీనాదా?
- దారిలో గల ముఖ్యమైన ప్రదేశాలు ఏవి?

కాబట్టి కొన్ని సంకేతాలు ఉపయోగించడం ద్వారా మరియు దూరాలను సూచించడం ద్వారా మ్యాప్‌ను సులభంగా చదవటానికి వీలవుతుంది. మ్యాప్‌లో సూచించిన దూరాలు, నిజ దూరాలకు అనుపాతంలో ఉన్నాయని గమనించండి. ఇది సరియైన స్కేల్‌ను ఎన్నుకొనుట వలన జరిగినది. ఒక మ్యాప్ గీయడానికి (చదవడానికి) ముందే అది ఏ స్కేల్ (కొలతల) ఆధారంగా గీయాలి (లేదా గీయబడినది) అనే విషయం మన అందరికి తెలియాలి. అనగా దీనిఅర్థం మ్యాప్‌పై ఒక మిల్లీమీటరు లేదా ఒక సెంటీమీటర్ దూరం, ఎంత నిజ దూరాన్ని సూచిస్తుందో మనకు తెలిసి ఉండాలి. మ్యాప్‌ను గీచేవారు అతను /ఆమె మ్యాప్‌పై ఒక సెంటీమీటర్ దూరం, స్థిరంగా ఒక కి.మీ. లేక 10 కి.మీ. నిజ దూరాన్ని సూచిస్తుందో అనేది ముందుగా నిర్ధారించుకోవాలి. ఈ స్కేల్ ఒక మ్యాప్ నుండి మరొక మ్యాప్‌కి భిన్నంగా ఉండవచ్చును. కానీ అదే మ్యాప్‌లో కాదు. ఉదాహరణకు, భారతదేశం మ్యాప్‌ను ఢిల్లీ మ్యాప్‌ను ప్రక్క ప్రక్కనే ఉంచి పరిశీలించండి.

You will find that when the maps are drawn of same size, scales and the distances in the two maps will vary. That is 1 cm of space in the map of Delhi will represent smaller distances as compared to the distances in the map of India.

The larger the place and smaller the size of the map drawn, the greater is the distance represented by 1 cm.

Thus, we can summarise that:

1. A map depicts the location of a particular object/place in relation to other objects/places.
2. Symbols are used to depict the different objects/places.
3. There is no reference or perspective in map, i.e., objects that are closer to the observer are shown to be of the same size as those that are farther away. For example, look at the following illustration (Fig 10.4).

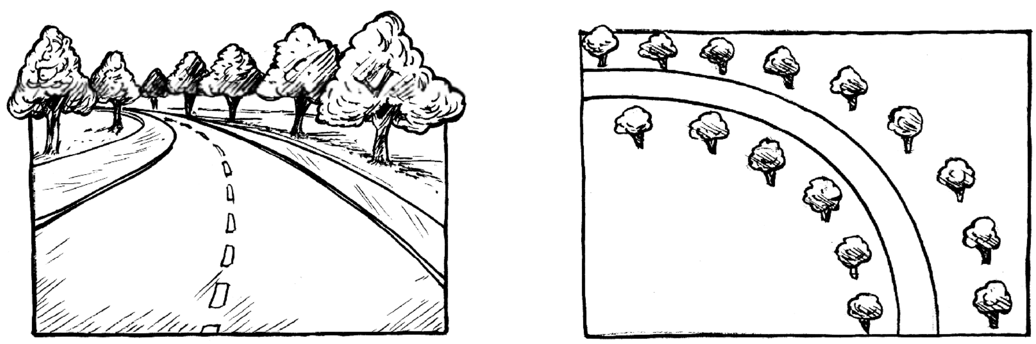


Fig 10.4

4. Maps use a scale which is fixed for a particular map. It reduces the real distances proportionately to distances on the paper.

DO THIS

1. Look at the following map of a city (Fig 10.5).

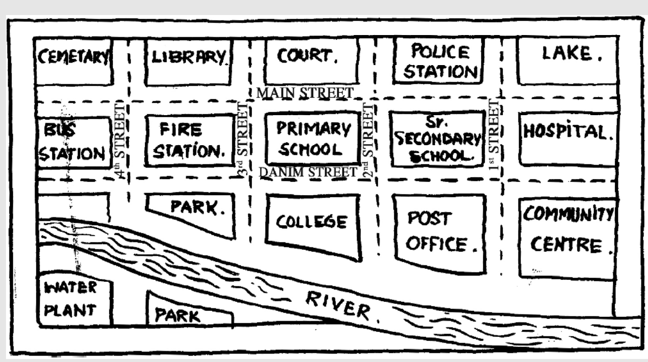


Fig 10.5

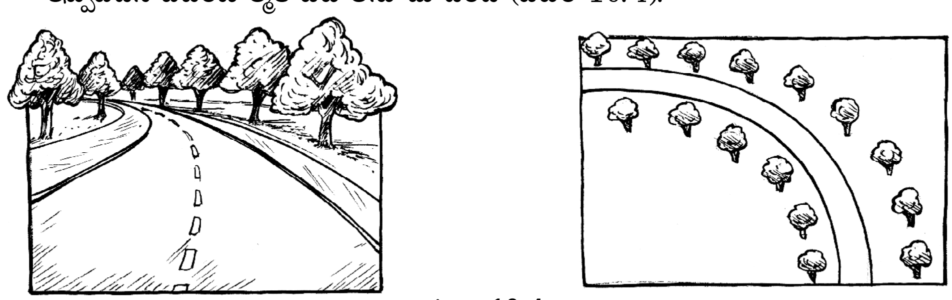
(a) Colour the map as follows: Blue-water, Red-fire station, Orange-Library, Yellow-schools, Green-Parks, Pink-Community Centre, Purple-Hospital, Brown-Cemetry.

రెండు పటాలలోను ఒకే పరిమాణం గల మ్యాప్‌లను గీచినప్పటికి, వాటి స్కేల్ మరియు దూరాలు వేర్వేరుగా ఉన్నట్లు మనం గమనించవచ్చు. అనగా ఢిల్లీ మ్యాప్‌లో ఒక సెం.మీ.దూరం, భారతదేశం మ్యాప్‌లో దూరంతో పోల్చితే తక్కువగా సూచిస్తుంది.

ఒక పెద్ద ప్రదేశమును, ఒక చిన్న పరిమాణం గల మ్యాప్‌గా గీసినచో మ్యాప్ లో 1 సెం.మీ. దూరం ఎక్కువ నిజ దూరాన్ని సూచిస్తుంది.

కనుక, దీని సారాంశం ఏమనగా:

1. ఇతర వస్తువులు/ప్రదేశాలకు అనుగుణంగా ఒక నిర్దిష్ట వస్తువు / ప్రదేశము ఎక్కడ ఉందో మ్యాప్ సూచిస్తుంది.
2. వివిధ వస్తువులు / ప్రదేశాలు గీయడానికి సంకేతాలను ఉపయోగిస్తారు.
3. ఒక మ్యాప్ ఎటువంటి నిర్ధేశం లేదా దృష్టి కోణం ఉండదు. అనగా మనకు దగ్గరలో గల వస్తువులు మరియు దూరంలో గల వస్తువులు రెండూ ఒకే ప్రమాణంలో ఉంటాయి. ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన వివరణాత్మక పటాలను చూడండి (పటం 10.4).

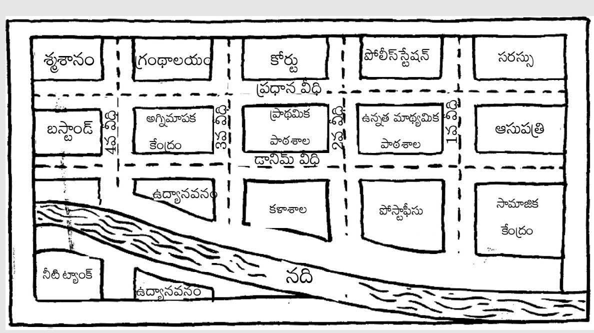


పటం 10.4

4. ఒక నిర్ధిష్ట మ్యాప్‌లో ఉపయోగించే స్కేల్ స్థిరంగా ఉంటుంది. ఇది నిజదూరాలను మ్యాప్‌లో గల దూరాలను అనుపాతంలో తగ్గిస్తుంది.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది పటంలో ఒక నగరం యొక్క మ్యాప్‌ను చూడండి (పటం10.5).



పటం 10.5

(a) క్రింది సూచించిన విధంగా మ్యాప్‌కు రంగులు వేయండి: నీలం–నీరు, ఎరుపు–అగ్నిమాపక కేంద్రం , ఆరెంజ్–గ్రంథాలయం, పసుపు–పాఠశాలలు, ఆకుపచ్చ–ఉద్యానవనాలు, గులాబీ–సామాజిక కేంద్రం, ఊదా–ఆసుపత్రి, గోధుమ–శ్మశానం.

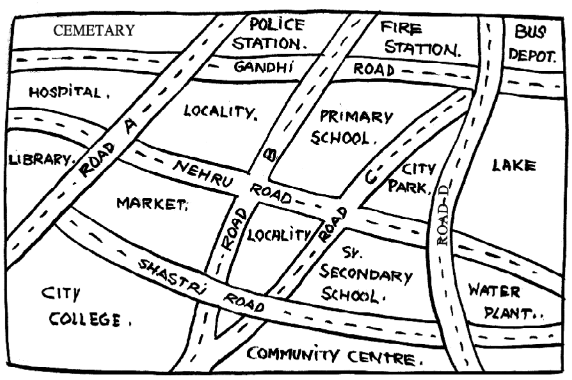
(b) Mark a Green 'X' at the intersection of 2nd street and Danim street. A Black 'Y' where the river meets the third street. A red 'Z' at the intersection of main street and 1st street.

(c) In magenta colour, draw a short street route from the college to the lake.

2. Draw a map of the route from your house to your school showing important landmarks.

EXERCISE 10.2

1. Look at the given map of a city.



Answer the following.

(a) Colour the map as follows: Blue-water, red-fire station, orange-library, yellow - schools, Green - park, Pink - College, Purple - Hospital, Brown - Cemetery.

(b) Mark a green 'X' at the intersection of Road 'C' and Nehru Road, Green 'Y' at the intersection of Gandhi Road and Road A.

(c) In red, draw a short street route from Library to the bus depot.

(d) Which is further east, the city park or the market?

(e) Which is further south, the primary school or the Sr. Secondary School?

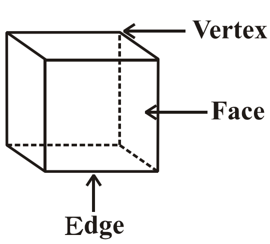
2. Draw a map of your class room using proper scale and symbols for different objects.

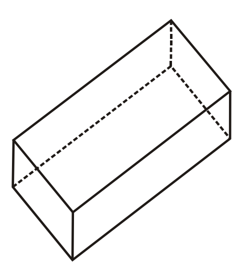
3. Draw a map of your school compound using proper scale and symbols for various features like play ground main building, garden etc.

4. Draw a map giving instructions to your friend so that she reaches your house without any difficulty.

10.4 Faces, Edges and Vertices

Look at the following solids!





Riddle
I have no vertices.
I have no flat faces. Who am I?

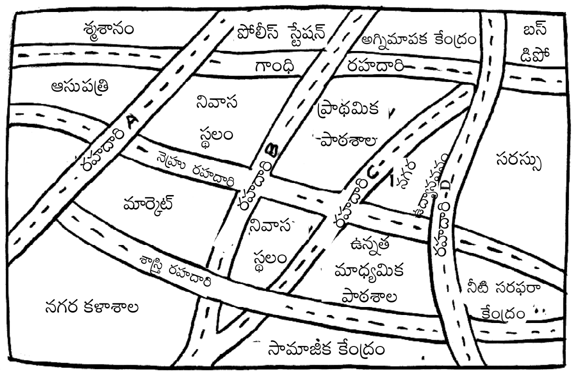
(b) రెండవ వీధి, డానిమ్ వీధి కలిసే చోట ఆకుపచ్చ రంగులో 'X'ను గుర్తించండి. నది, మూడవ వీధి కలిసే చోట నలుపు రంగులో 'Y'ను గుర్తించండి. మెయిన్‌రోడ్డు, ఒకటో వీధి కలిసే చోట ఎరుపు రంగులో 'Z'ను గుర్తించండి.

(c) కళాశాల నుండి సరస్సుకు వెళ్ళే అతి దగ్గరి దారిని ముదురు గులాబీ రంగులో గీయండి.

2. మీ ఇంటి నుండి పాఠశాలకు వెళ్లే దారిని మధ్యలో గల ప్రముఖ ప్రదేశాలన్నింటిని సూచిస్తూ మ్యాప్ గీయండి.

అభ్యాసం 10.2

1. ఇవ్వబడిన ఒక నగరం మ్యాప్‌ను చూడండి.



క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

(a) కింది సూచించిన విధంగా మ్యాప్‌కు రంగులు వేయండి: నీలం–నీరు, ఎరుపు–అగ్నిమాపక కేంద్రం ఆరెంజ్–గ్రంథాలయం, పసుపు–పాఠశాల, ఆకుపచ్చ–ఉద్యానవనం, గులాబీ–కళాశాల, ఊదా–ఆసుపత్రి, గోధుమ–శ్మశానం.

(b) రోడ్డు C, నెహ్రూ రోడ్డు కలిసేచోట ఆకుపచ్చ రంగులో X ను, గాంధీ రోడ్డు, రోడ్డు A కలిసేచోట ఆకుపచ్చ రంగు Yను గుర్తించండి.

(c) గ్రంథాలయం నుండి బస్‌డిపో కి వెళ్ళే దగ్గర దారిని ఎరుపు రంగులో గీయండి.

(d) నగర ఉద్యానవనం లేదా మార్కెట్‌లలో ఏది తూర్పు వైపుగా ఉన్నది?

(e) ప్రాథమిక పాఠశాల లేదా ఉన్నత మాధ్యమిక పాఠశాలలో ఏది దక్షిణం వైపుగా ఉన్నది?

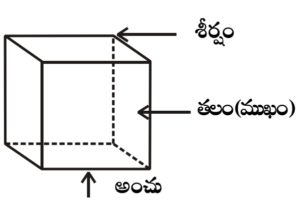
2. సరైన స్కేల్ మరియు విభిన్న వస్తువులకు విభిన్న సంకేతాలను ఉపయోగించి మీ తరగతి గది యొక్క మ్యాప్‌ను గీయండి.

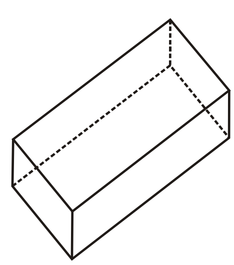
3. సరైన స్కేల్ ఉపయోగించి క్రీడామైదానం, ప్రధాన భవనం, ఉద్యానవనం వంటి మొదలగు వాటికి సరైన సంకేతాలు ఉపయోగించి మీ పాఠశాల ఆవరణం యొక్క మ్యాప్‌ను గీయండి.

4. మీ స్నేహితురాలు, మీ ఇంటికి సులభంగా చేరడానికి సహాయపడే విధంగా సూచనలు చేస్తూ ఒక మ్యాప్‌ను గీయండి.

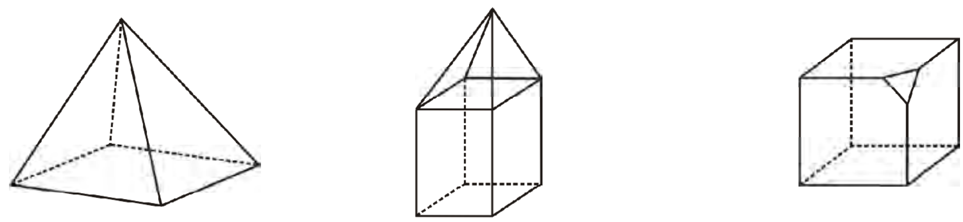
10.4 తలాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలు

క్రింది ఘనాకృతులను పరిశీలించండి!

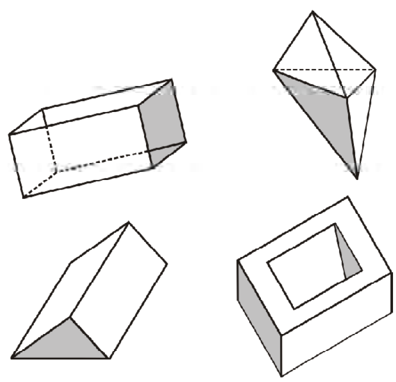




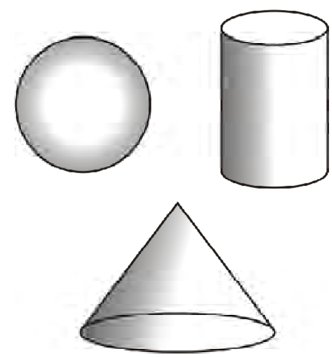
పొడుపు కథ
నాకు శీర్షాలు లేవు.
చదునైన ముఖాలు
లేవు. నేను ఎవరిని?



Each of these solids is made up of polygonal regions which are called its **faces**; these faces meet at **edges** which are line segments; and the edges meet at vertices which are **points**. Such solids are called **polyhedrons**.

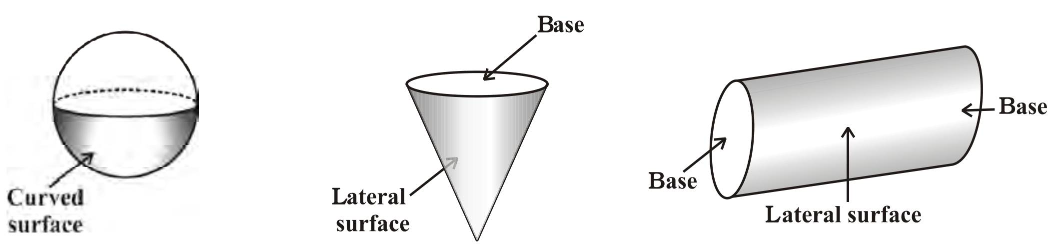


These are polyhedrons



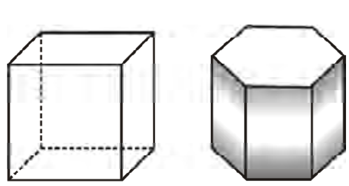
These are not polyhedrons

How are the polyhedrons different from the non-polyhedrons? Study the figures carefully. You know three other types of common solids.

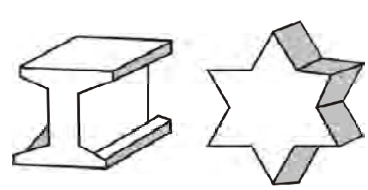


Sphere **Cone** **Cylinder**

Convex polyhedrons: You will recall the concept of convex polygons. The idea of convex polyhedron is similar.

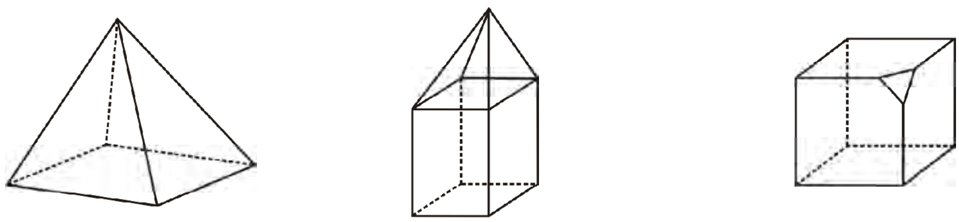


These are convex polyhedrons

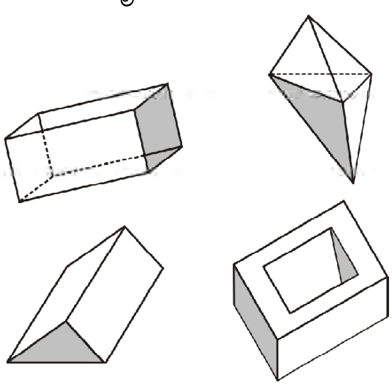


These are not convex polyhedrons

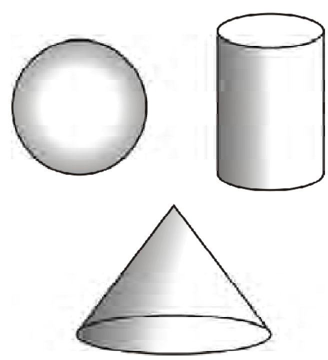
Regular polyhedrons: A polyhedron is said to be **regular** if its faces are made up of regular polygons and the same number of faces meet at **each** vertex.



ఈ ఘనాకృతులన్నీ బహుభుజాకార ప్రదేశాలతో అనగా **తలములతో** ఏర్పడినవి. ఈ తలములు **అంచులు** వద్ద కలుస్తున్నాయి. ఇవి రేఖాఖండాలను సూచిస్తాయి. మరియు ఈ అంచులు **బిందువులైన** శీర్షముల వద్ద కలుస్తున్నాయి. ఇటువంటి ఘనాకృతులను **బహుముఖ ఫలకములు** అని అంటారు.

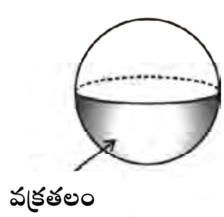


ఇవి బహుముఖ ఫలకములు

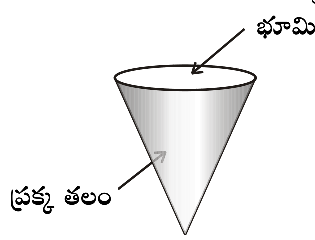


ఇవి బహుముఖ ఫలకములు కాదు

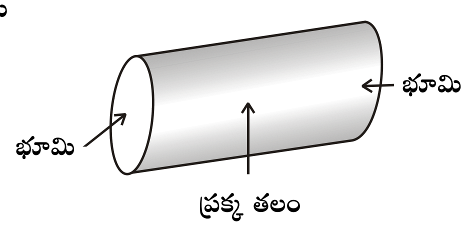
బహుముఖ ఫలకములు ఇతర ఘనాకార వస్తువులు కంటే ఏవిధంగా విభిన్నంగా ఉంటాయి? ఈ ఘనాకార వస్తువులను జాగ్రత్తగా గమనించండి. మీకు ఇంకో మూడు రకాలైన ఘనాకృతులు గురించి తెలుసు.



గోళం

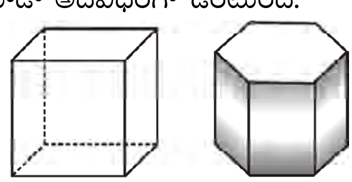


శంకువు

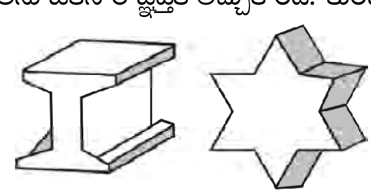


స్థూపం

కుంభాకార బహుముఖ ఫలకములు: కుంభాకార బహుభుజులను ఒకసారి జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. కుంభాకార బహుముఖ ఫలకముల భావన కూడా అదేవిధంగా ఉంటుంది.

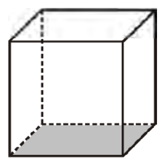


ఇవి కుంభాకార బహుముఖ ఫలకాలు

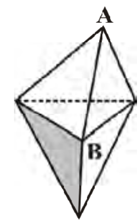


ఇవి కుంభాకార బహుముఖ ఫలకాలు కాదు

క్రమ బహుముఖ ఫలకములు: ఒక బహుముఖ ఫలకం యొక్క తలములన్నీ సర్వసమాన **క్రమ బహుభుజులై** మరియు **ప్రతి** శీర్షము వద్ద సమాన సంఖ్యలో తలములు కలిసినచో ఏర్పడు దానిని **క్రమ బహుముఖ ఫలకము** అని అంటారు.

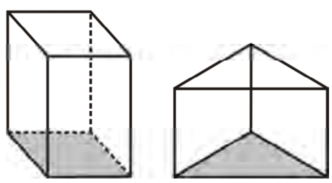


This polyhedron is regular.
Its faces are congruent, regular polygons. Vertices are formed by the same number of faces

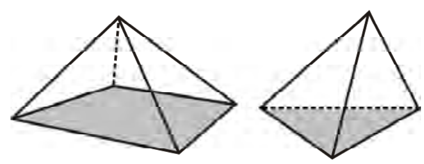


This polyhedon is not regular. All the sides are congruent; but the vertices are not formed by the same number of faces.
3 faces meet at A but
4 faces meet at B.

Two important members of polyhedron family around are prisms and pyramids.



These are prisms



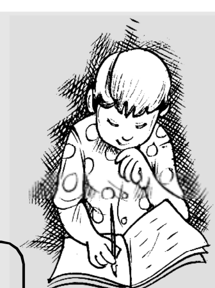
These are pyramids

We say that **a prism** is a polyhedron whose base and top are congruent polygons and whose other faces, i.e., lateral faces are parallelograms in shape.

On the other hand, **a pyramid** is a polyhedron whose base is a polygon (of any number of sides) and whose lateral faces are triangles with a common vertex. (If you join all the corners of a polygon to a point not in its plane, you get a model for pyramid).

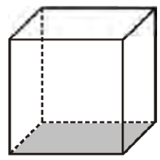
A prism or a pyramid is named after its base. Thus a hexagonal prism has a hexagon as its base; and a triangular pyramid has a triangle as its base. What, then, is a rectangular prism? What is a square pyramid? Clearly their bases are rectangle and square respectively.

DO THIS

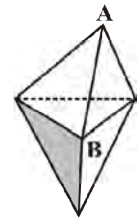


Tabulate the number of faces, edges and vertices for the following polyhedrons: (Here 'V' stands for number of vertices, 'F' stands for number of faces and 'E' stands for number of edges).

Solid	F	V	E	F+V	E+2
Cuboid					
Triangular pyramid					
Triangular prism					
Pyramid with square base					
Prism with square base					

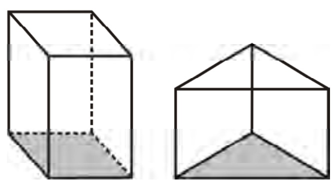


ఇది క్రమ బహుముఖ ఫలకం
దీని తలములన్నీ సర్వసమాన క్రమ బహుభుజులు.
శీర్షాలన్నీ సమాన సంఖ్యలలో గల తలాలచే
ఏర్పడినవి.

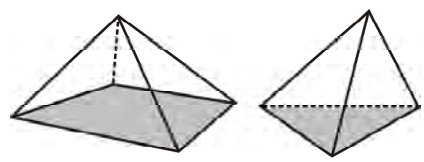


ఇది క్రమ బహుముఖ ఫలకం కాదు
దీని భుజాలన్నీ సర్వసమానాలు, కానీ శీర్షాలన్నీ సమాన
సంఖ్యలలో గల తలాలచే ఏర్పడలేదు. శీర్షం A వద్ద 3 తలాలు,
కానీ శీర్షం B వద్ద 4 తలాలు కలుస్తున్నాయి.

బహుముఖ ఫలకాల కుటుంబానికి చెందిన మన చుట్టూ ఉండే రెండు ముఖ్యమైన ఘనాకృతులు – పట్టకములు మరియు పిరమిడ్‌లు.



ఇవి పట్టకములు



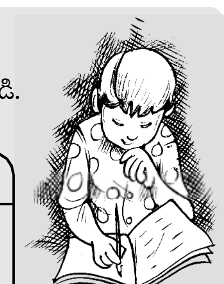
ఇవి పిరమిడ్‌లు

ఒక బహుముఖిలో భూమి మరియు పై కప్పులు సర్వ సమాన బహుభుజులు అయి మిగిలిన తలాలు అనగా ప్రక్క తలాలు సమాంతర చతుర్భుజములైన ఆ బహుముఖిని **పట్టకము** అంటారు.

ఒక బహుముఖి యొక్క భూమి ఒక బహుభుజి (ఎన్ని భుజాలు కల్గి ఉన్న)గాను, మిగిలిన ప్రక్క తలాలు ఉమ్మడి శీర్షం కలిగిన త్రిభుజాలుగా ఉంటే ఆ బహుముఖిని **పిరమిడ్** అంటారు. (ఒక బహుభుజి యొక్క అన్ని శీర్షాలను, ఆ తలంలో లేని ఏదైనా ఒక బిందువుకు కలిపితే పిరమిడ్ నమూనా వస్తుంది).

ఒక పట్టకము లేదా పిరమిడ్‌ను దాని భూమి ఆధారంగా పిలుస్తారు. షడ్భుజాకార పట్టకం యొక్క భూమి షడ్భుజి గాను మరియు త్రిభుజాకార పిరమిడ్ యొక్క భూమి త్రిభుజముగాను ఉంటుంది. అలాగైతే దీర్ఘచతురస్రాకార పట్టకం ఎలా ఉంటుంది? చతురస్రాకార పిరమిడ్ అనగానేమి? వాటి భూములు వరుసగా దీర్ఘచతురస్రం మరియు చతురస్రాలని స్పష్టంగా తెలుస్తుంది.

ఇవి చేయండి



క్రింది ఇచ్చిన బహుముఖి యొక్క తలముల, అంచుల మరియు శీర్షాల సంఖ్యను పట్టికలో నింపండి. (ఇక్కడ 'V' అంటే శీర్షాల సంఖ్య, 'F' అంటే తలాల సంఖ్య మరియు 'E' అంటే అంచుల సంఖ్య)

ఘనాకృతి	F	V	E	F+V	E+2
దీర్ఘఘనం					
త్రిభుజాకార పిరమిడ్					
త్రిభుజాకార పట్టకం					
చతురస్రం భూమిగా గల పిరమిడ్					
చతురస్రం భూమిగా గల పట్టకం					

What do you infer from the last two columns? In each case, do you find $F + V = E + 2$, i.e., $F + V - E = 2$? This relationship is called **Euler's formula.** In fact this formula is true for any polyhedron.

THINK, DISCUSS AND WRITE

What happens to F, V and E if some parts are sliced off from a solid? (To start with, you may take a plasticine cube, cut a corner off and investigate).

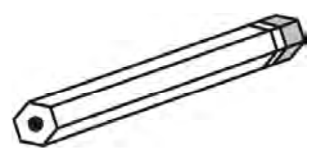
EXERCISE 10.3

1. Can a polyhedron have for its faces
   (i) 3 triangles? (ii) 4 triangles?
   (iii) a square and four triangles?
2. Is it possible to have a polyhedron with any given number of faces? (**Hint:** Think of a pyramid).
3. Which are prisms among the following?

(i)

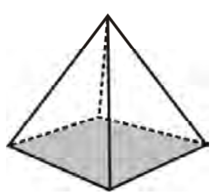
A nail

(ii)



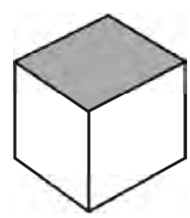
Unsharpened pencil

(iii)



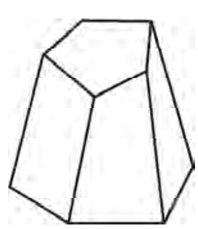
A table weight

(iv)

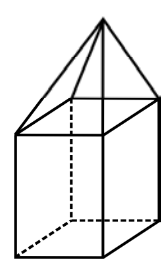


A box

4. (i) How are prisms and cylinders alike?
   (ii) How are pyramids and cones alike?
5. Is a square prism same as a cube? Explain.
6. Verify Euler's formula for these solids.



(i)



(ii)

చివరి రెండు నిలువ వరుసల నుండి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ప్రతి సందర్భంలో $F + V = E + 2$, అనగా $F + V - E = 2$ అని కనుగొన్నారా? ఈ సంబంధాన్ని **ఆయిలర్ సూత్రం** అని అంటారు. నిజానికి ఇది ఏ బహుముఖ ఫలకములకైనా సత్యం అవుతుంది.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఘనాకార వస్తువు నుండి కొన్ని భాగాలను కత్తిరిస్తే F, V మరియు Eలకు ఏమవుతుంది? (ఇది చేయుటకు, ఒక ప్లాస్టిసీన్ ఘనమును తీసుకుని, ఒక మూలన కత్తిరించి పరిశీలించండి)

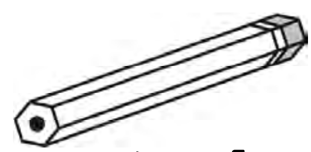
అభ్యాసం 10.3

1. (i) 3 త్రిభుజాలు (ii) 4 త్రిభుజాలు
   (iii) ఒక చతురస్రం మరియు 4 త్రిభుజాలు? తలాలు కలిగిన బహుముఖి ఉంటుందా?
2. ఇచ్చిన ఒక బహుముఖ ఫలకము ఎన్ని తలములనైనా కలిగి ఉండుట సాధ్యమా?
   (**సూచన:** పిరమిడ్ గురించి ఆలోచించండి).
3. ఈ క్రింది వానిలో ఏవి పట్టకములు?

(i)

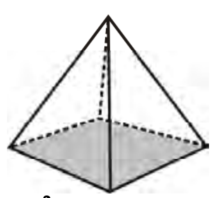
మేకు

(ii)



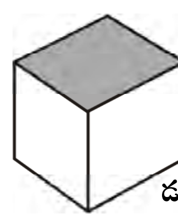
చెక్కని పెన్సిల్

(iii)



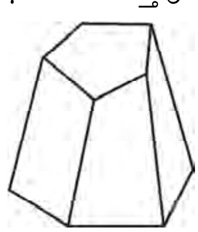
పేపర్ వెయిట్

(iv)

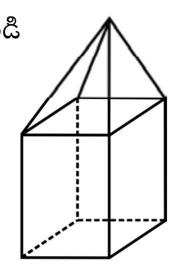


డబ్బా

4. (i) పట్టకములు మరియు స్థూపాలు ఏ విధంగా ఒకేలా ఉంటాయి?
   (ii) పిరమిడ్లు మరియు శంఖువులు ఏ విధంగా ఒకేలా ఉంటాయి?
5. చతురస్రాకార పట్టకము మరియు సమఘనం రెండూ ఒకటేనా? వివరించండి.
6. క్రింది ఘనాకార వస్తువులకు ఆయిలర్ సూత్రాన్ని సరిచూడండి



(i)



(ii)

7. Using Euler's formula find the unknown.

Faces	?	5	20
Vertices	6	?	12
Edges	12	9	?

8. Can a polyhedron have 10 faces, 20 edges and 15 vertices?

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Recognising 2D and 3D objects.
2. Recognising different shapes in nested objects.
3. 3D objects have different views from different positions.
4. A map is different from a picture.
5. A map depicts the location of a particular object/place in relation to other objects/places.
6. Symbols are used to depict the different objects/places.
7. There is no reference or perspective in a map.
8. Maps involve a scale which is fixed for a particular map.
9. For any polyhedron,

$$F + V - E = 2$$

where 'F' stands for number of faces, V stands for number of vertices and E stands for number of edges. This relationship is called **Euler's formula**.

7. ఆయిలర్ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి పట్టికలో తెలియని వాటిని కనుగొనండి.

తలాలు	?	5	20
శీర్షాలు	6	?	12
అంచులు	12	9	?

8. ఏదైనా బహుముఖఫలకం 10 తలాలు, 20 అంచులు మరియు 15 శీర్షాలు కలిగి ఉంటుందా?

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. 2D మరియు 3D వస్తువులను గుర్తించడం.
2. అనేక ఆకారాలను కలిగిన వస్తువులలో గల వివిధ ఆకారాలను గుర్తించడం.
3. 3D వస్తువులను వేర్వేరు స్థానాల నుండి చూస్తే, వేర్వేరు విధాలుగా కనబడుతాయి.
4. మ్యాప్ అనేది ఒక పటం కంటే విభిన్నమైనది.
5. ఇతర వస్తువులను / ప్రదేశాలకు అనుగుణంగా ఒక నిర్దిష్ట వస్తువు / ప్రదేశం ఎక్కడ ఉందో అని మ్యాప్ తెలుపుతుంది.
6. వివిధ వస్తువులు / ప్రదేశాలను సూచించుటకు సంకేతాలను ఉపయోగిస్తారు.
7. ఒక మ్యాప్‌నకు ఎటువంటి నిర్దేశం లేదా దృక్కోణం ఉండదు.
8. ఒక నిర్ధిష్టమైన మ్యాప్‌కు స్కేల్ స్థిరంగా ఉంటుంది.
9. ఏదైనా ఒక బహుముఖ ఫలకమునకు,

$$F + V - E = 2$$

ఇక్కడ తలాల సంఖ్య F, శీర్షాల సంఖ్య V మరియు అంచుల సంఖ్య E.

ఈ సంబంధాన్ని **ఆయిలర్ సూత్రం** అంటారు.

Mensuration

CHAPTER 11

0852CH11

11.1 Introduction

We have learnt that for a closed plane figure, the perimeter is the distance around its boundary and its area is the region covered by it. We found the area and perimeter of various plane figures such as triangles, rectangles, circles etc. We have also learnt to find the area of pathways or borders in rectangular shapes.

In this chapter, we will try to solve problems related to perimeter and area of other plane closed figures like quadrilaterals.

We will also learn about surface area and volume of solids such as cube, cuboid and cylinder.

11.2 Let us Recall

Let us take an example to review our previous knowledge.

This is a figure of a rectangular park (Fig 11.1) whose length is 30 m and width is 20 m.

(i) What is the total length of the fence surrounding it? To find the length of the fence we need to find the perimeter of this park, which is 100 m. (Check it)

(ii) How much land is occupied by the park? To find the land occupied by this park we need to find the area of this park which is 600 square meters (m^2) (How?).

(iii) There is a path of one metre width running inside along the perimeter of the park that has to be cemented. If 1 bag of cement is required to cement 4 m^2 area, how many bags of cement would be required to construct the cemented path?

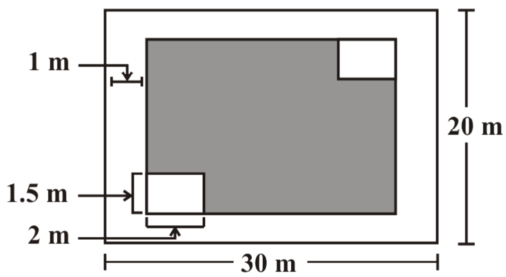


Fig 11.1

We can say that the number of cement bags used = $\dfrac{\text{area of the path}}{\text{area cemented by 1 bag}}$.

Area of cemented path = Area of park – Area of park not cemented.

Path is 1 m wide, so the rectangular area not cemented is $(30 - 2) \times (20 - 2)$ m^2.

That is 28×18 m^2.

Hence number of cement bags used = ------------------

(iv) There are two rectangular flower beds of size 1.5 m × 2 m each in the park as shown in the diagram (Fig 11.1) and the rest has grass on it. Find the area covered by grass.

క్షేత్రమితి

అధ్యాయం 11

U5S9Z3

11.1 పరిచయం

ఒక సంవృత సమతల పటము యొక్క చుట్టూ ఉన్న దూరాన్ని ఆ పటము యొక్క చుట్టుకొలత అని, ఆ పటము ఆక్రమించిన సమతల ప్రదేశాన్ని వైశాల్యం అని మనం నేర్చుకున్నాం. త్రిభుజము, దీర్ఘ చతురస్రము, వృత్తము మొదలైన సమతల పటముల వైశాల్యం మరియు చుట్టుకొలత కనుగొన్నాము. దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో గల బాట వైశాల్యం, అంచుల వైశాల్యం కనుగొనుట నేర్చుకున్నాము.

ఈ అధ్యాయంలో చతుర్భుజాల వంటి ఇతర సంవృత పటముల చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాలకు సంబంధించిన సమస్యలు సాధించుట నేర్చుకుందాం.

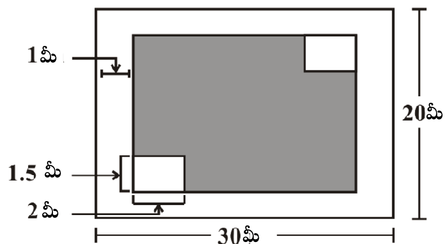
సమఘనం, దీర్ఘఘనం మరియు స్థూపం మొదలగు ఘనాకారముల ఉపరితల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణాలకు సంబంధించిన సమస్యలు సాధించుట కూడా మనం నేర్చుకుందాం.

11.2 జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం

పూర్వ జ్ఞానాన్ని గుర్తు చేసుకొనుటకు ఒక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం. ఇది పొడవు 30మీ, వెడల్పు 20మీ.గా గల దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు పటం (పటం 11.1).

(i) పార్కు చుట్టూ వేసిన కంచె మొత్తం పొడవు ఎంత? కంచె పొడవు కనుగొనుటకు పార్కు యొక్క చుట్టుకొలత కనుగొనవలెను. ఆ చుట్టుకొలత 100మీ (సరిచూడండి).

(ii) పార్కు ఆక్రమించిన నేల ఎంత? పార్కు ఆక్రమించిన నేలను కనుగొనుటకు మనం ఆ పార్కు వైశాల్యం కనుగొనవలెను. ఆ వైశాల్యం 600చదరపు మీటర్లు (మీ^{2}) (ఎలా?).



పటం 11.1

(iii) పార్కు లోపల అంచు వెంబడి 1మీ. వెడల్పు గల బాట ఉంది. బాటను సిమెంటు చేయుటకు 4 చ.మీ.కు ఒక సిమెంటు బస్తా అవసరం అయినచో, బాట మొత్తం సిమెంటు చేయుటకు ఎన్ని బస్తాల సిమెంటు అవసరం?

అవసరమగు సిమెంటు బస్తాల సంఖ్య $= \dfrac{\text{మొత్తం బాట వైశాల్యం}}{\text{ఒక బస్తాతో సిమెంటు చేయగల బాట వైశాల్యం}}$ అని చెప్పగలము.

సిమెంట్ చేయబడిన బాట వైశాల్యం = పార్కు వైశాల్యం – సిమెంటు చేయని పార్కు వైశాల్యం.

బాట వెడల్పు 1మీ. కావున, సిమెంటు చేయని పార్కు వైశాల్యం $(30-2)\times(20-2)$ మీ^{2}

అనగా 28×18 మీ^{2},

కావున వాడిన సిమెంట్ బస్తాల సంఖ్య = ...

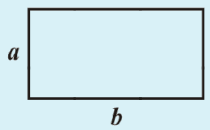
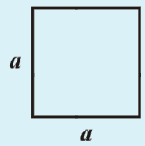
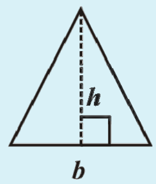
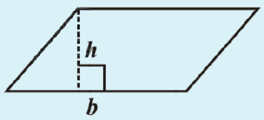
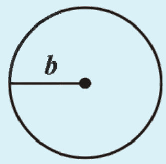
(iv) పటం 11.1 లో చూపినట్లు పార్కులో 1.5మీ × 2మీ. కొలతలు గల రెండు దీర్ఘ చతురస్రాకార పూలతోటలు కలవు. మిగిలిన పార్కు అంతటా గడ్డితో కప్పబడి ఉంది. గడ్డితో కప్పబడిన ప్రాంత వైశాల్యం కనుగొనండి.

Area of rectangular beds = ------------------

Area of park left after cementing the path = ------------------

Area covered by the grass = ------------------

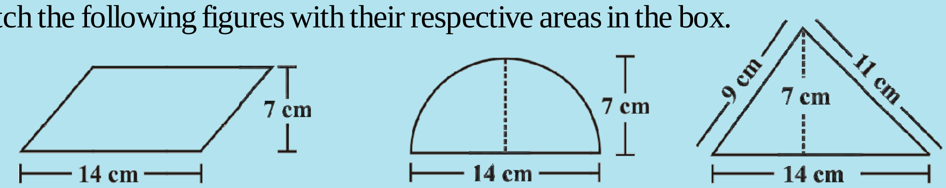
We can find areas of geometrical shapes other than rectangles also if certain measurements are given to us . Try to recall and match the following:

Diagram	Shape	Area
	rectangle	$a \times a$
	square	$b \times h$
	triangle	πb^2
	parallelogram	$\frac{1}{2} b \times h$
	circle	$a \times b$

Can you write an expression for the perimeter of each of the above shapes?

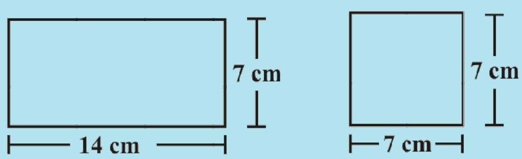
TRY THESE

(a) Match the following figures with their respective areas in the box.



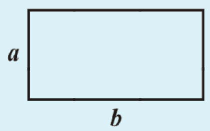
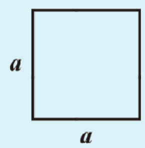
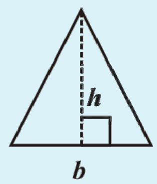
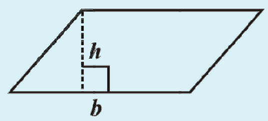
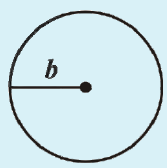
49 cm^2
77 cm^2
98 cm^2

(b) Write the perimeter of each shape.



దీర్ఘ చతురస్రాకార తోటల వైశాల్యం = ...
బాటను సిమెంటు చేయగా పార్కులో మిగిలిన వైశాల్యం = ...
గడ్డి చేత కప్పబడిన వైశాల్యం = ...

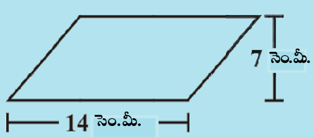
దీర్ఘ చతురస్రమే కాక ఇతర జ్యామితీయ ఆకారముల కొలతలు తెలిసినచో వాని వైశాల్యం కనుగొనగలము. గుర్తు తెచ్చుకోవడానికి ప్రయత్నించి కింది వాటిని జతపర్చండి.

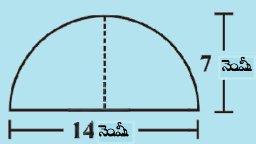
పటము	ఆకారం	వైశాల్యం
	దీర్ఘ చతురస్రం	$a \times a$
	చతురస్రం	$b \times h$
	త్రిభుజం	πb^2
	సమాంతర చతుర్భుజం	$\frac{1}{2} b \times h$
	వృత్తము	$a \times b$

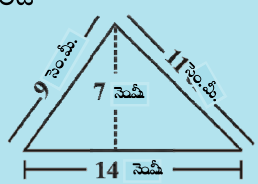
మీరు పైన తెలుపబడిన ప్రతి ఆకారము చుట్టు కొలత కనుగొనుటకు సమాసము రాయగలరా?

ప్రయత్నించండి

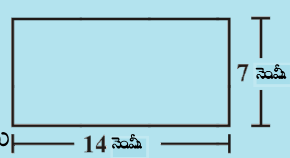
(a) ఇవ్వబడిన పటములను పట్టికలో ఇవ్వబడిన వాటి వైశాల్యములతో జతపర్చండి

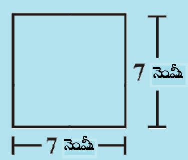






49 చ.సెం.మీ.
77 చ.సెం.మీ.
98 చ.సెం.మీ.

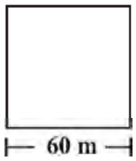




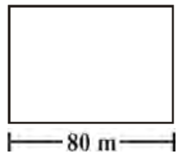
(b) ప్రతి పటము యొక్క చుట్టు కొలత కనుగొనుము

EXERCISE 11.1

1. A square and a rectangular field with measurements as given in the figure have the same perimeter. Which field has a larger area?

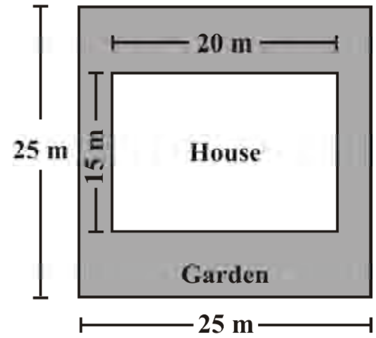


(a)

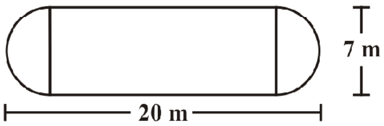


(b)

2. Mrs. Kaushik has a square plot with the measurement as shown in the figure. She wants to construct a house in the middle of the plot. A garden is developed around the house. Find the total cost of developing a garden around the house at the rate of ` 55 per m^2.



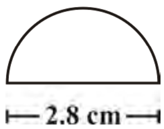
3. The shape of a garden is rectangular in the middle and semi circular at the ends as shown in the diagram. Find the area and the perimeter of this garden [Length of rectangle is 20 – (3.5 + 3.5) metres].



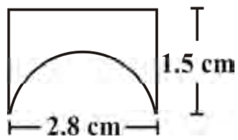
4. A flooring tile has the shape of a parallelogram whose base is 24 cm and the corresponding height is 10 cm. How many such tiles are required to cover a floor of area 1080 m^2? (If required you can split the tiles in whatever way you want to fill up the corners).

5. An ant is moving around a few food pieces of different shapes scattered on the floor. For which food-piece would the ant have to take a longer round? Remember, circumference of a circle can be obtained by using the expression $c = 2\pi r$, where r is the radius of the circle.

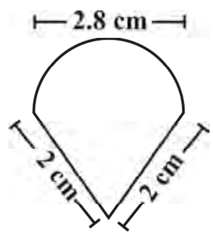
(a)



(b)



(c)



11.3 Area of Trapezium

Nazma owns a plot near a main road (Fig 11.2). Unlike some other rectangular plots in her neighbourhood, the plot has only one pair of parallel opposite sides. So, it is nearly a trapezium in shape. Can you find out its area?

Let us name the vertices of this plot as shown in Fig 11.3.

By drawing EC || AB, we can divide it into two parts, one of rectangular shape and the other of triangular shape, (which is right angled at C), as shown in Fig 11.3.

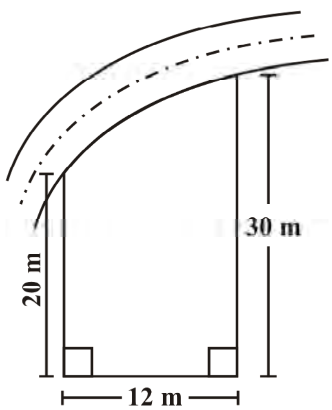


Fig 11.2

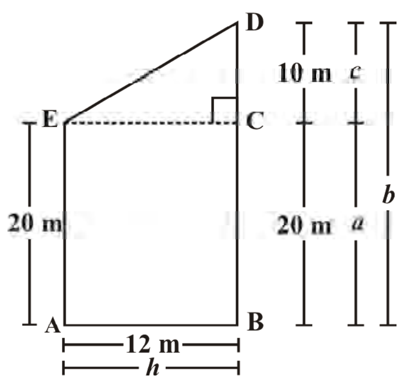
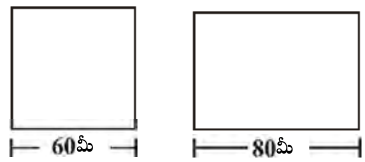


Fig 11.3

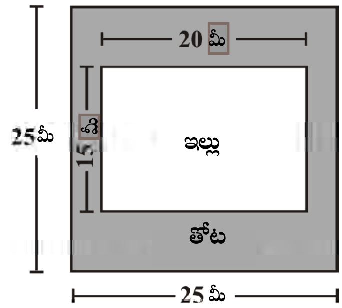
($b = c + a = 30$ m)

అభ్యాసం 11.1

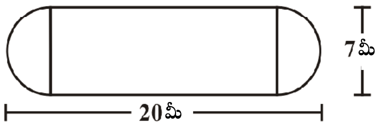
1. ఒక చతురస్రాకార మరియు ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార మైదానముల కొలతలు పటములో ఇవ్వబడినవి. వాని చుట్టుకొలతలు సమానం. ఏ మైదానం ఎక్కువ వైశాల్యం కలిగి ఉంది?



2. శ్రీమతి కౌశిక్ ప్రక్క పటములో చూపిన విధంగా చతురస్రాకార స్థలం కలిగి ఉంది. ఆ స్థలం మధ్యలో ఇల్లు కట్టి, ఇంటి చుట్టూ తోటను పెంచాలనుకుంది. ఒక చదరపు మీటరు వైశాల్యం గల తోటను పెంచుటకు ` 55 వంతున మొత్తం తోట పెంచుటకు ఎంత ఖర్చు అగును?

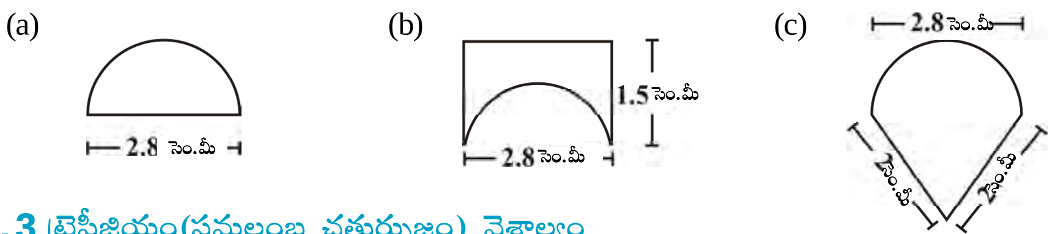


3. ఒక తోట పటములో చూపినవిధంగా మధ్యలో దీర్ఘ చతురస్రాకారంగా, ఇరువైపులా అర్ధవృత్తాకారంగా కలదు. తోట వైశాల్యం మరియు చుట్టుకొలత కనుగొనుము. [దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు 20−(3.5+3.5) మీ]



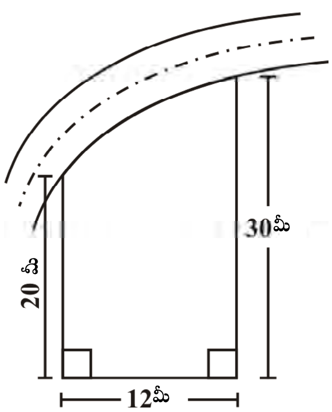
4. ఒక ఫ్లోరింగ్ టైల్ 24 సెం.మీ. భూమి, 10 సెం.మీ. అనురూప ఎత్తుగా గల సమాంతర చతుర్భుజ ఆకారంలో ఉంది. 1080 చ.మీ. వైశాల్యం గల నేల పై పరుచుటకు అటువంటి టైల్స్ ఎన్ని అవసరమగును? (అవసరమైతే టైల్స్‌ను మనకు కావలసిన విధంగా ముక్కలు చేసి గది మూలలలో అమర్చవచ్చు)

5. ఒక చీమ నేలపై పడియున్న వివిధ ఆకారములలో గల ఆహార పదార్థముల చుట్టూ తిరుగుచున్నది. ఏ పదార్థం చుట్టూ చీమ ఎక్కువ దూరం తిరిగి ఉంటుంది? (వృత్త వ్యాసార్ధం r గా గలిగిన వృత్తపరిధి $2\pi r$ అని గుర్తు చేసుకొనుము).

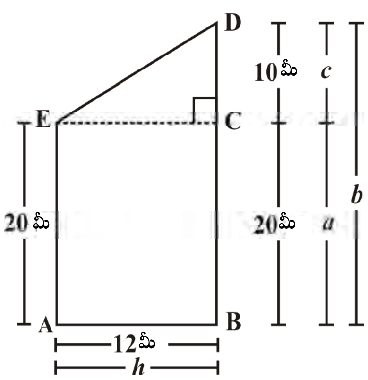


11.3 ట్రెపీజియం(సమలంబ చతుర్భుజం) వైశాల్యం

నజ్మాకు మెయిన్ రోడ్డు వెంబడి ఒక స్థలం ఉంది (పటం 11.2). ఆమె స్థలానికి చుట్టుప్రక్కల ఉన్న దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలాల వలే కాకుండా ఆ స్థలము నకు ఒక జత ఎదుటి భుజాలు మాత్రమే సమాంతరంగా ఉన్నవి. కావున ఆ స్థలం ట్రెపీజియం ఆకారంలో ఉంది. దాని వైశాల్యం కనుగొనగలరా? స్థలం యొక్క శీర్షాలు పటం 11.3లో చూపిన విధంగా గుర్తించుము. EC || AB అగునట్లు EC గీయుట ద్వారా ఒక దీర్ఘ చతురస్రం మరియు C వద్ద లంబకోణం కల్గిన ఒక త్రిభుజం ఏర్పడును.



పటం 11.2



పటం 11.3

($b = c + a = 30$ m)

Area of Δ ECD $= \dfrac{1}{2} h \times c = \dfrac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ m².

Area of rectangle ABCE $= h \times a = 12 \times 20 = 240$ m².

Area of trapezium ABDE = area of Δ ECD + Area of rectangle ABCE = 60 + 240 = 300 m².

We can write the area by combining the two areas and write the area of trapezium as

$$\text{area of ABDE} = \frac{1}{2} h \times c + h \times a = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$$

$$= h\left(\frac{c + 2a}{2}\right) = h\left(\frac{c + a + a}{2}\right)$$

$$= h\frac{(b+a)}{2} = \text{height}\ \frac{(\text{sum of parallel sides})}{2}$$

By substituting the values of h, b and a in this expression, we find $h\dfrac{(b+a)}{2} = 300$ m².

TRY THESE

1. Nazma's sister also has a trapezium shaped plot. Divide it into three parts as shown (Fig 11.4). Show that the area of trapezium WXYZ $= h\dfrac{(a+b)}{2}$.

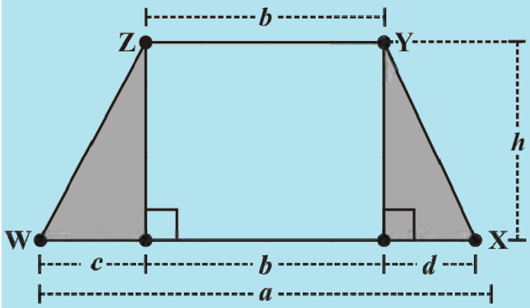


Fig 11.4

2. If $h = 10$ cm, $c = 6$ cm, $b = 12$ cm, $d = 4$ cm, find the values of each of its parts separetely and add to find the area WXYZ. Verify it by putting the values of h, a and b in the expression $\dfrac{h(a+b)}{2}$.

DO THIS

1. Draw any trapezium WXYZ on a piece of graph paper as shown in the figure and cut it out (Fig 11.5).

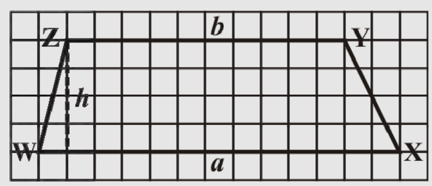


Fig 11.5

2. Find the mid point of XY by folding the side and name it A (Fig 11.6).

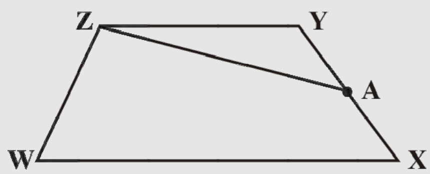


Fig 11.6

ΔECD వైశాల్యం $= \dfrac{1}{2} h \times c = \dfrac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ మీ^{2}.

ABCE దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $= h \times a = 12 \times 20 = 240$ మీ^{2}.

ABDE ట్రెపీజియం వైశాల్యం = Δ ECD వై॥ + ABCE దీర్ఘ చతురస్ర వై॥ $= 60 + 240 = 300$ మీ^{2}.

రెండు వైశాల్యములు కలుపగా ట్రెపీజియం వైశాల్యంనకు సమానం అగును.

$$\text{ABDE ట్రెపీజియం వైశాల్యం} = \frac{1}{2} h \times c + h \times a = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$$

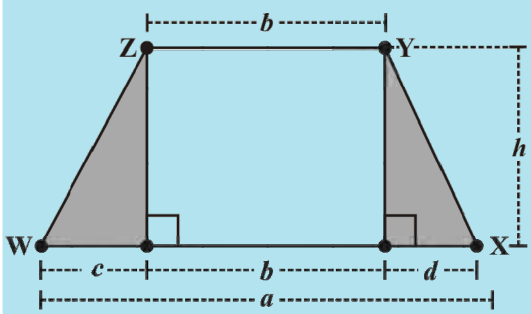
$$= h\left(\frac{c+2a}{2}\right) = h\left(\frac{c+a+a}{2}\right)$$

$$= h\frac{(b+a)}{2} = \text{ఎత్తు} \times \frac{(\text{సమాంత భుజాల మొత్తం})}{2}$$

ఈ సమాసంలో h, b , a విలువలు ప్రతిక్షేపించగా ట్రెపీజియం వైశాల్యం $h\dfrac{(b+a)}{2} = 300$మీ^{2} అగును.

ప్రయత్నించండి

1. నజ్మా సోదరికి కూడా ట్రెపీజియం ఆకారంలో గల స్థలం ఉంది. పటం 11.4 లో చూపిన విధంగా ఆ స్థలం మూడు భాగాలుగా విభజించండి. WXYZ ట్రెపీజియం వై॥ $= h\dfrac{(a+b)}{2}$ అని చూపండి.

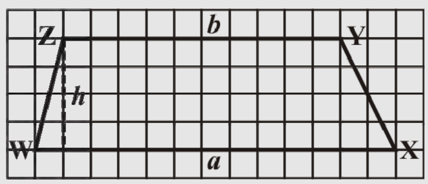


పటం 11.4

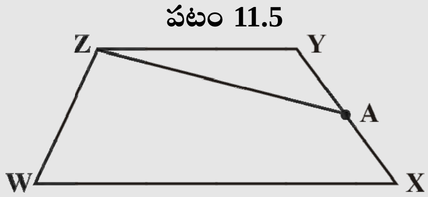
2. $h = 10$ సెం.మీ., $c = 6$ సెం.మీ., $b = 12$ సెం.మీ., $d = 4$ సెం.మీ. అయిన ప్రతిభాగం యొక్క వైశాల్యం విడిగా కనుగొని, అన్నింటిని కలిపి WXYZ వైశాల్యం కనుగొనుము. h,a, b యొక్క విలువలు $\dfrac{h(a+b)}{2}$ సమాసంలో ప్రతిక్షేపించి సరిచూడుము.

ఇవి చేయండి

1. ట్రెపీజియం WXYZ ను పటం 11.5 లో చూపిన విధంగా గ్రాఫ్ కాగితం పై గీసి కత్తిరించుము.
2. కాగితం మడత పెట్టడం ద్వారా XY యొక్క మధ్య బిందువు గుర్తించి దానికి A అని పేరు పెట్టుము (పటం 11.6).



పటం 11.5



పటం 11.6

3. Cut trapezium WXYZ into two pieces by cutting along ZA. Place Δ ZYA as shown in Fig 11.7, where AY is placed on AX.

   What is the length of the base of the larger triangle? Write an expression for the area of this triangle (Fig 11.7).

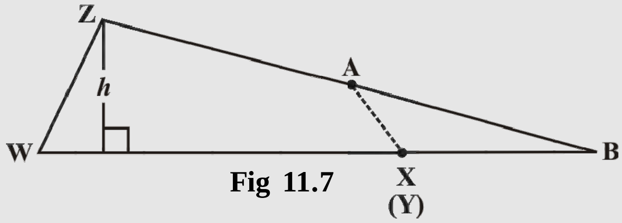


Fig 11.7

4. The area of this triangle and the area of the trapezium WXYZ are same (How?). Get the expression for the area of trapezium by using the expression for the area of triangle.

So to find the area of a trapezium we need to know the length of the parallel sides and the perpendicular distance between these two parallel sides. Half the product of the sum of the lengths of parallel sides and the perpendicular distance between them gives the area of trapezium.

TRY THESE

Find the area of the following trapeziums (Fig 11.8).

(i) (ii)

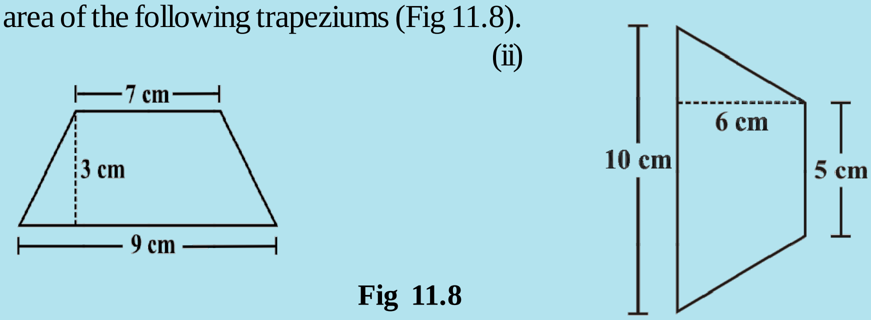


Fig 11.8

DO THIS

In Class VII we learnt to draw parallelograms of equal areas with different perimeters. Can it be done for trapezium? Check if the following trapeziums are of equal areas but have different perimeters (Fig 11.9).

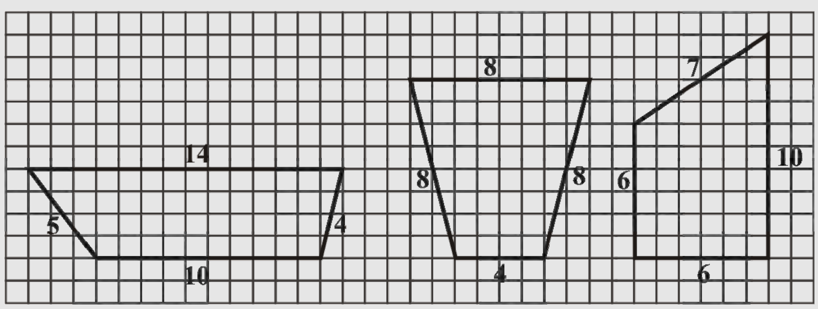
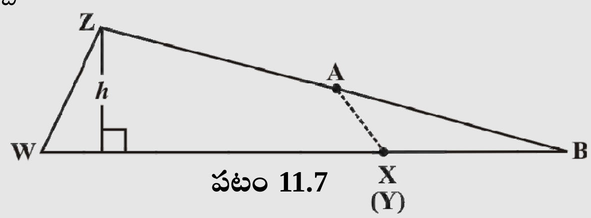


Fig 11.9

3. WXYZ ట్రెపీజియంను ZA వెంబడి రెండు భాగాలుగా కత్తిరించుము. పటం 11.7 లో చూపిన విధంగా Δ ZYA ను AX పై AY ఉండునట్లుగా అమర్చుము.

పెద్ద త్రిభుజం యొక్క భూమి పొడవు ఎంత? త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుటకు సమాసము రాయుము (పటం11.7).



పటం 11.7

4. ఈ త్రిభుజ వైశాల్యం మరియు WXYZ ట్రెపీజియం వైశాల్యం సమానం(ఎలా?) త్రిభుజ వైశాల్యమునకు గల సమాసమును ఉపయోగించి ట్రెపీజియం వైశాల్యమునకు సమాసమును రాబట్టండి.

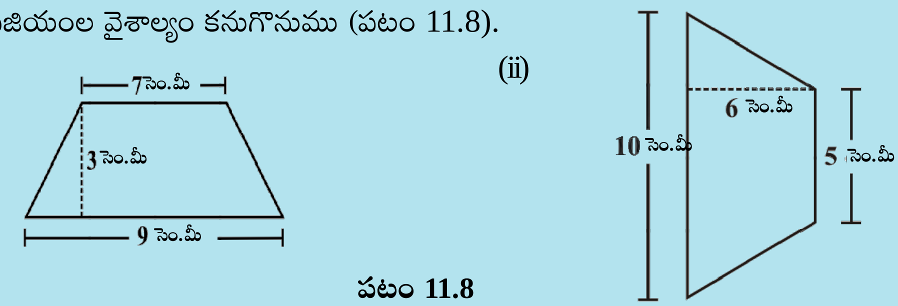
కావున ట్రెపీజియం వైశాల్యం కనుగొనుటకు మనకు దాని సమాంతర భుజాల పొడవులు, వాటి మధ్య లంబ దూరం అవసరం. ట్రెపీజియం వైశాల్యం సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం, వాటి మధ్య లంబ దూరముల లబ్ధంలో సగం ఉంటుంది.

ప్రయత్నించండి

క్రింది ట్రెపీజియంల వైశాల్యం కనుగొనుము (పటం 11.8).

(i)

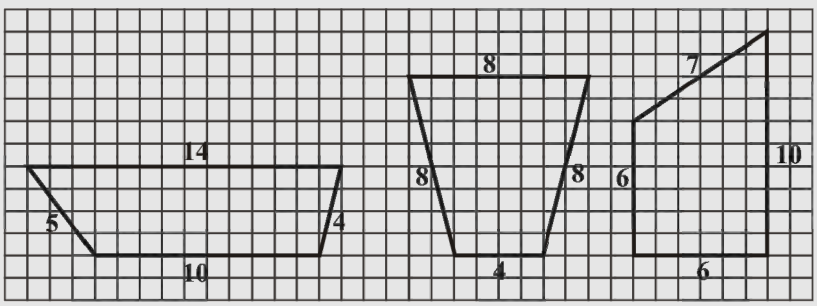
(ii)



పటం 11.8

ఇవి చేయండి

7వ తరగతిలో సమాన వైశాల్యాలు వేర్వేరు చుట్టు కొలతలు గల సమాంతర చతుర్భుజములు గీయుట తెలుసుకున్నాం. ఇది ట్రెపీజియంకు కూడా చేయవచ్చునా? క్రింది ట్రెపీజియంలు సమాన వైశాల్యాలు కలిగి, వేర్వేరు చుట్టు కొలతలు కలిగి ఉన్నాయోమో సరిచూడుము (పటం 11.9).



పటం 11.9

We know that all congruent figures are equal in area. Can we say figures equal in area need to be congruent too? Are these figures congruent?

Draw at least three trapeziums which have different areas but equal perimeters on a squared sheet.

11.4 Area of a General Quadrilateral

A general quadrilateral can be split into two triangles by drawing one of its diagonals. This "triangulation" helps us to find a formula for any general quadrilateral. Study the Fig 11.10.

Area of quadrilateral ABCD

$= (\text{area of } \Delta\, ABC) + (\text{area of } \Delta\, ADC)$

$= (\frac{1}{2} AC \times h_1) + (\frac{1}{2} AC \times h_2)$

$= \frac{1}{2} AC \times (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$ where d denotes the length of diagonal AC.

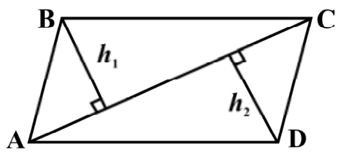


Fig 11.10

Example 1: Find the area of quadrilateral PQRS shown in Fig 11.11.

Solution: In this case, $d = 5.5$ cm, $h_1 = 2.5$cm, $h_2 = 1.5$ cm,

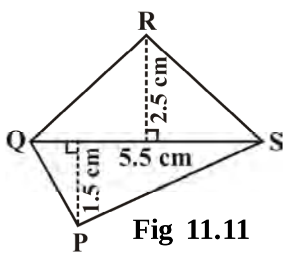


Fig 11.11

$\text{Area} = \frac{1}{2} d\,(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5 + 1.5)\ \text{cm}^2$

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4\ \text{cm}^2 = 11\ \text{cm}^2$

TRY THESE

We know that parallelogram is also a quadrilateral. Let us also split such a quadrilateral into two triangles, find their areas and hence that of the parallelogram. Does this agree with the formula that you know already? (Fig 11.12)

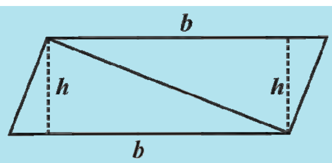


Fig 11.12

11.4.1 Area of special quadrilaterals

We can use the same method of splitting into triangles (which we called "triangulation") to find a formula for the area of a rhombus. In Fig 11.13 ABCD is a rhombus. Therefore, its diagonals are perpendicular bisectors of each other.

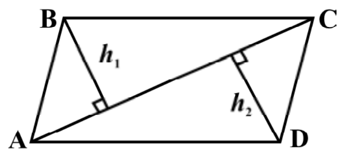
Area of rhombus ABCD = (area of Δ ACD) + (area of Δ ABC)

సర్వ సమాన పటముల వైశాల్యాలు సమానం అని మనకు తెలుసు. అయితే సమాన వైశాల్యాలు గల పటములు సర్వ సమానం కావలసిన అవసరం ఉందని చెప్పగలమా? ఈ పటాలు సర్వసమానమేనా?

చతురస్ర గళ్ళ కాగితంపై వేర్వేరు వైశాల్యాలు కలిగి ఉంటూ సమాన చుట్టు కొలతలు గల ట్రెపీజియంలు కనీసం మూడు గీయుము.

11.4 సాధారణ చతుర్భుజం వైశాల్యం

ఒక సాధారణ చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణము గీయుట ద్వారా దానిని రెండు త్రిభుజములుగా విభజింపవచ్చును. సాధారణ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యమునకు సూత్రము కనుగొనుటకు ఈ "త్రిభుజీకరణం" ఉపయోగపడుతుందది. పటం 11.10ను పరిశీలించండి.



పటం 11.10

ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం

$$= (\Delta\, ABC \text{ వైశాల్యం}) + (\Delta\, ADC \text{ వైశాల్యం})$$

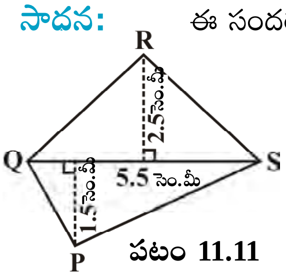
$$= (\frac{1}{2} AC \times h_1) + (\frac{1}{2} AC \times h_2)$$

$$= \frac{1}{2} AC \times (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$$ ఇచ్చట d కర్ణము AC యొక్క పొడవును సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 1: పటం 11.11లలో చూపబడిన PQRS చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుగొనుము.

సాధన: ఈ సందర్భంలో, కర్ణము $d = 5.5$ సెం.మీ, $h_1 = 2.5$సెం.మీ, $h_2 = 1.5$ సెం.మీ



పటం 11.11

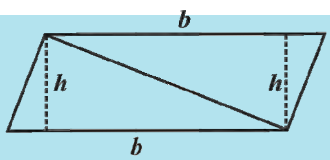
$$\text{వైశాల్యం} = \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5 + 1.5) \text{ సెం.మీ}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4 \text{ సెం.మీ.}^2 = 11 \text{ సెం.మీ}^2$$

ప్రయత్నించండి

సమాంతర చతుర్భుజం కూడా ఒక చతుర్భుజం అని మనకు తెలుసు. దీనిని కూడా రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి వాటి వైశాల్యాలు కనుగొని తద్వారా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము కనుగొనుము. ఇది ఇంతకు ముందు మనకు తెలిసి ఉన్న సూత్రముతో సరిపోవునా? (పటం 11.12)



పటం 11.12

11.4.1 ప్రత్యేక చతుర్భుజాల వైశాల్యం

రాంబస్ వైశాల్యంనకు సూత్రము కనుగొనుటకు త్రిభుజాలుగా విభజించు (త్రిభుజీకరణ) పద్ధతిని మనం ఉపయోగించ వచ్చును. పటం 11.13 లో ABCD ఒక రాంబస్ కావున దాని కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన రేఖలు.

ABCD రాంబస్ వైశాల్యం = (Δ ACD వైశాల్యం) + (Δ ABC వైశాల్యం)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times OD\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times OB\right) = \frac{1}{2} AC \times (OD + OB)$$

$$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \quad \text{where } AC = d_1 \text{ and } BD = d_2$$

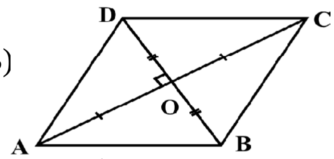


Fig 11.13

In other words, area of a rhombus is half the product of its diagonals.

Example 2: Find the area of a rhombus whose diagonals are of lengths 10 cm and 8.2 cm.

Solution: Area of the rhombus = $\frac{1}{2} d_1 d_2$ where d_1, d_2 are lengths of diagonals.

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 \text{ cm}^2 = 41 \text{ cm}^2.$$

THINK, DISCUSS AND WRITE

A parallelogram is divided into two congruent triangles by drawing a diagonal across it. Can we divide a trapezium into two congruent triangles?

TRY THESE

Find the area of these quadrilaterals (Fig 11.14).

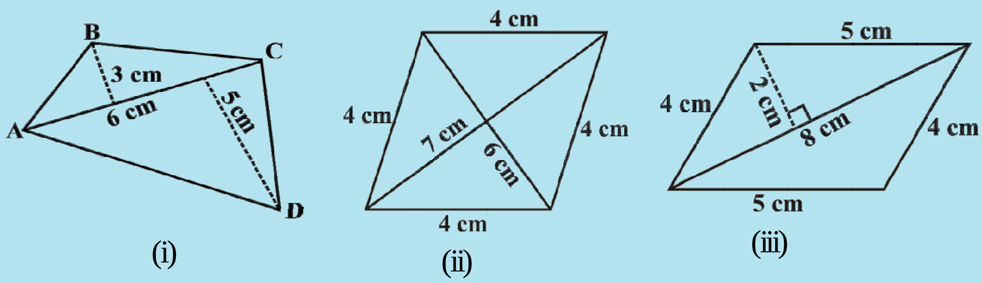


Fig 11.14

11.5 Area of a Polygon

We split a quadrilateral into triangles and find its area. Similar methods can be used to find the area of a polygon. Observe the following for a pentagon: (Fig 11.15, 11.16)

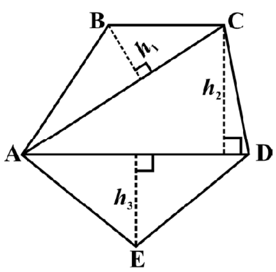


Fig 11.15

By constructing two diagonals AC and AD the pentagon ABCDE is divided into three parts. So, area ABCDE = area of Δ ABC + area of Δ ACD + area of Δ AED.

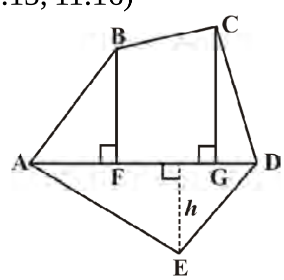
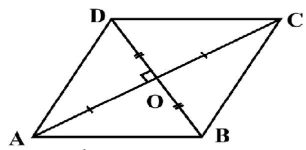


Fig 11.16

By constructing one diagonal AD and two perpendiculars BF and CG on it, pentagon ABCDE is divided into four parts. So, area of ABCDE = area of right angled Δ AFB + area of trapezium BFGC + area of right angled Δ CGD + area of Δ AED. (Identify the parallel sides of trapezium BFGC.)

$= (\frac{1}{2} \times AC \times OD) + (\frac{1}{2} \times AC \times OB) = \frac{1}{2} AC \times (OD + OB)$

$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$ ఇచ్చుట కర్ణములు $AC = d_1$ మరియు $BD = d_2$



పటం 11.13

మరొకవిధంగా చెప్పాలంటే, రాంబస్ వైశాల్యం దాని కర్ణముల లబ్దంలో సగం అగును.

ఉదాహరణ 2: కర్ణముల పొడవులు 10సెం.మీ మరియు 8.2 సెం.మీ.గల రాంబస్ వైశాల్యం కనుగొనుము.

సాధన: రాంబస్ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} d_1 d_2$ ఇచట d_1, d_2 లు కర్ణముల పొడవులు

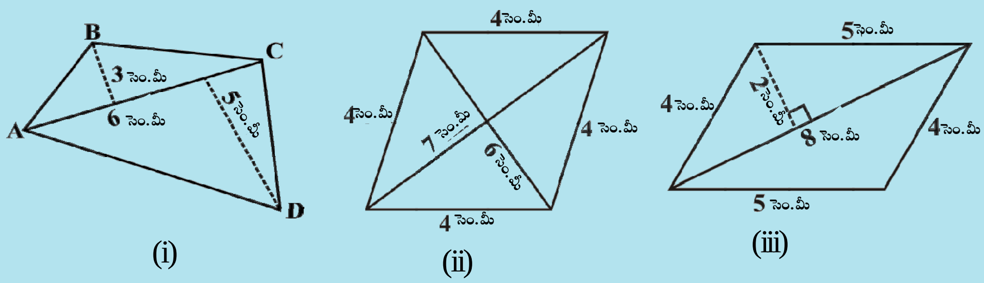
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2$ సెం.మీ^{2} $= 41$ సెం.మీ^{2}

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణమును గీయటం ద్వారా అది రెండు సర్వసమాన త్రిభుజములుగా విభజించబడును. ట్రెపీజియంను మనం రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజములుగా విభజింపగలమా?

ప్రయత్నించండి

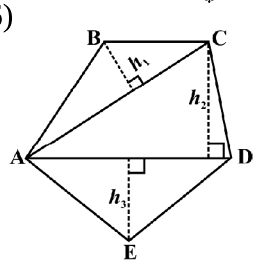
ఈ చతుర్భుజముల యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుము (పటం 11.14).



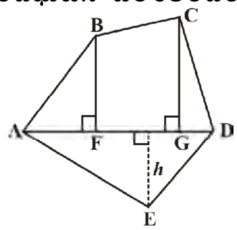
పటం 11.14

11.5 బహుభుజి వైశాల్యం

మనం ఒక చతుర్భుజాన్ని త్రిభుజాలుగా విభజించి దాని వైశాల్యం కనుగొన్నాము. బహుభుజి పటముల వైశాల్యం కనుగొనుటకు ఇదేవిధమైన పద్ధతి ఉపయోగించవచ్చు. క్రింది పంచభుజిని పరిశీలించండి. (పటం11.15, 11.16)



పటం 11.15



పటం 11.16

AC మరియు AD కర్ణములు గీయగా ABCDE పంచభుజి మూడు త్రిభుజములుగా విభజింపబడినది. కావున ABCDE వైశాల్యం=Δ ABC వైశాల్యం + Δ ACD వైశాల్యం + Δ AED వైశాల్యం.

AD కర్ణము మరియు ఆ కర్ణముపై BF ,CG లంబములు నిర్మించడం ద్వారా ABCDE పంచభుజి 4 భాగాలుగా విభజించబడింది. కావున ABCDE వైశాల్యం = లంబకోణΔAFB వైశాల్యం + BFGC ట్రెపీజియం వైశాల్యం + లంబకోణΔCGD వైశాల్యం + ΔAED వైశాల్యం. (ట్రెపీజియం BFGC యొక్క సమాంతర భుజాలను గుర్తించుము)

TRY THESE

(i) Divide the following polygons (Fig 11.17) into parts (triangles and trapezium) to find out its area.

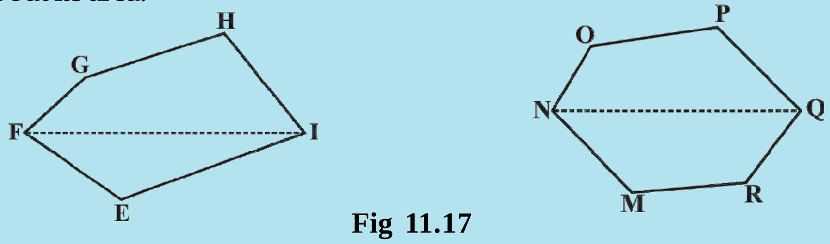


Fig 11.17

FI is a diagonal of polygon EFGHI   NQ is a diagonal of polygon MNOPQR

(ii) Polygon ABCDE is divided into parts as shown below (Fig 11.18). Find its area if AD = 8 cm, AH = 6 cm, AG = 4 cm, AF = 3 cm and perpendiculars BF = 2 cm, CH = 3 cm, EG = 2.5 cm.

Area of Polygon ABCDE = area of Δ AFB + ...

$$\text{Area of } \Delta\text{ AFB} = \frac{1}{2} \times \text{AF} \times \text{BF} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = \ldots.$$

$$\text{Area of trapezium FBCH} = \text{FH} \times \frac{(\text{BF}+\text{CH})}{2}$$

$$= 3 \times \frac{(2+3)}{2} \quad [\text{FH} = \text{AH} - \text{AF}]$$

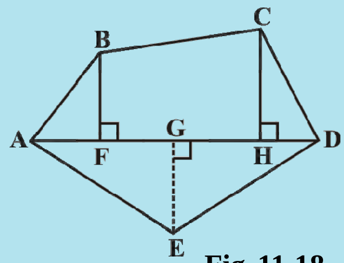


Fig 11.18

$$\text{Area of } \Delta\text{CHD} = \frac{1}{2} \times \text{HD} \times \text{CH} = \ldots.; \quad \text{Area of } \Delta\text{ADE} = \frac{1}{2} \times \text{AD} \times \text{GE} = \ldots.$$

So, the area of polygon ABCDE = ...

(iii) Find the area of polygon MNOPQR (Fig 11.19) if MP = 9 cm, MD = 7 cm, MC = 6 cm, MB = 4 cm, MA = 2 cm

NA, OC, QD and RB are perpendiculars to diagonal MP.

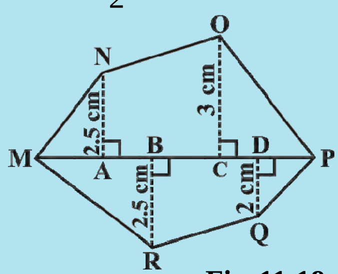


Fig 11.19

Example 1: The area of a trapezium shaped field is 480 m^2, the distance between two parallel sides is 15 m and one of the parallel side is 20 m. Find the other parallel side.

Solution: One of the parallel sides of the trapezium is a = 20 m, let another parallel side be b, height h = 15 m.

The given area of trapezium = 480 m^2.

$$\text{Area of a trapezium} = \frac{1}{2} h\,(a + b)$$

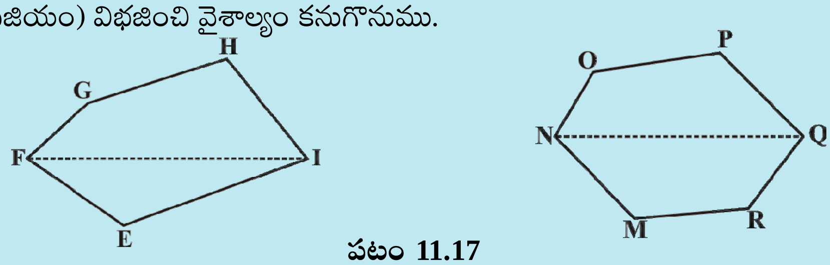
$$\text{So} \quad 480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b) \quad \text{or} \quad \frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$$

$$\text{or} \quad 64 = 20 + b \quad \text{or} \quad b = 44 \text{ m}$$

Hence the other parallel side of the trapezium is 44 m.

ప్రయత్నించండి

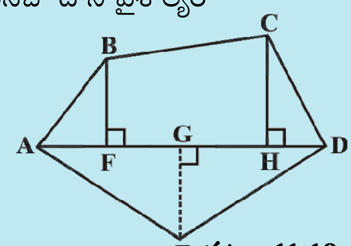
(i) పటం11.17లో చూపిన విధంగా బహుభుజి పటాలను భాగాలుగా (త్రిభుజము మరియు ట్రెపీజియం) విభజించి వైశాల్యం కనుగొనుము.



పటం 11.17

EFGHI బహుభుజిలో FI ఒక కర్ణము MNOPQR బహుభుజిలో NQ ఒక కర్ణము

(ii) పటం 11.18లో చూపిన విధంగా ABCDE బహుభుజి భాగాలుగా విభజింపబడినది. AD = 8సెం.మీ., AH = 6 సెం.మీ., AG = 4సెం.మీ. , AF = 3 సెం.మీ. మరియు లంబములు BF = 2 సెం.మీ., CH = 3 సెం.మీ., EG = 2.5 సెం.మీ..అయినచో దాని వైశాల్యం కనుగొనుము.



పటం 11.18

ABCDE బహుభుజి వైశాల్యం = Δ AFB వైశాల్యం + ...

Δ AFB వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times AF \times BF = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = ...$

FBCH ట్రెపీజియం వైశాల్యం $= FH \times \frac{(BF+CH)}{2}$

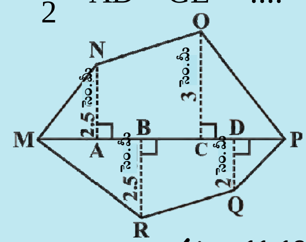
$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ $[FH = AH - AF]$

ΔCHD వైశాల్యం$= \frac{1}{2} \times HD \times CH = ...$; ΔADE వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times AD \times GE = ...$

కావున ABCDE వైశాల్యం = ...

(iii) పటం 11.19లో చూపిన విధంగా MP = 9 సెం.మీ., MD = 7సెం.మీ., MC = 6సెం.మీ., MB = 4సెం.మీ., MA = 2 సెం.మీ.అయిన MNOPQR బహుభుజి వైశాల్యం కనుగొనుము.

NA, OC, QD మరియు RB లు కర్ణము MP పై గీయబడిన లంబములు.



పటం 11.19

ఉదాహరణ 1: ట్రెపీజియం ఆకారంలో ఉన్న ఒక పొలము వైశాల్యం 480 చ.మీ, రెండు సమాంతర భుజాల మధ్య దూరము 15 మీ. మరియు ఒక సమాంతర భుజం యొక్క పొడవు 20మీ. అయినచో రెండవ సమాంతర భుజం పొడవు కనుగొనుము.

సాధన: ట్రెపీజియం సమాంతర భుజాలలో ఒక దాని పొడవు a = 20మీ. రెండవ సమాంతర భుజం పొడవు b మీ. అనుకొనుము. ఎత్తు h = 15మీ.

ఇవ్వబడిన ట్రెపీజియం వైశాల్యం = 480 చ.మీ.

ట్రెపీజియం వైశాల్యం $= \frac{1}{2} h\,(a + b)$

కావున $480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b)$ లేదా $\frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$

లేదా $64 = 20 + b$ లేదా $b = 44$ మీ.

కావున ట్రెపీజియం యొక్క రెండవ సమాంతర భుజము పొడవు 44 మీ.

Example 2: The area of a rhombus is 240 cm² and one of the diagonals is 16 cm. Find the other diagonal.

Solution: Let length of one diagonal d_1 = 16 cm

and length of the other diagonal = d_2

$$\text{Area of the rhombus} = \frac{1}{2}\, d_1 \,.\, d_2 = 240$$

So, $$\frac{1}{2} 16 \cdot d_2 = 240$$

Therefore, $$d_2 = 30 \text{ cm}$$

Hence the length of the second diagonal is 30 cm.

Example 3: There is a hexagon MNOPQR of side 5 cm (Fig 11.20). Aman and Ridhima divided it in two different ways (Fig 11.21).

Find the area of this hexagon using both ways.

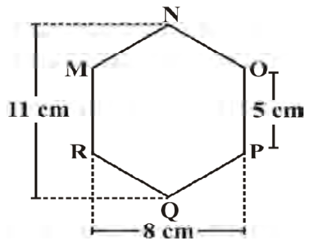
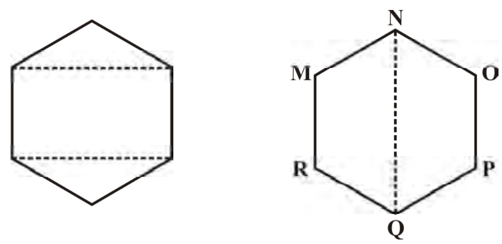


Fig 11.20



Ridhima's method **Aman's method**

Fig 11.21

Solution: Aman's method:

Since it is a hexagon so NQ divides the hexagon into two congruent trapeziums. You can verify it by paper folding (Fig 11.22).

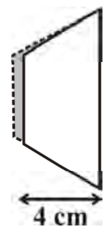


Fig 11.22

Now area of trapezium MNQR $= 4 \times \dfrac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32 \text{ cm}^2$.

So the area of hexagon MNOPQR = 2 × 32 = 64 cm².

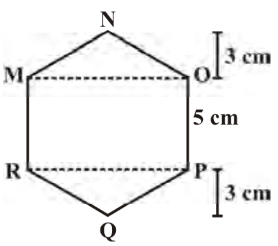


Fig 11.23

Ridhima's method:

Δ MNO and Δ RPQ are congruent triangles with altitude 3 cm (Fig 11.23).

You can verify this by cutting off these two triangles and placing them on one another.

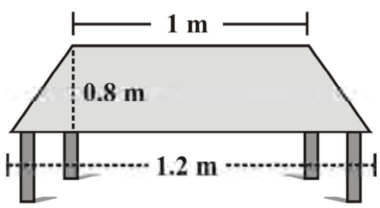
Area of Δ MNO $= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$ = Area of Δ RPQ

Area of rectangle MOPR = 8 × 5 = 40 cm².

Now, area of hexagon MNOPQR = 40 + 12 + 12 = 64 cm².

EXERCISE 11.2

1. The shape of the top surface of a table is a trapezium. Find its area if its parallel sides are 1 m and 1.2 m and perpendicular distance between them is 0.8 m.



ఉదాహరణ 2: ఒక రాంబస్ వైశాల్యం 240 చ.సెం.మీ. మరియు దాని కర్ణములలో ఒక దాని పొడవు 16సెం.మీ. అయిన రెండవ కర్ణము పొడవు ఎంత?

సాధన: రాంబస్ కర్ణములలో ఒక దాని పొడవు $d_1 = 16$ సెం.మీ

రెండవ కర్ణము పొడవు d_2 అనుకొనుము.

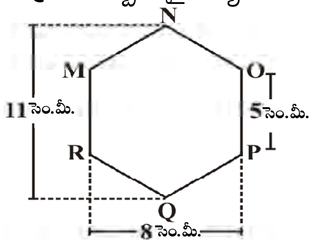
$$\text{రాంబస్ వైశాల్యం} = \frac{1}{2}\, d_1 \,.\, d_2 = 240$$

, కావున, $\frac{1}{2} 16 \cdot d_2 = 240$

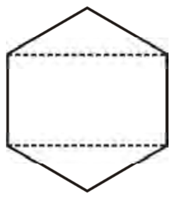
అందువలన, $d_2 = 30$ సెం.మీ

కావున రాంబస్ యొక్క రెండవ కర్ణము 30 సెం.మీ

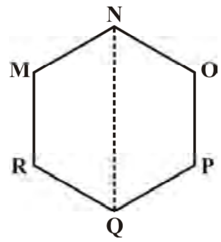
ఉదాహరణ 3: భుజము పొడవు 5సెం.మీ గా గల MNOPQR షడ్భుజి కలదు. (పటం 11.20) అమన్ మరియు రిథిమ దానిని రెండు విభిన్న పద్ధతులలో విభజించిరి (పటం 11.21). ఈ రెండు పద్ధతులలో క్రమషడ్భుజి వైశాల్యం కనుగొనుము.



పటం 11.20



రిథిమ పద్ధతి

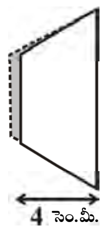


అమన్ పద్ధతి

పటం 11.21

సాధన: అమన్ విధానం:

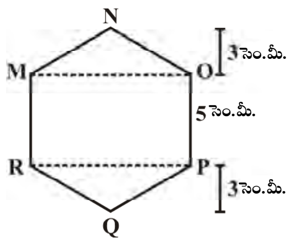
పై పటం షడ్భుజి అయినందువలన NQ దానిని రెండు సర్వసమాన ట్రెపీజియంలుగా విభజించును.కాగితాన్ని మడతపెట్టి చూడడం ద్వారా సరిచూడవచ్చు (పటం11.22).



పటం 11.22

MNQR ట్రెపీజియం వైశాల్యం $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32$ సెం.మీ.^{2}

MNOPQR షడ్భుజి వైశాల్యం $2 \times 32 = 64$ సెం.మీ.^{2}



పటం 11.23

రిథిమ విధానం:

ΔMNO మరియు ΔRPQ లు ఎత్తు 3సెం.మీ. గా గలిగిన సర్వ సమాన త్రిభుజములు (పటం11.23).

ఈ రెండు త్రిభుజములు కత్తిరించి ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచి, సర్వసమానమని సరిచూడవచ్చును.

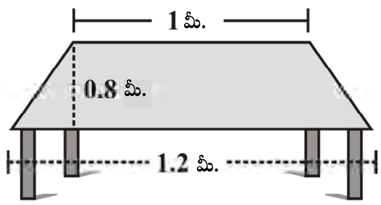
Δ MNO వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$ సెం.మీ.^{2} $= \Delta$ RPQ వైశాల్యం

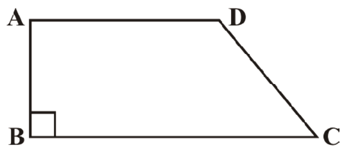
MOPR దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $= 8 \times 5 = 40$ సెం.మీ.^{2}.

MNOPQR షడ్భుజి వైశాల్యం $= 40 + 12 + 12 = 64$ సెం.మీ.^{2}.

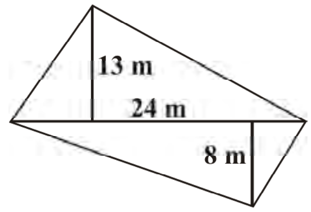
అభ్యాసం 11.2

1. ఒక టేబుల్ పై ఉపరితలం ట్రెపీజియమ్ ఆకారంలో ఉంది. దాని సమాంతర భుజముల పొడవులు 1మీ మరియు 1.2మీ. వాని మధ్య లంబ దూరం 0.8మీ అయిన దాని వైశాల్యం కనుగొనుము.

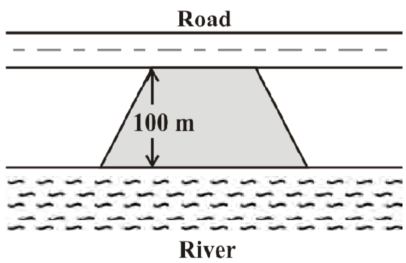




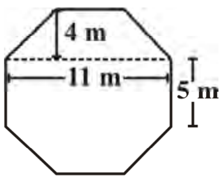
2. The area of a trapezium is 34 cm^2 and the length of one of the parallel sides is 10 cm and its height is 4 cm. Find the length of the other parallel side.
3. Length of the fence of a trapezium shaped field ABCD is 120 m. If BC = 48 m, CD = 17 m and AD = 40 m, find the area of this field. Side AB is perpendicular to the parallel sides AD and BC.



4. The diagonal of a quadrilateral shaped field is 24 m and the perpendiculars dropped on it from the remaining opposite vertices are 8 m and 13 m. Find the area of the field.
5. The diagonals of a rhombus are 7.5 cm and 12 cm. Find its area.
6. Find the area of a rhombus whose side is 5 cm and whose altitude is 4.8 cm. If one of its diagonals is 8 cm long, find the length of the other diagonal.
7. The floor of a building consists of 3000 tiles which are rhombus shaped and each of its diagonals are 45 cm and 30 cm in length. Find the total cost of polishing the floor, if the cost per m^2 is ` 4.

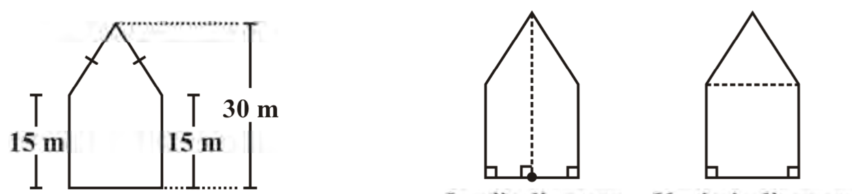


8. Mohan wants to buy a trapezium shaped field. Its side along the river is parallel to and twice the side along the road. If the area of this field is 10500 m^2 and the perpendicular distance between the two parallel sides is 100 m, find the length of the side along the river.



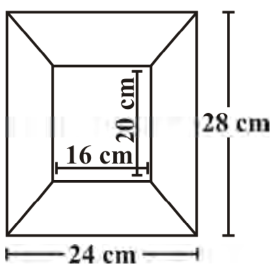
9. Top surface of a raised platform is in the shape of a regular octagon as shown in the figure. Find the area of the octagonal surface.
10. There is a pentagonal shaped park as shown in the figure.

For finding its area Jyoti and Kavita divided it in two different ways.



Joyti's diagram Kavita's diagram

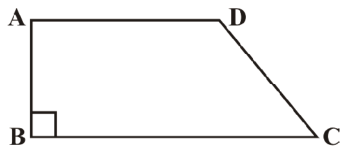
Find the area of this park using both ways. Can you suggest some other way of finding its area?



11. Diagram of the adjacent picture frame has outer dimensions = 24 cm × 28 cm and inner dimensions 16 cm × 20 cm. Find the area of each section of the frame, if the width of each section is same.

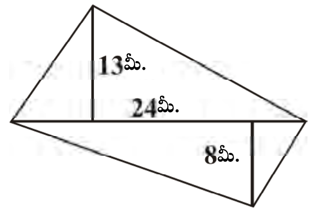
11.6 Solid Shapes

In your earlier classes you have studied that two dimensional figures can be identified as the faces of three dimensional shapes. Observe the solids which we have discussed so far (Fig 11.24).



2. ఒక ట్రెపీజియం వైశాల్యం 34చ.సెం.మీ. దాని సమాంతర భుజాలలో ఒక దాని పొడవు 10సెం.మీ మరియు దాని ఎత్తు 4సెం.మీ. రెండవ సమాంతర భుజం పొడవు కనుగొనుము?

3. ట్రెపీజియం ఆకారంలో ఉన్న పొలము ABCD యొక్క కంచె పొడవు 120 మీ. BC = 48 మీ, CD = 17మీ. AD = 40 మీ మరియు భుజము AB, సమాంతర భుజాలు అయిన BC మరియు AD లకు లంబముగా ఉన్నచో ఆ పొలము యొక్క వైశాల్యం ఎంత?

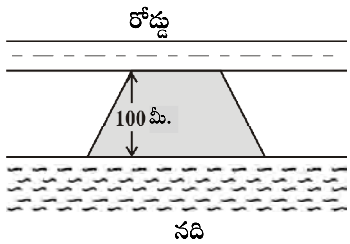


4. ఒక మైదానం చతుర్భుజ ఆకారంలో ఉంది. దాని కర్ణము 24మీ. మరియు దానికి ఎదుటి శీర్షాల నుండి గీసిన లంబముల పొడవులు వరుసగా 8మీ. మరియు 13మీ. ఆ మైదానం వైశాల్యం కనుగొనుము.

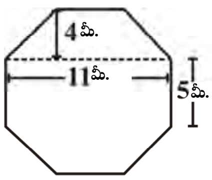
5. ఒక రాంబస్ యొక్క కర్ణముల పొడవులు 7.5సెం.మీ. మరియు 12సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం కనుగొనుము.

6. ఒక రాంబస్ భుజము పొడవు 5సెం.మీ. మరియు దాని ఎత్తు 4.8సెం.మీ అయినచో దాని వైశాల్యం కనుగొనుము. దాని ఒక కర్ణం పొడవు 8సెం.మీ అయిన రెండవ కర్ణం పొడవు కనుగొనుము.

7. ఒక భవనంలోని నేల మొత్తం మీద రాంబస్ ఆకారంలో గల 3000 టైల్స్ పరిచారు. రాంబస్ యొక్క కర్ణములు వరుసగా 45సెం.మీ. మరియు 30సెం.మీ. పొడవులు కలిగి ఉన్నవి. ఆ భవనం యొక్క నేలను పాలిష్ చేయుటకు ఒక చ.మీ.కు `4. వంతున మొత్తం ఎంత ఖర్చు అగునో కనుగొనుము.

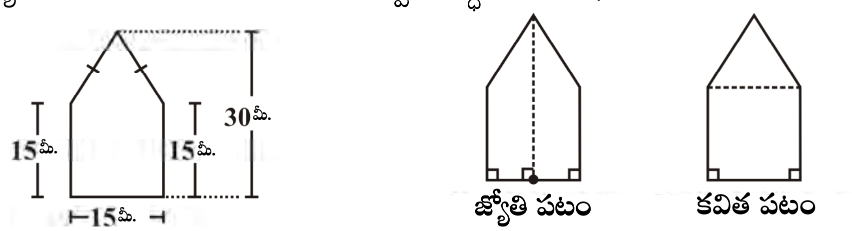


8. మోహన్ ట్రెపీజియమ్ ఆకారంలో ఉన్న ఒక పొలమును కొనాలనుకున్నాడు. ఆ పొలమునకు ఒక వైపు రోడ్డు, మరొక వైపు నది కలవు. నది వెంబడి గల అంచు పొడవు, రోడ్డు వెంబడి గల అంచు పొడవుకు సమాంతరము మరియు రెట్టింపు. ఆ పొలము యొక్క సమాంతర అంచుల మధ్య లంబదూరం 100మీ॥. మరియు ఆ పొలము వైశాల్యం 10,500చ.మీ. అయినచో నది వెంబడి గల పొలము అంచు పొడవును కనుగొనుము.

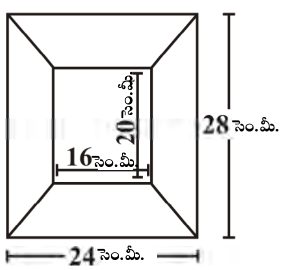


9. పటంలో చూపినట్లు వేదిక ఉపరితలం క్రమ అష్టభుజి ఆకారంలో కలదు. ఆ అష్టభుజి ఆకార తలం వైశాల్యం కనుగొనుము.

10. పటంలలో చూపినట్లు పంచభుజి ఆకారంలో గల ఒక పార్క్ కలదు. ఆ పార్క్ వైశాల్యం కనుగొనుటకు జ్యోతి మరియు కవిత దానిని రెండు వేర్వేరు పద్ధతులలో విభజించారు.



ఈ రెండు పద్ధతులలో పార్కు వైశాల్యం కనుగొనుము. మీరు దాని వైశాల్యం కనుగొనుటకు వేరొక పద్ధతి ఏదైనా సూచించగలరా?



11. ప్రక్క పటములో చూపబడిన ఫోటో ఫ్రేమ్ వెలుపలి కొలతలు 24సెం.మీ × 28సెం.మీ మరియు లోపల కొలతలు 16సెం.మీ×20సెం.మీ. ఫ్రేమ్ వెడల్పు అంతటా ఒకేవిధంగా ఉన్నచో ఆ ఫ్రేమ్ యొక్క ప్రతి భాగం వైశాల్యం కనుగొనుము.

11.6 ఘనాకారాలు

త్రిమితీయ ఘన వస్తువుల తలాలను ద్వమితీయ ఆకారాలుగా గుర్తించవచ్చని ముందు తరగతులలో మీరు నేర్చుకున్నారు. ఇంతవరకు మనం చర్చించిన ఘన వస్తువులను పరిశీలించండి (పటం 11.24).

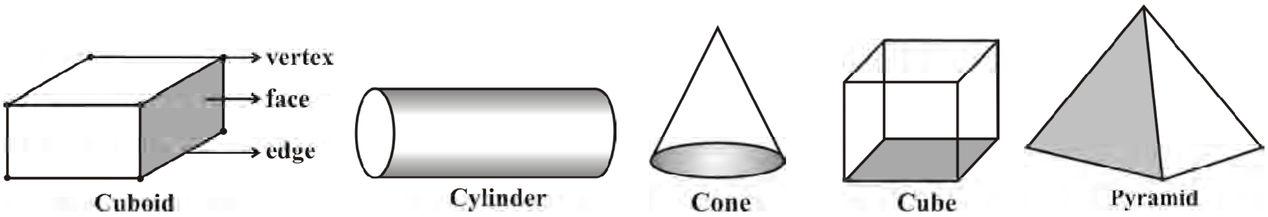


Fig 11.24

Observe that some shapes have two or more than two identical (congruent) faces. Name them. Which solid has all congruent faces?

DO THIS

Soaps, toys, pastes, snacks etc. often come in the packing of cuboidal, cubical or cylindrical boxes. Collect, such boxes (Fig 11.25).

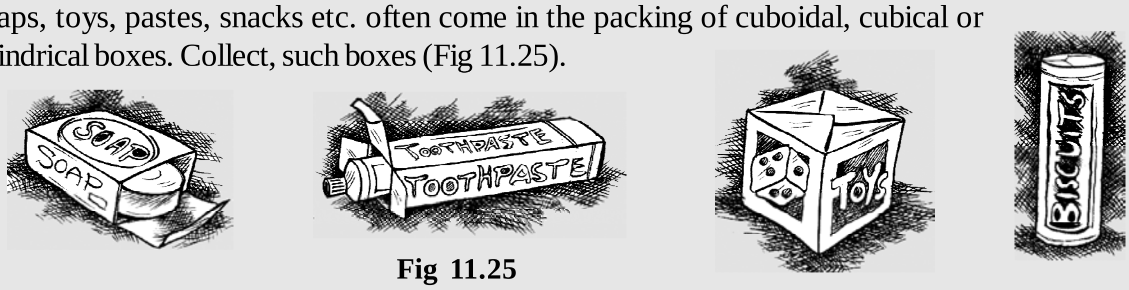
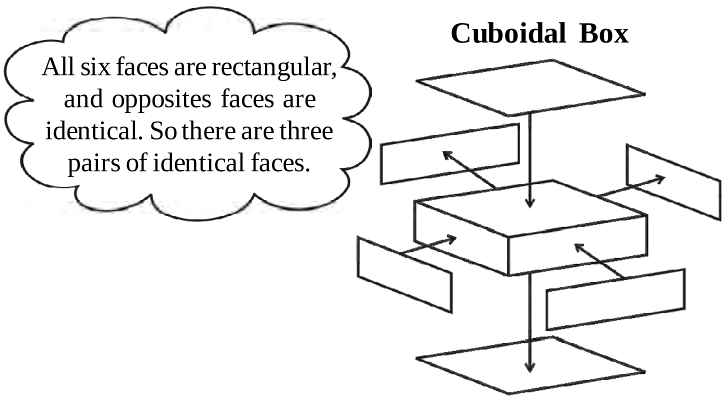
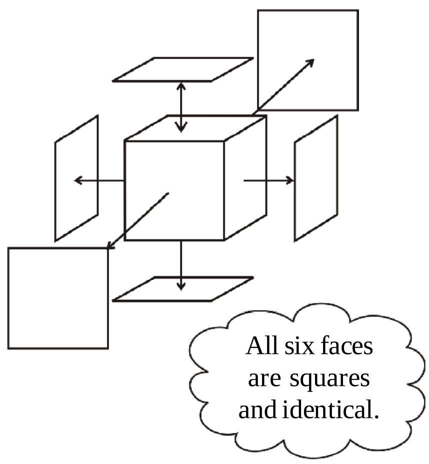


Fig 11.25

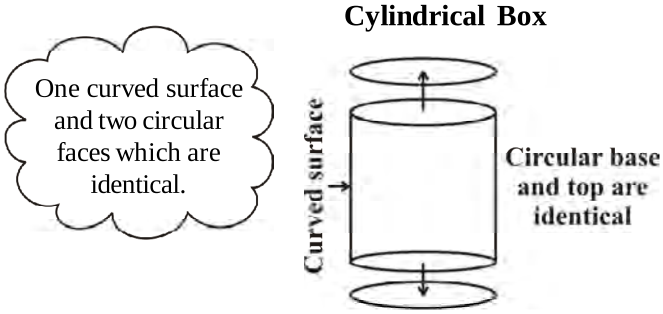
Cuboidal Box



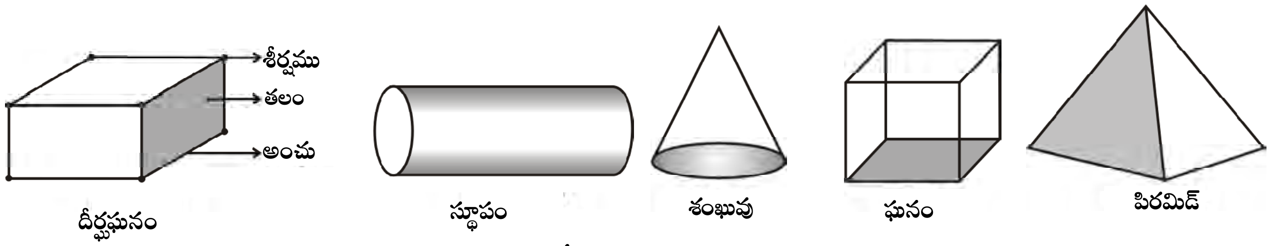
Cubical Box



Cylindrical Box



Now take one type of box at a time. Cut out all the faces it has. Observe the shape of each face and find the number of faces of the box that are identical by placing them on each other. Write down your observations.

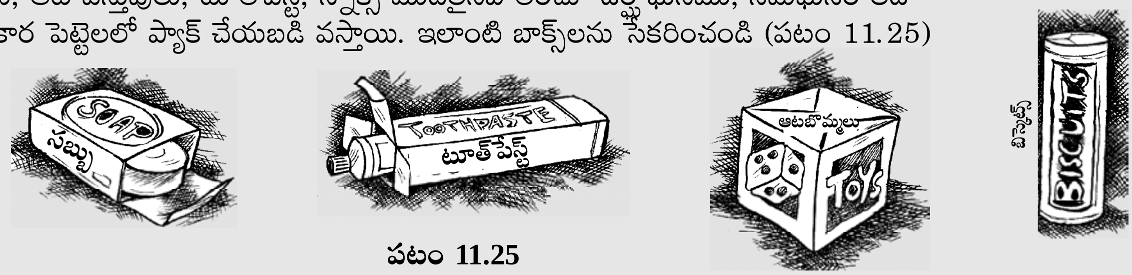


పటం 11.24

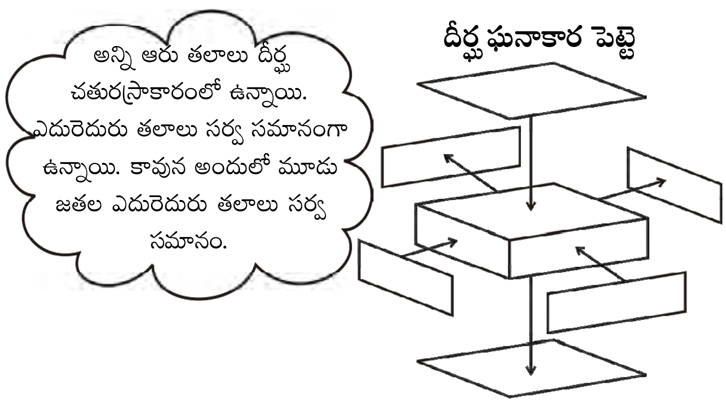
కొన్ని ఆకారాలలో రెండు లేక ఎక్కువ ఒకేలాంటి (సర్వసమానం) తలాలు ఉండుటను గమనించండి. వాటిని పేర్కొనండి. ఏ ఘనాకారానికి దాని అన్ని తలములు సర్వసమానంగా ఉన్నాయి?

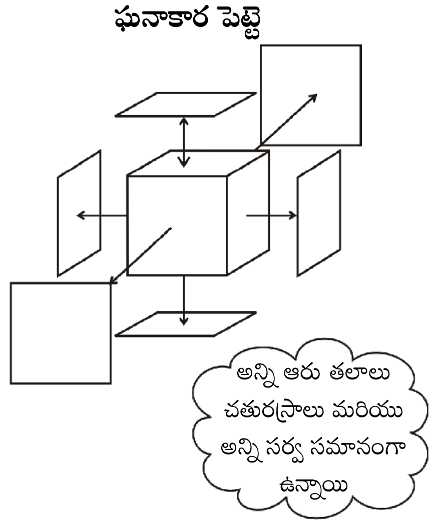
ఇవి చేయండి

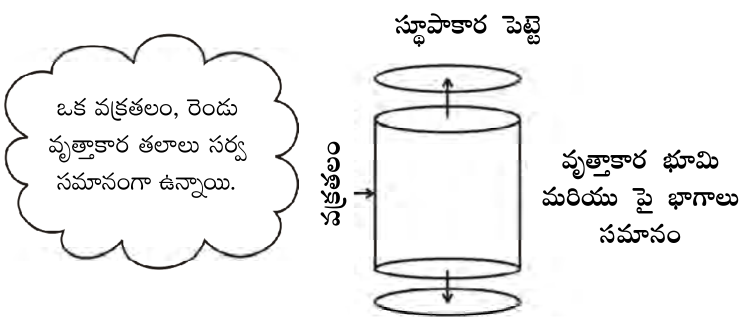
సబ్బులు, ఆట వస్తువులు, టూత్‌పేస్ట్, స్నాక్స్ మొదలైనవి తరచు దీర్ఘ ఘనము, సమఘనం లేదా స్థూపాకార పెట్టెలలో ప్యాక్ చేయబడి వస్తాయి. ఇలాంటి బాక్స్‌లను సేకరించండి (పటం 11.25)



పటం 11.25







ఇప్పుడు ఒక్కొక్క పెట్టెను తీసుకోండి. ఆ పెట్టె యొక్క అన్ని తలాలను కత్తిరించండి. వాటి ఆకారాలను గమనించి, వాటిని ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచి సర్వ సమానంగా ఉన్న తలాల సంఖ్యను కనుగొనండి. మీ పరిశీలనలను రాయండి.

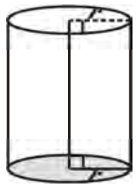


Fig 11.26

(This is a right circular cylinder)

Did you notice the following:

The cylinder has congruent circular faces that are parallel to each other (Fig 11.26). Observe that the line segment joining the center of circular faces is perpendicular to the base. Such cylinders are known as **right circular cylinders**. We are only going to study this type of cylinders, though there are other types of cylinders as well (Fig 11.27).

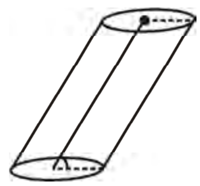
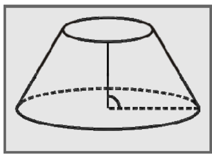


Fig 11.27

(This is not a right circular cylinder)

THINK, DISCUSS AND WRITE



Why is it incorrect to call the solid shown here a cylinder?

11.7 Surface Area of Cube, Cuboid and Cylinder

Imran, Monica and Jaspal are painting a cuboidal, cubical and a cylindrical box respectively of same height (Fig 11.28).

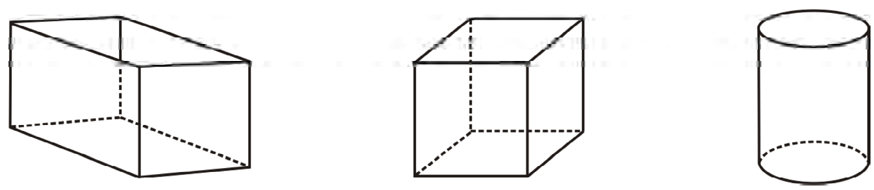


Fig 11.28

They try to determine who has painted more area. Hari suggested that finding the surface area of each box would help them find it out.

To find the total surface area, find the area of each face and then add. The surface area of a solid is the sum of the areas of its faces. To clarify further, we take each shape one by one.

11.7.1 Cuboid

Suppose you cut open a cuboidal box and lay it flat (Fig 11.29). We can see a net as shown below (Fig 11.30).

Write the dimension of each side. You know that a cuboid has three pairs of identical faces. What expression can you use to find the area of each face?

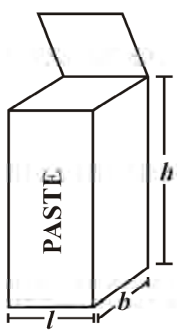


Fig 11.29

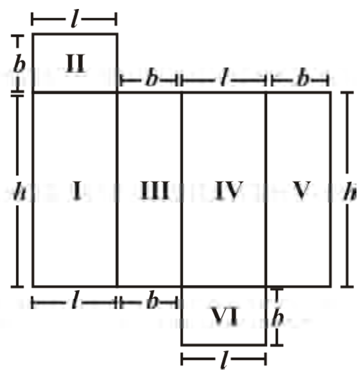
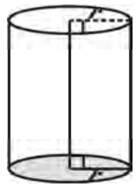


Fig 11.30

Find the total area of all the faces of the box. We see that the total surface area of a cuboid is area I + area II + area III + area IV +area V + area VI

$= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

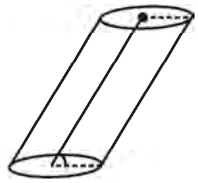


పటం 11.26

(ఇది క్రమ వృత్తాకార స్థూపం)

మీరు క్రింది విషయాలను గమనించారా?

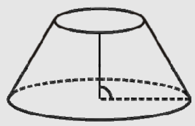
స్థూపం, పరస్పరం సమాంతరంగా మరియు సర్వ సమానంగా ఉన్న రెండు వృత్తాకార ముఖాలను కలిగి ఉంటుంది (పటం 11.26). ఈ రెండు వృత్తాకార ముఖాల కేంద్రాలను కలుపు రేఖ స్థూపం పాదానికి లంబంగా ఉన్నదని గమనించండి. ఇలాంటి స్థూపాలను **క్రమ వృత్తాకార స్థూపాలు** అంటాము. ఇవి కాకుండా ఇంకా వేరు వేరు రకాలైన స్థూపాలు ఉన్నప్పటికీ మనం ఇలాంటి స్థూపాలను గూర్చి మాత్రమే నేర్చుకోబోతున్నాం (పటం11.27)



పటం 11.27

(ఇది క్రమ వృత్తాకార స్థూపం కాదు)

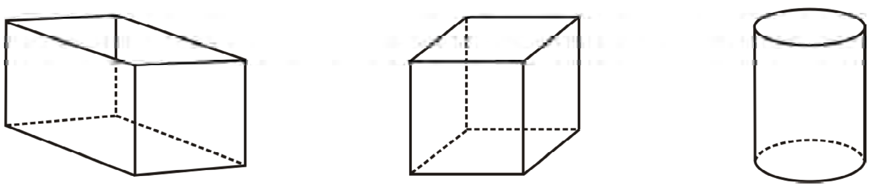
ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.



ఇక్కడ పటంలో గల ఘనాకారాన్ని స్థూపం అని అంటే ఎందుకు తప్పవుతుంది?

11.7 ఘనం, దీర్ఘ ఘనం మరియు స్థూపంల ఉపరితల వైశాల్యం

ఇమ్రాన్, మోనిక మరియు జస్ప్రీత్ ముగ్గురూ వరుసగా ఒకే ఎత్తుగల దీర్ఘఘనం, సమఘనం మరియు స్థూపాకార పెట్టెలకు రంగు వేస్తున్నారు (పటం 11.28).



పటం 11.28

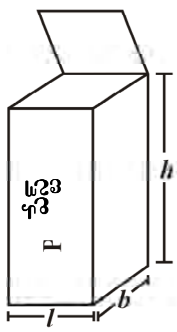
వారిలో ఎవరు ఎక్కువ ప్రదేశానికి రంగు వేశారని తెలుసుకొనడానికి వారు ప్రయత్నిస్తున్నారు. ప్రతి పెట్టె ఉపరితలం వైశాల్యమును కనుగొనుట ద్వారా అది సాధ్యమవుతుందని హరి సూచించాడు.

సంపూర్ణ తల వైశాల్యం కనుగొనుటకు, ప్రతీ తలం వైశాల్యం కనుగొని, వాటిని కలపాలి. ఒక ఘనం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం దాని అన్ని తలాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. ఇంకా మరింత స్పష్టంగా తెలుసుకోవడానికి ప్రతి ఒక ఆకారాన్ని ఒక్కొక్కటిగా తీసుకుందాం.

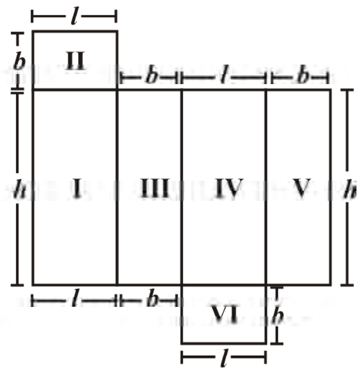
11.7.1 దీర్ఘ ఘనం

మనం ఒక దీర్ఘఘనాకారంలో ఉన్న పెట్టెను (పటం11.29) కత్తిరించి నేలమీద పూర్తిగా పరిచినట్లుగా ఉంచాం అనుకుందాం. క్రింది చూపినవిధంగా ఆ పెట్టె యొక్క వల రూపం ఉంటుంది (పటం 11.30).

ప్రతి ఒక భుజం కొలతను రాయండి. దీర్ఘ ఘనమునకు మూడు జతల సర్వసమానమైన తలములు ఉంటాయని మీకు తెలుసు. ప్రతీ తలము వైశాల్యము కనుగొనడానికి మీరు ఏ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తారు?



పటం 11.29



పటం 11.30

పెట్టె యొక్క అన్ని ముఖముల మొత్తం వైశాల్యం కనుగొనండి. దీర్ఘ ఘనం సంపూర్ణ తల వైశాల్యం = వైశాల్యంI + వైశాల్యం II + వైశాల్యం III + వైశాల్యం IV + వైశాల్యం V + వైశాల్యం VI $= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$ అని గమనించవచ్చు.

So total surface area = $2\,(h \times l + b \times h + b \times l) = 2(lb + bh + hl)$

where h, l and b are the height, length and width of the cuboid respectively.

Suppose the height, length and width of the box shown above are 20 cm, 15 cm and 10 cm respectively.

Then the total surface area = $2\,(20 \times 15 + 20 \times 10 + 10 \times 15)$

$= 2\,(300 + 200 + 150) = 1300\ \text{m}^2$.

TRY THESE

Find the total surface area of the following cuboids (Fig 11.31):

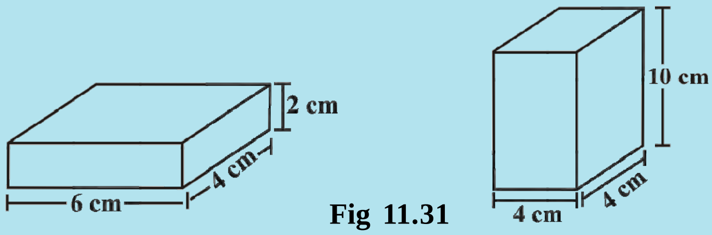


Fig 11.31

- The side walls (the faces excluding the top and bottom) make the lateral surface area of the cuboid. For example, the total area of all the four walls of the cuboidal room in which you are sitting is the lateral surface area of this room (Fig 11.32). Hence, the lateral surface area of a cuboid is given by $2(h \times l + b \times h)$ or $2h\,(l + b)$.

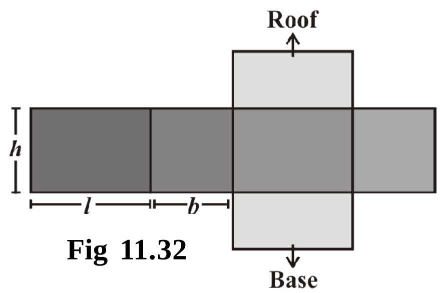


Fig 11.32

DO THIS

(i) Cover the lateral surface of a cuboidal duster (which your teacher uses in the class room) using a strip of brown sheet of paper, such that it just fits around the surface. Remove the paper. Measure the area of the paper. Is it the lateral surface area of the duster?

(ii) Measure length, width and height of your classroom and find
   (a) the total surface area of the room, ignoring the area of windows and doors.
   (b) the lateral surface area of this room.
   (c) the total area of the room which is to be white washed.

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. Can we say that the total surface area of cuboid = lateral surface area + 2 × area of base?
2. If we interchange the lengths of the base and the height of a cuboid (Fig 11.33(i)) to get another cuboid (Fig 11.33(ii)), will its lateral surface area change?

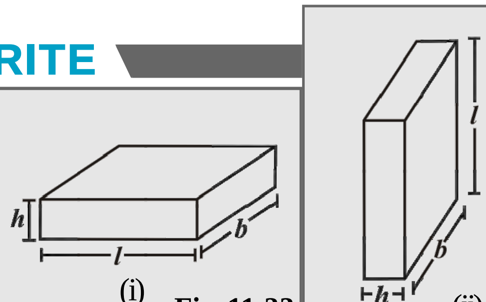


Fig 11.33

కావున దీర్ఘఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l) = 2(lb + bh + hl)$

ఇచ్చట h, l మరియు b లు వరుసగా దీర్ఘఘనం యొక్క ఎత్తు, పొడవు మరియు వెడల్పు.

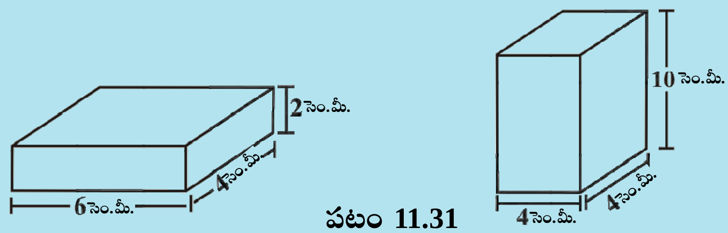
పైన చూపిన పెట్టె ఎత్తు, పొడవు మరియు వెడల్పు వరుసగా 20సెం.మీ. 15 సెం.మీ మరియు 10సెం.మీ అనుకుందాం.

అపుడు సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\,(20 \times 15 + 20 \times 10 + 10 \times 15)$

$= 2\,(300 + 200 + 150) = 1300$ మీ.^{2}.

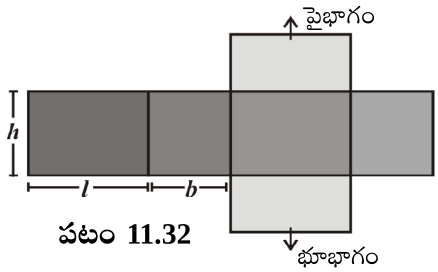
ప్రయత్నించండి

ఇవ్వబడిన దీర్ఘ ఘనాల సంపూర్ణతల వైశాల్యాలను కనుగొనండి (పటం 11.31):



పటం 11.31

- దీర్ఘఘనం యొక్క ప్రక్క తలాలు (పై భాగం మరియు అడుగుభాగం మినహాయించి) అన్నీ కలిసి దాని ప్రక్కతల వైశాల్యాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. ఉదాహరణకు, మీరు కూర్చున్న దీర్ఘ ఘనాకార గది యొక్క నాలుగు గోడల మొత్తం వైశాల్యం ఆ గది యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం అవుతుంది. (పటం 11.32) కావున దీర్ఘ ఘన ప్రక్క తల వైశాల్యం $= 2(h \times l + b \times h)$ లేదా $2h\,(l + b)$ అని ఇవ్వబడినది.



పటం 11.32

ఇవి చేయండి

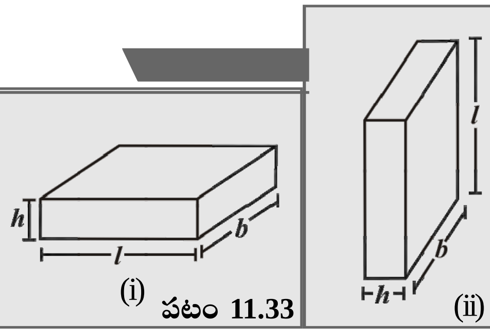
(i) మీ ఉపాధ్యాయుడు ఉపయోగించే దీర్ఘఘనాకార డస్టర్ తీసుకోండి. ఒక గోధుమరంగు కాగితంతో డస్టర్ ప్రక్క తలాలను కొంచెం కూడా హెచ్చు తగ్గులు కాకుండా చుట్టండి. ఇప్పుడు ఆ కాగితంను తొలగించి, దాని వైశాల్యం కనుగొనండి. ఇది డస్టర్ యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం అవుతుందా?

(ii) మీ తరగతి గది యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను కొలిచి, క్రింది వాటిని కనుగొనండి.
  (a) కిటికీ, తలుపులను పరిగణనలోనికి తీసుకోకుండా గది యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం.
  (b) గది యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం.
  (c) గదిలో సున్నము వేయవలసిన ప్రాంత మొత్తం వైశాల్యం.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి

1. దీర్ఘ ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = దాని ప్రక్కతల వైశాల్యం + (2 × భూ వైశాల్యం) అని మనం చెప్పగలమా?

2. ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క భూమి మరియు ఎత్తులను పరస్పరం మార్చి (పటం 11.33 (i)) మరొక దీర్ఘ ఘనం (పటం 11.33 (ii))ను పొందితే దాని ప్రక్క తల వైశాల్యం మారుతుందా?



పటం 11.33

11.7.2 Cube

DO THIS

Draw the pattern shown on a squared paper and cut it out [Fig 11.34(i)]. (You know that this pattern is a net of a cube. Fold it along the lines [Fig 11.34(ii)] and tape the edges to form a cube [Fig 11.34(iii)].

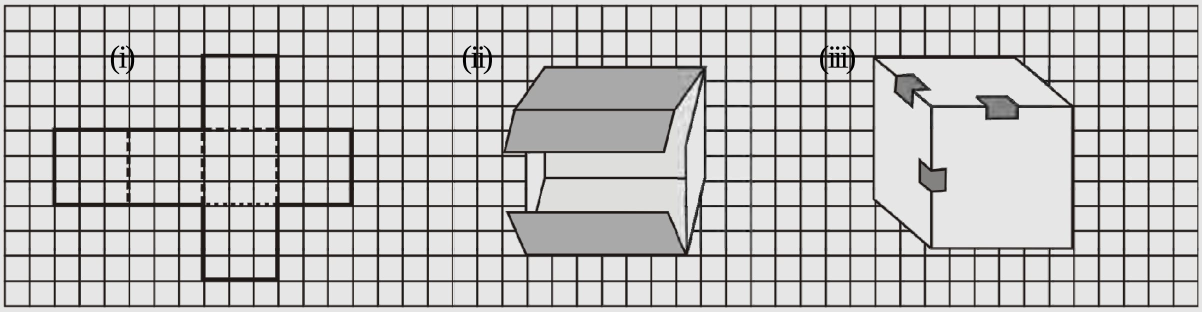
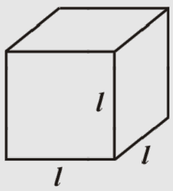
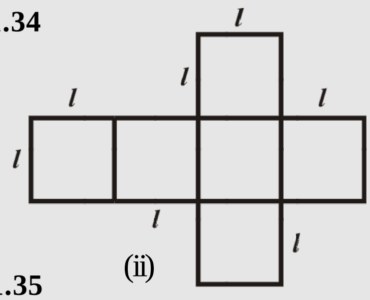


Fig 11.34



(i)



(ii)

Fig 11.35

(a) What is the length, width and height of the cube? Observe that all the faces of a cube are square in shape. This makes length, height and width of a cube equal (Fig 11.35(i)).

(b) Write the area of each of the faces. Are they equal?

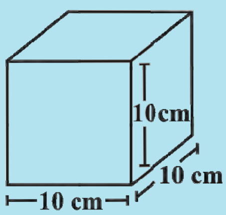
(c) Write the total surface area of this cube.

(d) If each side of the cube is l, what will be the area of each face? (Fig 11.35(ii)).

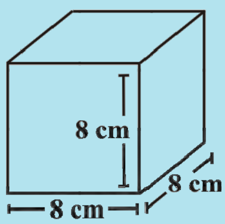
Can we say that the total surface area of a cube of side l is $6l^2$?

TRY THESE

Find the surface area of cube A and lateral surface area of cube B (Fig 11.36).



A



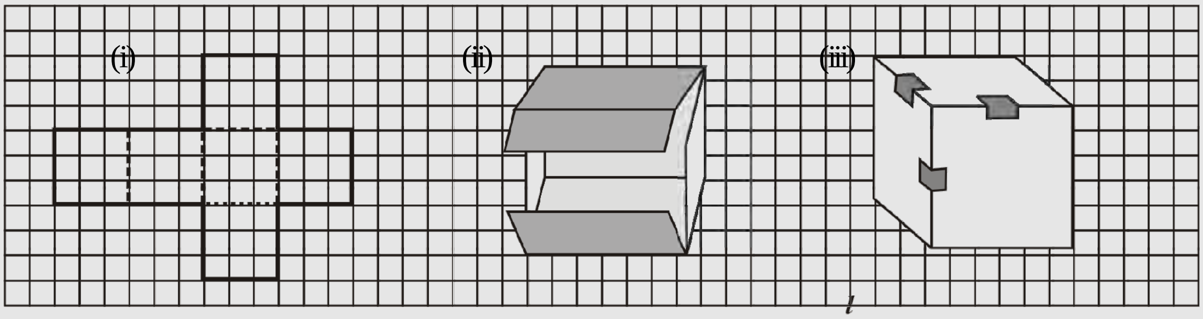
B

Fig 11.36

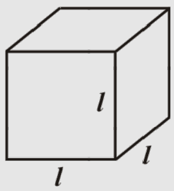
11.7.2 సమ ఘనం

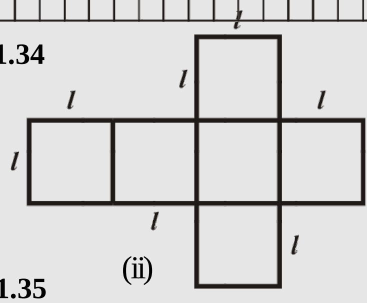
ఇవి చేయండి

గళ్ళ కాగితము పై ఈ ఆకారాన్ని గీచి కత్తిరించండి. [పటం 11.34 (i)] ఈ ఆకారం ఘనం యొక్క వల చిత్రం అని మీకు తెలుసు. దానిని గీతల వెంబడి మడిచి [పటం 11.34(ii)] అది ఒక సమఘనం అయ్యేటట్లు అంచులను అతికించండి. [పటం 11.34(iii)].



పటం 11.34





పటం 11.35

(a) ఈ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు ఎంత? ఒక సమ ఘనం యొక్క అన్ని ముఖాలు చతురస్రాలు అని గమనించండి. అందువలన ఒక సమ ఘనం యొక్క పొడవు, ఎత్తు మరియు వెడల్పు సమానం అవుతాయి (పటం 11.35(i)).

(b) ప్రతి ముఖం వైశాల్యం రాయండి. అవి సమానమా?

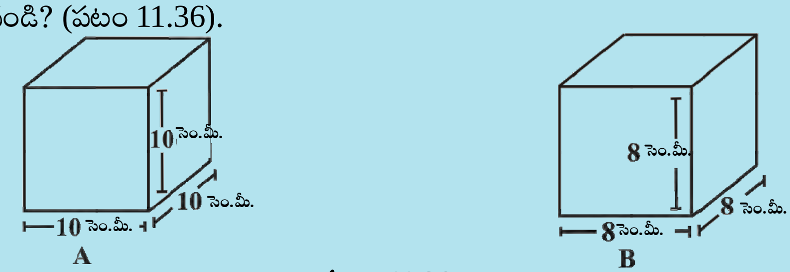
(c) ఈ సమ ఘనం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం రాయండి.

(d) సమ ఘనం యొక్క ప్రతీ అంచు l అయితే. ప్రతి తలం వైశాల్యం ఎంత అవుతుంది? (పటం 11.35(ii)).

అంచు l గా గలిగిన సమ ఘనం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం $6l^2$ అని చెప్పగలమా?

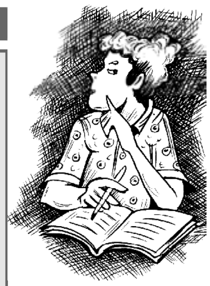
ప్రయత్నించండి

సమఘనం A యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం మరియు సమఘనం B యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యంను కనుగొనండి? (పటం 11.36).



పటం 11.36

THINK, DISCUSS AND WRITE



(i) Two cubes each with side *b* are joined to form a cuboid (Fig 11.37). What is the surface area of this cuboid? Is it $12b^2$? Is the surface area of cuboid formed by joining three such cubes, $18b^2$? Why?

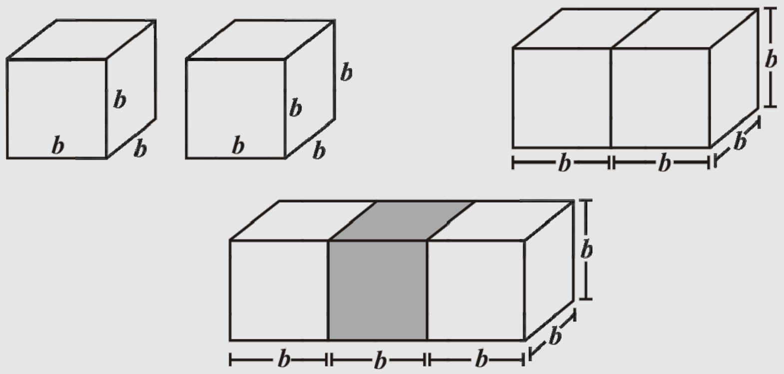


Fig 11.37

(ii) How will you arrange 12 cubes of equal length to form a cuboid of smallest surface area?

(iii) After the surface area of a cube is painted, the cube is cut into 64 smaller cubes of same dimensions (Fig 11.38). How many have no face painted? 1 face painted? 2 faces painted? 3 faces painted?

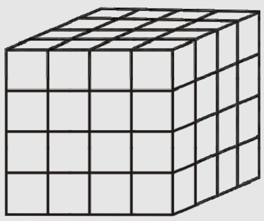


Fig 11.38

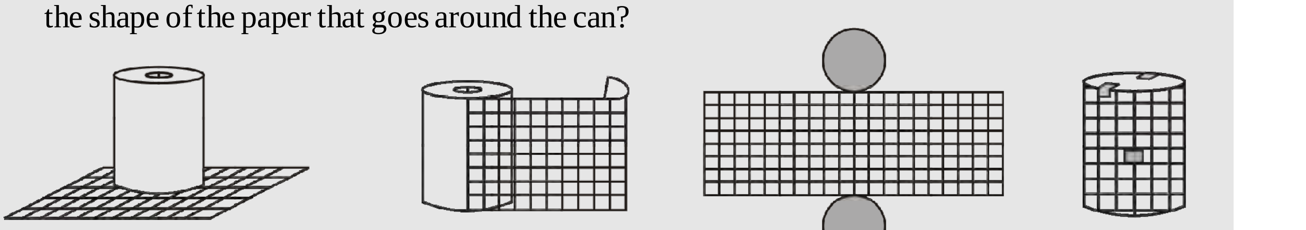
11.7.3 Cylinders

Most of the cylinders we observe are right circular cylinders. For example, a tin, round pillars, tube lights, water pipes etc.

DO THIS

(i) Take a cylindrical can or box and trace the base of the can on graph paper and cut it [Fig 11.39(i)]. Take another graph paper in such a way that its width is equal to the height of the can. Wrap the strip around the can such that it just fits around the can (remove the excess paper) [Fig 11.39(ii)].

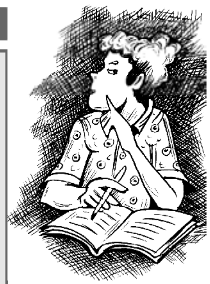
Tape the pieces [Fig 11.39(iii)] together to form a cylinder [Fig 11.39(iv)]. What is the shape of the paper that goes around the can?



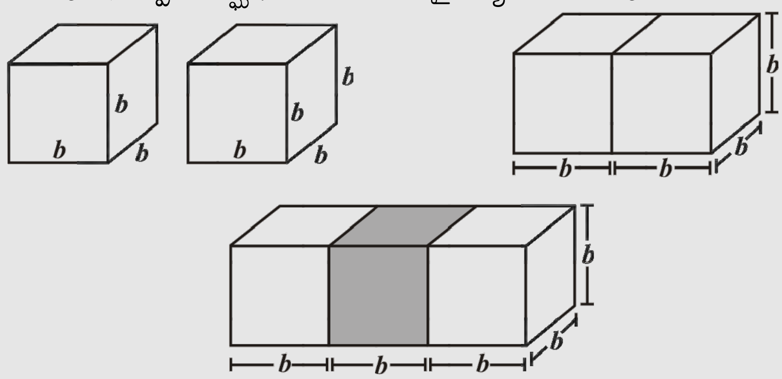
(i) (ii) (iii) (iv)

Fig 11.39

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.



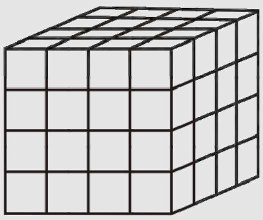
(i) ప్రతి భుజం b గా గల రెండు సమఘనాలను జోడించి దీర్ఘ ఘనం చేశారు (పటం 11.37). ఈ దీర్ఘ ఘనం ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత? ఇది $12b^2$ అవుతుందా? ఇలాంటి మూడు సమ ఘనములను జోడించినపుడు, ఏర్పడు దీర్ఘ ఘనం ఉపరితల వైశాల్యం $18b^2$ అవుతుందా? ఎందుకు?



పటం 11.37

(ii) సమాన పొడవు గల 12 సమ ఘనములను కనిష్ట ఉపరితల వైశాల్యం వచ్చే ఒక దీర్ఘ ఘనాన్ని ఏవిధంగా అమర్చగలవు?

(iii) ఒక సమ ఘనము యొక్క ఉపరితలానికి రంగు వేసిన తరువాత ఆ ఘనమును సమానమైన 64 చిన్న సమఘనములుగా విభజించారు (పటం 11.38). వీటిలో ఎన్నింటికి ఒక్క ముఖానికీ రంగు వేయబడి ఉండదు? ఒక ముఖానికి రంగు వేయబడి ఉంటుంది? 2 ముఖాలకు రంగు వేయబడి ఉంటుంది? 3 ముఖాలకు రంగు వేయబడి ఉంటుంది?



పటం 11.38

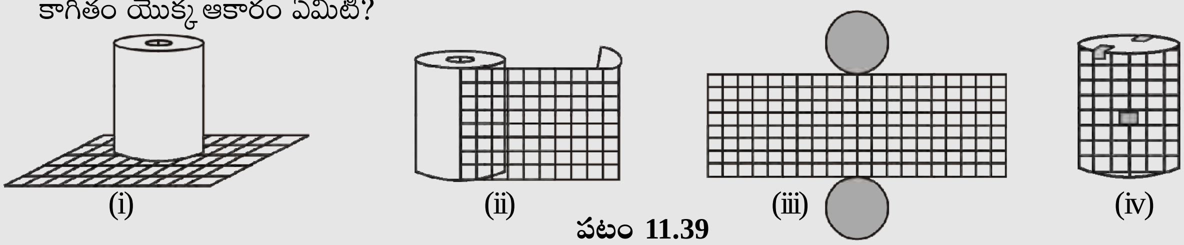
1.7.3 స్థూపాలు

మనం పరిశీలించే స్థూపాలలో ఎక్కువగా క్రమ వృత్తాకార స్థూపములే. ఉదాహరణకు ఒక గుండ్రటి సీసా, గుండ్రటి స్థంభం, ట్యూబ్‌లైట్‌లు , నీటి పైపులు మొదలగునవి.

ఇవి చేయండి

(i) ఒక స్థూపాకార డబ్బా లేదా పెట్టె తీసుకుని ఒక గ్రాఫ్ కాగితం పై డబ్బా క్రింది భాగం అంచుల వెంబడి గీసి, కాగితాన్ని కత్తిరించండి [పటం 11.39(i)]. ఇప్పుడు డబ్బా పొడవుకు, గ్రాఫ్ కాగితం వెడల్పు సమానంగా ఉండేటట్లు మరొక గ్రాఫ్ కాగితాన్ని తీసుకోండి. స్థూపం వక్రతలం పూర్తిగా కప్పబడి ఉండేటట్లు దానిని చుట్టండి. (అదనంగా ఉన్న కాగితాన్ని తొలగించండి) [పటం 11.39 (ii)].

ఈ కాగితపు ముక్కలను [పటం 11.39(iii)] స్థూపం ఏర్పడేలా అతికించి పటంలో చూపినవిధంగా ఒక స్థూపాన్ని [పటం 11.39(iv)] తయారు చేయండి. స్థూపమును చుట్టిన కాగితం యొక్క ఆకారం ఏమిటి?



(i) (ii) (iii) (iv)

పటం 11.39

Of course it is rectangular in shape. When you tape the parts of this cylinder together, the length of the rectangular strip is equal to the circumference of the circle. Record the radius (r) of the circular base, length (l) and width (h) of the rectangular strip. Is $2\pi r$ = length of the strip. Check if the area of rectangular strip is $2\pi rh$. Count how many square units of the squared paper are used to form the cylinder. Check if this count is approximately equal to $2\pi r(r + h)$.

(ii) We can deduce the relation $2\pi r(r + h)$ as the surface area of a cylinder in another way. Imagine cutting up a cylinder as shown below (Fig 11.40).

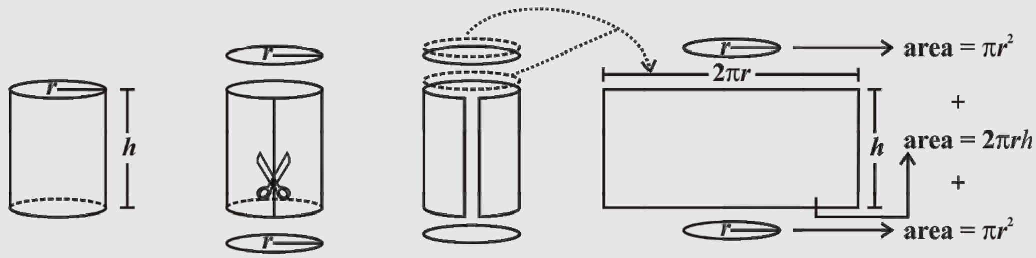


Fig 11.40

Note: We take π to be $\frac{22}{7}$ unless otherwise stated.

The lateral (or curved) surface area of a cylinder is $2\pi rh$.

The total surface area of a cylinder $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ or $2\pi r(r + h)$

TRY THESE

Find total surface area of the following cylinders (Fig 11.41)

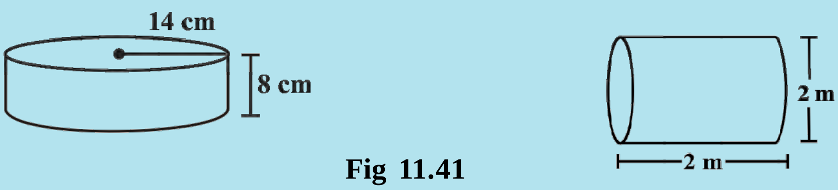


Fig 11.41

THINK, DISCUSS AND WRITE

Note that lateral surface area of a cylinder is the circumference of base × height of cylinder. Can we write lateral surface area of a cuboid as perimeter of base × height of cuboid?

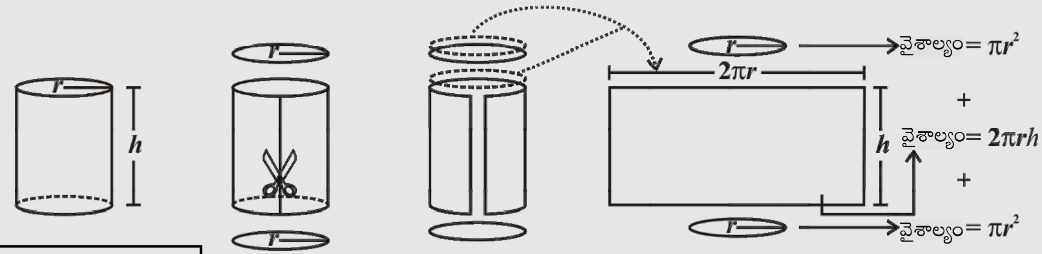
Example 4: An aquarium is in the form of a cuboid whose external measures are 80 cm × 30 cm × 40 cm. The base, side faces and back face are to be covered with a coloured paper. Find the area of the paper needed?

Solution: The length of the aquarium $= l = 80$ cm

Width of the aquarium $= b = 30$ cm

ఇది దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో ఉంటుంది. గ్రాఫ్ కాగితపు చివరలను అతికించి ఏర్పరచిన స్థూపం యొక్క భూమి వృత్తాకారంలో ఉండి, దాని పరిధి ఈ దీర్ఘ చతురస్రాకార పట్టీ పొడవుకు సమానంగా ఉంటుంది. వృత్తాకారంలో ఉన్న భూవ్యాసార్ధం (r), దీర్ఘ చతురస్రాకార గ్రాఫ్ కాగితపు పొడవు (l) మరియు వెడల్పు (h) లను గుర్తించండి. ఈ కాగితపు పట్టీ పొడవు = $2\pi r$ అగునా? ఈ దీర్ఘచతురస్రాకార పట్టీ వైశాల్యము $2\pi rh$ కు సమానమవుతుందేమో సరిచూడండి. స్థూపం ఏర్పడటానికి ఉపయోగపడిన గ్రాఫ్ కాగితంలోని గళ్ళను లెక్కించండి. ఈ సంఖ్య దాదాపు $2\pi r(r + h)$ కు సమానంగా ఉన్నదేమో సరిచూడండి.

(ii) స్థూపం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం $2\pi r(r + h)$ అని మరొక పద్ధతిలో కూడా రాబట్టవచ్చు. ఒక స్థూపాన్ని క్రింది చూపినవిధంగా కత్తిరించినట్లుగా ఊహించండి (పటం 11.40).



పటం 11.40

సూచన: ప్రత్యేకించి చెప్పనట్లయితే మనం π ను $\frac{22}{7}$ గా తీసుకుంటాం.

స్థూపం ప్రక్క (లేదా వక్ర) తల వైశాల్యం $2\pi rh$.

స్థూపం సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ లేదా $2\pi r(r + h)$

ప్రయత్నించండి

క్రింది స్థూపముల సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనండి. (పటం 11.41)

పటం 11.41

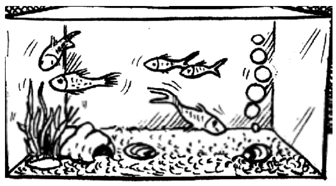
ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.

ఒక స్థూపం ప్రక్కతల వైశాల్యం, స్థూపం యొక్క భూ పరిధి × దాని ఎత్తు అని గమనించండి. ఒక దీర్ఘ ఘనం ప్రక్క తల వైశాల్యంను భూచుట్టు కొలత × దాని ఎత్తు అని రాయగలమా?

ఉదాహరణ 4: దీర్ఘ ఘనాకారంలో గల ఒక అక్వేరియం బాహ్య కొలతలు 80సెం.మీ × 30 సెం.మీ × 49 సెం.మీ. దాని అడుగు భాగం రెండు ప్రక్క ముఖములు మరియు వెనుక ముఖాన్ని ఒక రంగు కాగితంతో చుట్టాలి. అందుకు కావలసిన కాగితపు వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: అక్వేరియం పొడవు $= l = 80$ సెం.మీ

అక్వేరియం వెడల్పు $= b = 30$ సెం.మీ



Height of the aquarium = h = 40 cm

Area of the base = $l \times b = 80 \times 30 = 2400$ cm^2

Area of the side face = $b \times h = 30 \times 40 = 1200$ cm^2

Area of the back face = $l \times h = 80 \times 40 = 3200$ cm^2

Required area = Area of the base + area of the back face + (2 × area of a side face)

= 2400 + 3200 + (2 × 1200) = 8000 cm^2

Hence the area of the coloured paper required is 8000 cm^2.

Example 5: The internal measures of a cuboidal room are 12 m × 8 m × 4 m. Find the total cost of whitewashing all four walls of a room, if the cost of white washing is ` 5 per m^2. What will be the cost of white washing if the ceiling of the room is also whitewashed.

Solution: Let the length of the room = l = 12 m

Width of the room = b = 8 m

Height of the room = h = 4 m

Area of the four walls of the room = Perimeter of the base × Height of the room

= $2(l + b) \times h = 2(12 + 8) \times 4$

= $2 \times 20 \times 4 = 160$ m^2.

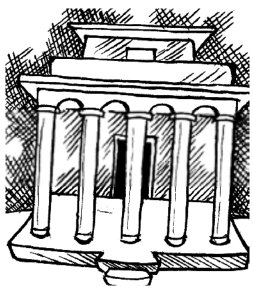
Cost of white washing per m^2 = ` 5

Hence the total cost of white washing four walls of the room = ` (160 × 5) = ` 800

Area of ceiling is 12 × 8 = 96 m^2

Cost of white washing the ceiling = ` (96 × 5) = ` 480

So the total cost of white washing = ` (800 + 480) = ` 1280



Example 6: In a building there are 24 cylindrical pillars. The radius of each pillar is 28 cm and height is 4 m. Find the total cost of painting the curved surface area of all pillars at the rate of ` 8 per m^2.

Solution: Radius of cylindrical pillar, r = 28 cm = 0.28 m

height, h = 4 m

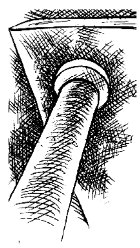
curved surface area of a cylinder = $2\pi rh$

curved surface area of a pillar = $2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04$ m^2

curved surface area of 24 such pillar = 7.04 × 24 = 168.96 m^2

cost of painting an area of 1 m^2 = ` 8

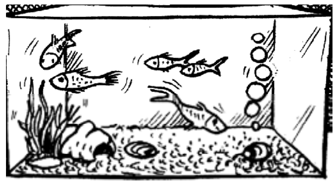
Therefore, cost of painting 168.96 m^2 = 168.96 × 8 = ` 1351.68



Example 7: Find the height of a cylinder whose radius is 7 cm and the total surface area is 968 cm^2.

Solution: Let height of the cylinder = h, radius = r = 7cm

Total surface area = $2\pi r(h + r)$



అక్వేరియం ఎత్తు = $h = 40$ సెం.మీ.

దాని భూ వైశాల్యం = $l \times b = 80 \times 30 = 2400$ సెం.మీ.^{2}

ప్రక్కముఖ వైశాల్యం = $b \times h = 30 \times 40 = 1200$ సెం.మీ.^{2}

వెనుక ముఖము వైశాల్యం = $l \times h = 80 \times 40 = 3200$ సెం.మీ.^{2}

కావలసిన కాగితపు వైశాల్యం = భూవైశాల్యం + వెనుక ముఖ వైశాల్యం

+ (2 × ప్రక్క ముఖ వైశాల్యం)

= 2400 + 3200 + (2 × 1200) = 8000 చ.సెం.మీ.

అందువలన కావలసిన రంగు కాగితం యొక్క వైశాల్యం = 8000 చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 5: దీర్ఘ ఘనాకారంలో గల ఒక గది లోపలి కొలతలు 12మీ × 8మీ × 4మీ గా ఉన్నాయి. సున్నం వేయడానికి ఒక చదరపు మీటర్‌కు ` 5 ఖర్చు అయితే గది నాలుగు గోడలకు సున్నం వేయడానికి ఎంత ఖర్చు అవుతుంది? అలాగే గది పై కప్పుకు కూడా సున్నం వేస్తే మొత్తం ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

సాధన: గది పొడవు = $l = 12$ మీ.

గది వెడల్పు = $b = 8$ మీ.

గది ఎత్తు = $h = 4$ మీ.

గది నాలుగు గోడల వైశాల్యం = భూ చుట్టు కొలత × గది ఎత్తు

$= 2\,(l + b) \times h = 2\,(12 + 8) \times 4$

$= 2 \times 20 \times 4 = 160$ మీ^{2}.

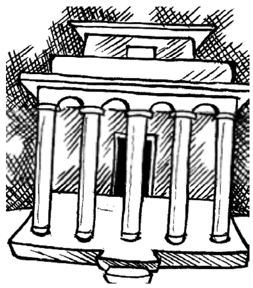
గదికి సున్నం వేయడానికి చ.మీ.కు అయ్యే ఖర్చు = ` 5

అందువలన మొత్తం నాలుగు గోడలకు సున్నం వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ` (160 × 5) = ` 800

గది పై కప్పు వైశాల్యం 12 × 8 = 96 మీ.^{2}

గది పై కప్పు సున్నం వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ` (96 × 5) = ` 480

అందువలన సున్నం వేయడానికి అయ్యే మొత్తం ఖర్చు = ` (800 + 480) = ` 1280

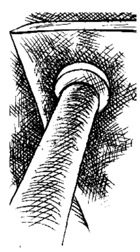


ఉదాహరణ 6: ఒక భవనంలో 24 స్థూపాకార స్థంబాలు ఉన్నాయి. ప్రతీ స్థంబం యొక్క వ్యాసార్థం 28సెం.మీ మరియు ఎత్తు 4మీ. స్థంబాలన్నింటి వక్రతలానికి రంగు వేయడానికి ఒక చదరపు మీటర్‌కు `8 చొప్పున మొత్తం ఎంత ఖర్చు అవుతుందో కనుగొనండి.

సాధన: స్థూపాకార స్థంభం యొక్క వ్యాసార్థము = $r = 28$ సెం.మీ = 0.28 మీ

ఎత్తు $h = 4$ మీ

స్థూపం వక్రతల వైశాల్యం = $2\pi rh$



స్థంభం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం = $2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04$ మీ^{2}

24 స్థంభాల వక్రతల వైశాల్యం= $7.04 \times 24 = 168.96$ మీ^{2}

1 చ.మీ.కు రంగు వేయడానిక అయ్యే ఖర్చు = ` 8

కావున 168.96 చ.మీ.కు రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = 168.96 × 8 = `1351.68

ఉదాహరణ 7: ఒక స్థూపం యొక్క వ్యాసార్థం 7సెం.మీ మరియు దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం 968 చ.సెం.మీ అయితే దాని ఎత్తు కనుగొనుము.

సాధన: స్థూపం యొక్క ఎత్తు = h, వ్యాసార్థము = $r = 7$సెం.మీ.

సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $2\pi r\,(h + r)$

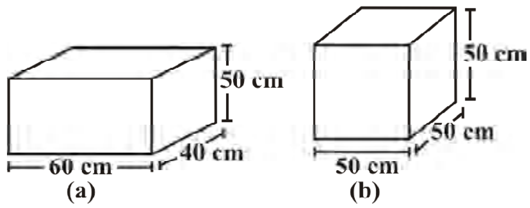
i.e., $$2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + h) = 968$$

$$h = 15 \text{ cm}$$

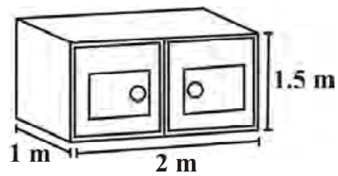
Hence, the height of the cylinder is 15 cm.

EXERCISE 11.3

1. There are two cuboidal boxes as shown in the adjoining figure. Which box requires the lesser amount of material to make?

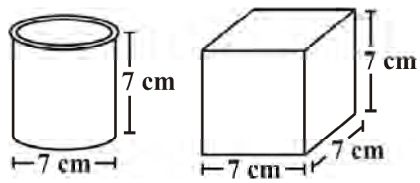


2. A suitcase with measures 80 cm × 48 cm × 24 cm is to be covered with a tarpaulin cloth. How many metres of tarpaulin of width 96 cm is required to cover 100 such suitcases?
3. Find the side of a cube whose surface area is 600 cm^2.

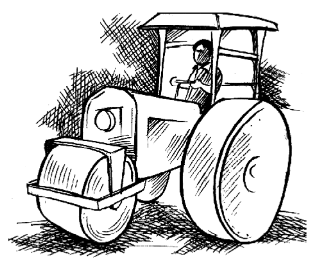


4. Rukhsar painted the outside of the cabinet of measure 1 m × 2 m × 1.5 m. How much surface area did she cover if she painted all except the bottom of the cabinet.
5. Daniel is painting the walls and ceiling of a cuboidal hall with length, breadth and height of 15 m, 10 m and 7 m respectively. From each can of paint 100 m^2 of area is painted.

   How many cans of paint will she need to paint the room?



6. Describe how the two figures at the right are alike and how they are different. Which box has larger lateral surface area?
7. A closed cylindrical tank of radius 7 m and height 3 m is made from a sheet of metal. How much sheet of metal is required?



8. The lateral surface area of a hollow cylinder is 4224 cm^2. It is cut along its height and formed a rectangular sheet of width 33 cm. Find the perimeter of rectangular sheet?
9. A road roller takes 750 complete revolutions to move once over to level a road. Find the area of the road if the diameter of a road roller is 84 cm and length is 1 m.
10. A company packages its milk powder in cylindrical container whose base has a diameter of 14 cm and height 20 cm. Company places a label around the surface of the container (as shown in the figure). If the label is placed 2 cm from top and bottom, what is the area of the label.

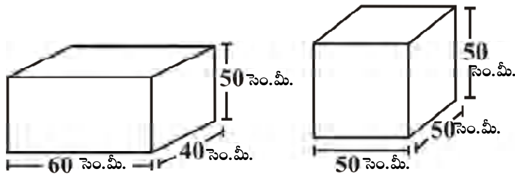
అనగా, $2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + h) = 968$

$h = 15$ సెం.మీ.

కావున, స్థూపం యొక్క ఎత్తు 15 సెం.మీ.

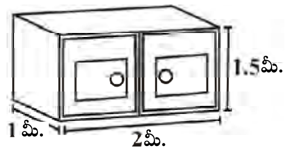
అభ్యాసం 11.3

1. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా రెండు దీర్ఘఘనాకార పెట్టెలు ఉన్నాయి. వీటిలో దేనిని తయారు చేయడానికి తక్కువ పరిమాణంలో సామాగ్రి అవసరమవుతుంది?

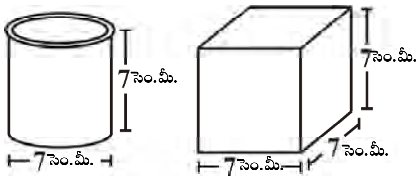


(a) (b)

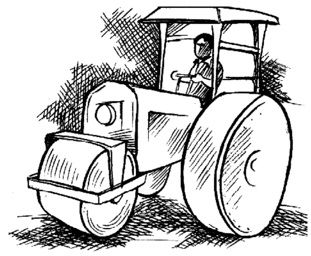
2. 80సెం.మీ × 48 సెం.మీ × 24 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక సూట్‌కేస్‌కు కవర్ కుట్టడానికి టార్పాలిన్ గుడ్డ కావాలి. అలాంటి 100 సూట్‌కేస్‌లకు కవర్ కుట్టడానికి 96సెం.మీ వెడల్పు గల టార్పాలిన్ గుడ్డ ఎంత కావాలి?
3. 600 చ.సెం.మీ. ఉపరితల వైశాల్యము గల ఘనం యొక్క భుజమును కనుగొనండి.
4. రుక్సార్ 1మీ × 2మీ × 1.5 మీ కొలతలు గల పెట్టెకు అడుగుభాగం మినహాయించి మిగిలిన ముఖాలకు రంగు వేసింది. అయితే ఆమె రంగు వేసిన ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత?



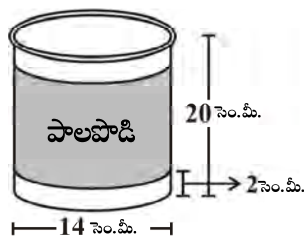
5. పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 15మీ, 10మీ మరియు 7మీ గల ఒక దీర్ఘ ఘనాకార గది గోడలు మరియు పై కప్పుకు డేనియల్ రంగు వేస్తున్నాడు. ఒక్కో పెయింట్ డబ్బాతో 100చ.మీ వైశాల్యానికి రంగు వేస్తే, అలాంటి డబ్బాలు ఎన్ని అవసరం అవుతాయి?
6. కుడివైపున ఇవ్వబడిన రెండు ఆకారాలు ఏవిధంగా సమానంగా లేదా ఏవిధంగా భిన్నంగా ఉన్నాయో వివరించండి? ఏ పెట్టె ఎక్కువ ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉంది?



7. 7మీ. వ్యాసార్థము, 3మీ ఎత్తు గల ఒక మూయబడిన స్థూపాకారపు ట్యాంక్ ఒక లోహపు రేకుతో చేయబడినది. దీనికి ఎంత పరిమాణం గల లోహపు రేకు అవసరం?
8. ఒక గుల్ల స్థూపం యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం 4224 చ.సెం.మీ. దానిని ఎత్తు వెంబడి కత్తిరించి, 33సెం.మీ. వెడల్పు గల దీర్ఘ చతురస్రాకార రేకుగా ఏర్పరచినారు. ఆ దీర్ఘ చతురస్రాకార రేకు యొక్క చుట్టుకొలత కనుగొనుము.



9. ఒక రోడ్డును చదును చేయడానికి దానిపై ఒక రోడ్ రోలర్ 750 పూర్తి భ్రమణాలు చేయవలసి ఉంది. ఆ రోడ్ రోలర్ వ్యాసము 84సెం.మీ. మరియు పొడవు 1మీ. అయితే ఆ రోడ్ వైశాల్యమును కనుగొనుము.
10. ఒక కంపెనీ పాల పొడిని 14సెం.మీ. భూ.వ్యాసం మరియు 20సెం.మీ ఎత్తు కలిగిన స్థూపాకార డబ్బాలలో నింపి ప్యాక్ చేస్తారు. ఆ డబ్బా చుట్టూ వారి లేబుల్‌ను అతికిస్తారు. (పటంలో చూపిన విధంగా) ఆ లేబుల్ డబ్బా పైనుండి మరియు క్రింది నుండి 2 సెం.మీ. వదిలివేస్తూ అతికించినచో, ఆ లేబుల్ వైశాల్యం ఎంత?



11.8 Volume of Cube, Cuboid and Cylinder

Amount of space occupied by a three dimensional object is called its **volume**. Try to compare the volume of objects surrounding you. For example, volume of a room is greater than the volume of an almirah kept inside it. Similarly, volume of your pencil box is greater than the volume of the pen and the eraser kept inside it.

Can you measure volume of either of these objects?

Remember, we use square units to find the area of a region. Here we will use cubic units to find the volume of a solid, as cube is the most convenient solid shape (just as square is the most convenient shape to measure area of a region).

For finding the area we divide the region into square units, similarly, to find the volume of a solid we need to divide it into cubical units.

Observe that the volume of each of the adjoining solids is 8 cubic units (Fig 11.42).

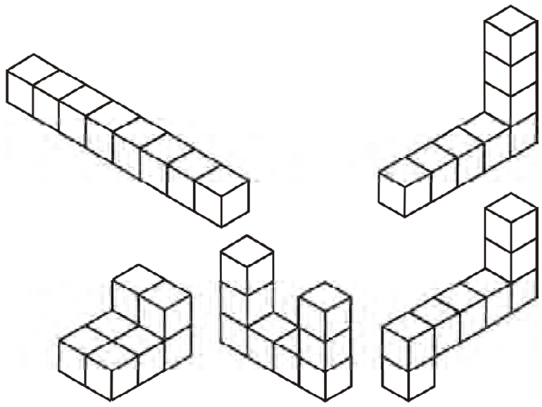


Fig 11.42

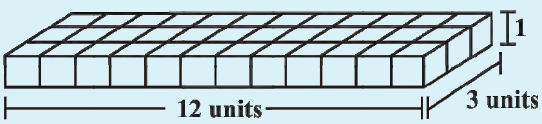
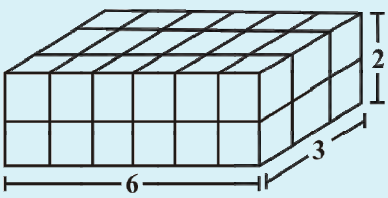
We can say that the volume of a solid is measured by counting the number of unit cubes it contains. Cubic units which we generally use to measure volume are

$$1 \text{ cubic cm} = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$$
$$= 10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ mm}^3$$
$$1 \text{ cubic m} = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^3$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ cm}^3$$
$$1 \text{ cubic mm} = 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} = 1 \text{ mm}^3$$
$$= 0.1 \text{ cm} \times 0.1 \text{ cm} \times 0.1 \text{ cm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ cm}^3$$

We now find some expressions to find volume of a cuboid, cube and cylinder. Let us take each solid one by one.

11.8.1 Cuboid

Take 36 cubes of equal size (i.e., length of each cube is same). Arrange them to form a cuboid. You can arrange them in many ways. Observe the following table and fill in the blanks.

	cuboid	length	breadth	height	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...

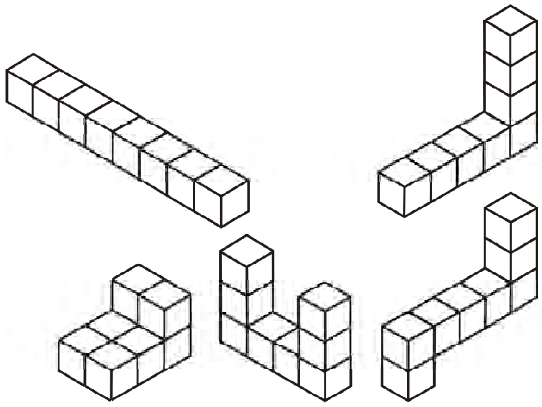
11.8 సమఘనం, దీర్ఘ ఘనం మరియు స్థూపముల ఘనపరిమాణం

త్రిమితీయ వస్తువు అంతరాళంలో ఆక్రమించిన ప్రదేశాన్ని దాని ఘనపరిమాణం అంటారు. మీ చుట్టూ ఉన్న వస్తువుల ఘన పరిమాణాన్ని పోల్చడానికి ప్రయత్నించండి. ఉదాహరణకు, గది ఘన పరిమాణం దాని లోపల ఉంచిన అల్మారా ఘన పరిమాణం కంటే ఎక్కువ. అదేవిధంగా మీ పెన్సిల్‌బాక్స్ ఘనపరిమాణం, దాని లోపల ఉంచిన పెన్ లేదా ఎరేజర్ ఘనపరిమాణం కంటే ఎక్కువగా ఉ ంటుంది. మీరు ఈ వస్తువులలో దేని ఘనపరిమాణంనైనా కొలవగలరా?

మనం ఒక ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి చదరపు యూనిట్లను ఉపయోగిస్తాం అని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఇక్కడ ఘనపు ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనడానికి ఘనపు యూనిట్లను ఉపయోగిస్తాం. ఎందుకంటే సమఘనం అత్యంత అనుకూలమైన ఘన ఆకారం (ఒక ప్రదేశాన్ని కొలవడానికి అత్యంత అనుకూలమైన ఆకారం చతురస్రం ఎలాగో ఇది కూడా అలానే).

ఒక ప్రాంత వైశాల్యం కనుగొనుటకు మనం ఆ ప్రాంతాన్ని చదరపు యూనిట్లుగా విభజిస్తాం. అదేవిధంగా ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనడానికి మనం దానిని ఘనపు యూనిట్లుగా విభజించాలి.

ప్రక్కన ఉన్న ప్రతి ఘనం యొక్క ఘనపరిమాణం 8 ఘనపు యూనిట్లు అని గమనించండి (పటం 11.42).



పటం 11.42

ఒక ఘనపు ఘన పరిమాణం అందులో అది కలిగి ఉన్న యూనిట్ ఘనముల ద్వారా కొలవబడుతుందని మనం చెప్పగలం. మనం సాధారణంగా ఘనపరిమాణం కొలవడానికి ఉపయోగించే ఘనపు యూనిట్లు.

1 ఘనపు సెం.మీ = 1 సెం.మీ. × 1 సెం.మీ. × 1 సెం.మీ. = 1 సెం.మీ.^{3}
= 10 మి.మీ. × 10 మి.మీ. × 10 మి.మీ. = ... మి.మీ.^{3}

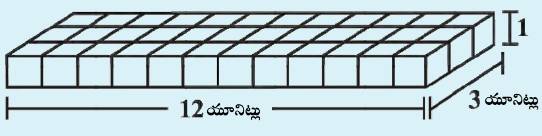
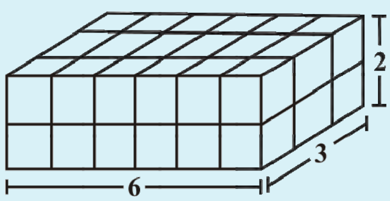
1 ఘనపు మీ = 1 మీ. × 1 మీ. × 1 మీ. = 1 మీ.^{3}
= .... సెం.మీ.^{3}

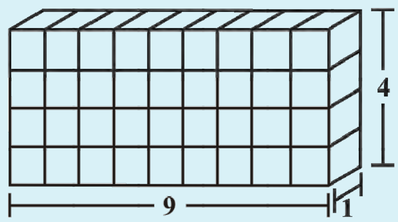
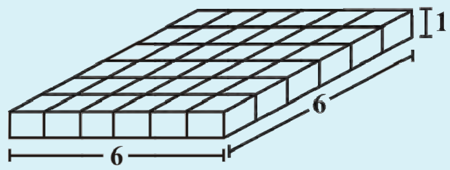
1 ఘనపు మి.మీ = 1 మి.మీ. × 1 మి.మీ. × 1 మి.మీ. = 1 మి.మీ.^{3}
= 0.1 సెం.మీ. × 0.1 సెం.మీ. × 0.1 సెం.మీ. = ...సెం.మీ.^{3}

సమఘనం, దీర్ఘ ఘనం మరియు స్థూపముల ఘనపరిమాణం కనుగొనడానికి మనం ఇప్పుడు కొన్ని సమాసాలను కనుగొంటాం. ఇప్పుడు మనం ప్రతీ ఘనాకారాన్ని ఒక్కొక్కటిగా తీసుకుందాం.

11.8.1 సమ ఘనం

ఒకే పరిమాణం గల 36 సమఘనాలను (అనగా ప్రతీ ఘనం పొడవు సమానం) తీసుకోండి. వాటితో దీర్ఘ ఘనం ఏర్పాటు చేయండి. మీరు వాటిని అనేక విధాలుగా అమర్చవచ్చు. క్రింది పట్టిక గమనించి ఖాళీలను పూరించండి.

	ఘనం	పొడవు	వెడల్పు	ఎత్తు	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	12 × 3 × 1 = 36
(ii)		...	...	...	...

(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

What do you observe?

Since we have used 36 cubes to form these cuboids, volume of each cuboid is 36 cubic units. Also volume of each cuboid is equal to the product of length, breadth and height of the cuboid. From the above example we can say volume of cuboid $= l \times b \times h$. Since $l \times b$ is the area of its base we can also say that,

Volume of cuboid = area of the base × height

DO THIS

Take a sheet of paper. Measure its area. Pile up such sheets of paper of same size to make a cuboid (Fig 11.43). Measure the height of this pile. Find the volume of the cuboid by finding the product of the area of the sheet and the height of this pile of sheets.

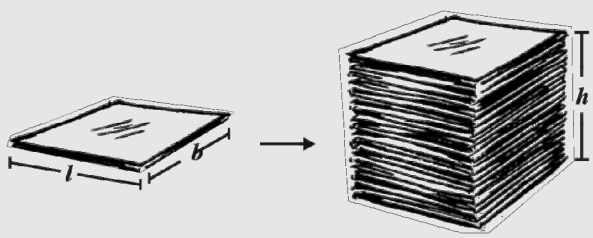


Fig 11.43

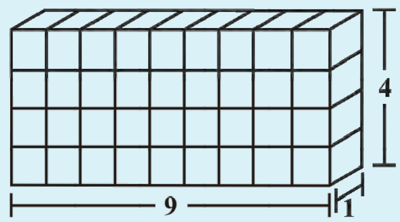
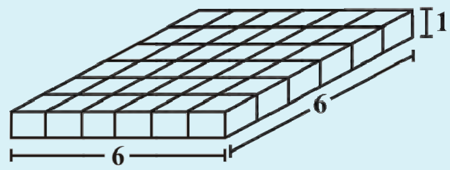
This activity illustrates the idea that volume of a solid can be deduced by this method also (if the base and top of the solid are congruent and parallel to each other and its edges are perpendicular to the base). Can you think of such objects whose volume can be found by using this method?

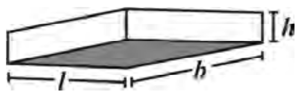
TRY THESE

Find the volume of the following cuboids (Fig 11.44).

(i)

Fig 11.44

(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

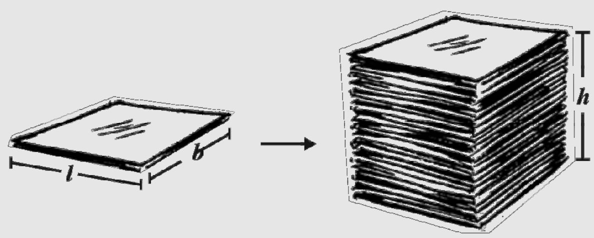


మీరు ఏమి గమనించారు?

ఈ దీర్ఘఘనంను రూపొందించడానికి మనం 36 సమ ఘనాలను ఉపయోగించాం. కాబట్టి ప్రతి దీర్ఘ ఘనం ఘనపరిమాణం 36 ఘనపు యూనిట్లు. అలాగే ప్రతి దీర్ఘ ఘనపు ఘనపరిమాణం దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు యొక్క లబ్ధానికి సమానం. పై ఉదాహరణ నుండి దీర్ఘ ఘనం ఘనపరిమాణం $= l \times b \times h$. అని చెప్పవచ్చు. $l \times b$ అనేది దాని భూమి యొక్క వైశాల్యం కాబట్టి దీర్ఘ ఘనపరిమాణం = భూవైశాల్యం × ఎత్తు అని చెప్పవచ్చు.

ఇవి చేయండి

ఒక కాగితం తీసుకోండి. దాని వైశాల్యాన్ని కొలవండి. దీర్ఘఘనం ను తయారు చేయడానికి అదే పరిమాణంలో ఉన్న కాగితంను దొంతిగా చేయండి. (పటం11.43) ఈ దొంతి ఎత్తును కొలవండి. కాగితం యొక్క వైశాల్యాన్ని మరియు ఈ దొంతి యొక్క ఎత్తుల లబ్ధంను కనుగొనడం ద్వారా దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.



పటం 11.43

ఒక ఘనాకార వస్తువు ఘనపరిమాణాన్ని ఈ పద్ధతిలో కూడా కనుగొనవచ్చు అనే ఆలోచనను ఈ కృత్యం తెలియజేస్తుంది. (ఘనాకార వస్తువు భూమి మరియు పైభాగం ఒకదానికొకటి సర్వసమానం మరియు సమాంతరం, దాని అంచులు భూమికి లంబంగా ఉంటే). ఈ పద్ధతిలో ఘనపరిమాణం కనుగొనగలిగే అటువంటి వస్తువులు మరికొన్ని చెప్పగలవా?

ప్రయత్నించండి

క్రింది ఇవ్వబడిన దీర్ఘ ఘనాల ఘన పరిమాణంను కనుగొనండి (పటం11.44).

(i)

పటం 11.44

11.8.2 Cube

The cube is a special case of a cuboid, where $l = b = h$.
Hence, volume of cube = $l \times l \times l = l^3$

TRY THESE

Find the volume of the following cubes
(a) with a side 4 cm (b) with a side 1.5 m

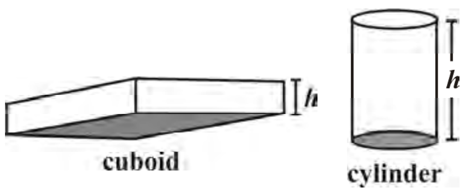
DO THIS

Arrange 64 cubes of equal size in as many ways as you can to form a cuboid. Find the surface area of each arrangement. Can solid shapes of same volume have same surface area?

THINK, DISCUSS AND WRITE

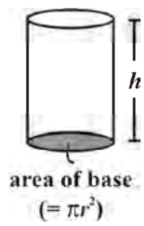
A company sells biscuits. For packing purpose they are using cuboidal boxes: box A $\rightarrow$ 3 cm × 8 cm × 20 cm, box B $\rightarrow$ 4 cm × 12 cm × 10 cm. What size of the box will be economical for the company? Why? Can you suggest any other size (dimensions) which has the same volume but is more economical than these?

11.8.3 Cylinder



We know that volume of a cuboid can be found by finding the product of area of base and its height. Can we find the volume of a cylinder in the same way?

Just like cuboid, cylinder has got a top and a base which are congruent and parallel to each other. Its lateral surface is also perpendicular to the base, just like cuboid.



So the Volume of a cuboid = area of base × height

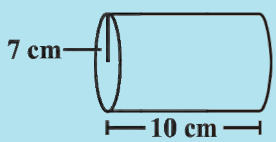
$$= l \times b \times h = lbh$$

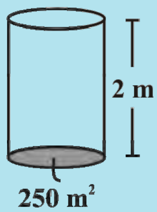
Volume of cylinder = area of base × height

$$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$$

TRY THESE

Find the volume of the following cylinders.

(i)


(ii)


11.8.2 సమఘనం

సమఘనం అనేది దీర్ఘ ఘనం యొక్క ప్రత్యేక రకం. ఇక్కడ $l = b = h$.
అందువలన, సమఘనం ఘనపరిమాణం $= l \times l \times l = l^3$

ప్రయత్నించండి

క్రింది ఘనాల ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.

(a) ఒక భుజం 4సెం.మీ (b) ఒక భుజం 1.5మీ.

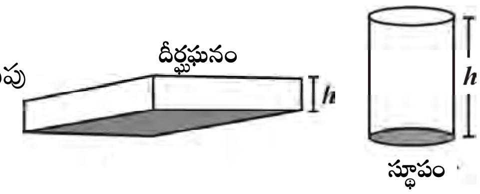
ఇవి చేయండి

సమాన పరిమాణంగల 64 సమఘనాలను ఉపయోగించి మీకు వీలైనన్ని విధాల్లో ఒక దీర్ఘ ఘనంగా అమర్చండి. ప్రతీ అమరిక యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. ఒకే ఘనపరిమాణం గల ఘన ఆకారాలు ఒకే ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉన్నాయా?

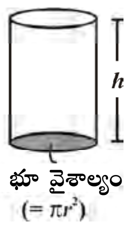
ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.

ఒక కంపెనీ బిస్కెట్లు విక్రయిస్తుంది. ప్యాకింగ్ కోసం వారు దీర్ఘ ఘనాకార పెట్టెలను ఉపయోగిస్తున్నారు. పెట్టెA $\rightarrow$ 3 సెం.మీ. × 8సెం.మీ. ×20 సెం.మీ., పెట్టెB $\rightarrow$ 4 సెం.మీ. × 12 సెం.మీ. × 10 సెం.మీ.. కంపెనీకి ఏ పెట్టె పరిమాణం లాభదాయకంగా ఉంటుంది? ఎందుకు? మీరు అదే ఘనపరిమాణం కలిగి ఉండి వీటి కంటే ఎక్కువ లాభదాయకంగా ఉండే ఏదైనా ఇతర పరిమాణాన్ని (కొలతలు) సూచించగలరా?

11.8.3 స్థూపం



భూ వైశాల్యం మరియు దాని ఎత్తుల లబ్ధాన్ని కనుగొనడం ద్వారా దీర్ఘఘనపు ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనవచ్చని మనకు తెలుసు. మనం అదేవిధంగా స్థూపం ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనగలమా?
దీర్ఘఘనం వలె, స్థూపంకు ఒకదానికొకటి సర్వసమానంగా మరియు సమాంతరంగా ఉండే పైభాగం మరియు భూమి ఉన్నాయి. దీని ప్రక్కతలం కూడా దీర్ఘఘనంలో వలె భూమికి లంబంగా ఉంది.



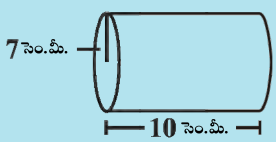
అందువలన దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం = భూ వైశాల్యం × ఎత్తు
$= l \times b \times h = lbh$

స్థూపం ఘనపరిమాణం = భూ వైశాల్యం × ఎత్తు
$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

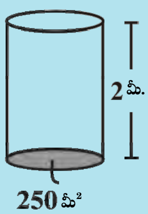
ప్రయత్నించండి

క్రింది స్థూపాల ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.

(i)



(ii)



11.9 Volume and Capacity

There is not much difference between these two words.

(a) Volume refers to the amount of space occupied by an object.

(b) Capacity refers to the quantity that a container holds.

Note: If a water tin holds 100 cm^3 of water then the capacity of the water tin is 100 cm^3.

Capacity is also measured in terms of litres. The relation between litre and cm^3 is, 1 mL = 1 cm^3,1 L = 1000 cm^3. Thus, 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000 L.

Example 8: Find the height of a cuboid whose volume is 275 cm^3 and base area is 25 cm^2.

Solution: Volume of a cuboid = Base area × Height

$$\text{Hence height of the cuboid} = \frac{\text{Volume of cuboid}}{\text{Base area}}$$

$$= \frac{275}{25} = 11 \text{ cm}$$

Height of the cuboid is 11 cm.

Example 9: A godown is in the form of a cuboid of measures 60 m × 40 m × 30 m. How many cuboidal boxes can be stored in it if the volume of one box is 0.8 m^3 ?

Solution: Volume of one box = 0.8 m^3

Volume of godown = 60 × 40 × 30 = 72000 m^3

$$\text{Number of boxes that can be stored in the godown} = \frac{\text{Volume of the godown}}{\text{Volume of one box}}$$

$$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$$

Hence the number of cuboidal boxes that can be stored in the godown is 90,000.

Example 10: A rectangular paper of width 14 cm is rolled along its width and a cylinder of radius 20 cm is formed. Find the volume of the cylinder (Fig 11.45). (Take $\frac{22}{7}$ for π)

Solution: A cylinder is formed by rolling a rectangle about its width. Hence the width of the paper becomes height and radius of the cylinder is 20 cm.

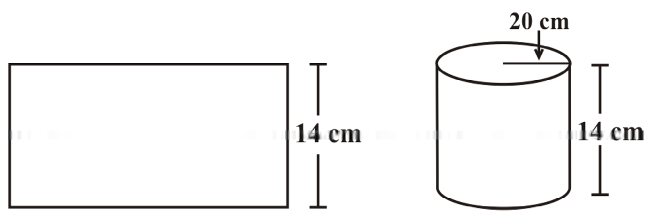


Fig 11.45

Height of the cylinder = h = 14 cm

Radius = r = 20 cm

11.9 ఘన పరిమాణం మరియు సామర్థ్యం

ఈ రెండు పదాల మధ్య పెద్దగా తేడా లేదు.

(a) ఘనపరిమాణం అనేది ఒక వస్తువు అంతరాళంలో ఆక్రమించిన ప్రదేశాన్ని సూచిస్తుంది.

(b) సామర్థ్యం అనేది ఒక పాత్ర పరిమాణాన్ని సూచిస్తుంది.

గమనిక: ఒక నీటి పాత్ర 100 సెం.మీ.^{3} నీటిని కలిగి ఉన్నట్లయితే, నీటి పాత్ర యొక్క సామర్థ్యం 100 సెం.మీ.^{3} సామర్థ్యాన్ని లీటర్ల పరంగా కూడా కొలుస్తారు. లీటర్ మరియు సెం.మీ.^{3} కు మధ్య సంబంధం

1 మి.లీ.= 1 సెం.మీ.^{3},1లీ = 1000 సెం.మీ.^{3}. కావున, 1 మీ.^{3} =1000000 సెం.మీ.^{3} =1000 లీ.

ఉదాహరణ 8: ఘన పరిమాణం 275 సెం.మీ.^{3} మరియు భూ వైశాల్యం 25 చ.సెం.మీ. కలిగిన దీర్ఘ ఘనం ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన: దీర్ఘ ఘనం ఘనపరిమాణం = భూ వైశాల్యం × ఎత్తు

$$\text{కావున దీర్ఘ ఘనం ఎత్తు} = \frac{\text{దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం}}{\text{భూ.వైశాల్యం}}$$

$$= \frac{275}{25} = 11\text{సెం.మీ.}$$

దీర్ఘ ఘనం యొక్క ఎత్తు 11 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 9: ఒక గొడౌన్ 60 మీ. × 40 మీ. × 30 మీ. కొలతలు గల దీర్ఘ ఘనం రూపంలో ఉంది. ఒక పెట్టె ఘన పరిమాణం 0.8 మీ^{3} అయితే అందులో ఎన్ని పెట్టెలను నిల్వ చేయవచ్చు?

సాధన: ఒక పెట్టె ఘనపరిమాణం = 0.8 మీ^{3}

గొడౌన్ ఘనపరిమాణం = $60 \times 40 \times 30 = 72000$ మీ^{3}

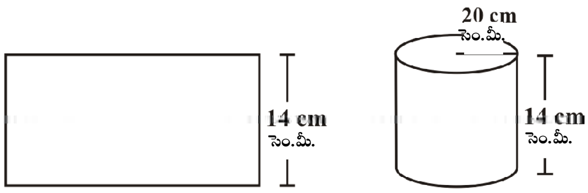
$$\text{గొడౌన్ నిల్వ చేయగల పెట్టెల సంఖ్య} = \frac{\text{గొడౌన్ ఘనపరిమాణం}}{\text{ఒక పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం}}$$

$$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$$

అందువల్ల గొడౌన్‌లో నిల్వ చేయగల పెట్టెల సంఖ్య 90,000.

ఉదాహరణ 10: వెడల్పు 14సెం.మీ.గా గల దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితం దాని వెడల్పు వెంబడి చుట్టబడి 20సెం.మీ. భూ.వ్యాసార్థం కలిగిన స్థూపం ఏర్పడింది. స్థూపం ఘనపరిమాణం కనుగొనండి (పటం 11.45). (π విలువను $\frac{22}{7}$ తీసుకోండి)

సాధన: ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని దాని వెడల్పు వెంబడి చుట్టడం ద్వారా స్థూపం ఏర్పడుతుంది. అందువలన కాగితం వెడల్పు ఎత్తుగా మారుతుంది మరియు స్థూపం భూ వ్యాసార్థం 20సెం.మీ.



పటం 11.45

స్థూపం ఎత్తు = h = 14 సెం.మీ.

వ్యాసార్థం = r = 20 సెం.మీ

$$\text{Volume of the cylinder} = V = \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600 \text{ cm}^3$$

Hence, the volume of the cylinder is 17600 cm^3.

Example 11: A rectangular piece of paper 11 cm × 4 cm is folded without overlapping to make a cylinder of height 4 cm. Find the volume of the cylinder.

Solution: Length of the paper becomes the perimeter of the base of the cylinder and width becomes height.

Let radius of the cylinder = r and height = h

Perimeter of the base of the cylinder = $2\pi r = 11$

or $$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

Therefore, $$r = \frac{7}{4} \text{ cm}$$

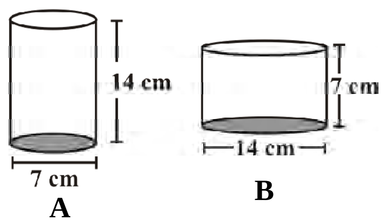
$$\text{Volume of the cylinder} = V = \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3.$$

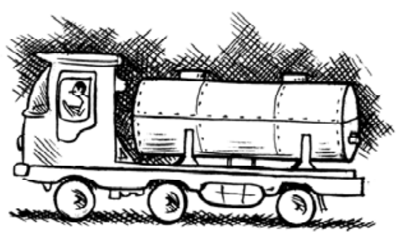
Hence the volume of the cylinder is 38.5 cm^3.

EXERCISE 11.4

1. Given a cylindrical tank, in which situation will you find surface area and in which situation volume.
   (a) To find how much it can hold.
   (b) Number of cement bags required to plaster it.
   (c) To find the number of smaller tanks that can be filled with water from it.
2. Diameter of cylinder A is 7 cm, and the height is 14 cm. Diameter of cylinder B is 14 cm and height is 7 cm. Without doing any calculations can you suggest whose volume is greater? Verify it by finding the volume of both the cylinders. Check whether the cylinder with greater volume also has greater surface area?



3. Find the height of a cuboid whose base area is 180 cm^2 and volume is 900 cm^3?
4. A cuboid is of dimensions 60 cm × 54 cm × 30 cm. How many small cubes with side 6 cm can be placed in the given cuboid?
5. Find the height of the cylinder whose volume is 1.54 m^3 and diameter of the base is 140 cm ?
6. A milk tank is in the form of cylinder whose radius is 1.5 m and length is 7 m. Find the quantity of milk in litres that can be stored in the tank?



7. If each edge of a cube is doubled,
   (i) how many times will its surface area increase?
   (ii) how many times will its volume increase?

స్థూపం ఘనపరిమాణం = $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600 \text{ సెం.మీ.}^3$$

అందువలన, స్థూపం ఘనపరిమాణం 17600 సెం.మీ.^{3}.

ఉదాహరణ 11: 11 సెం.మీ × 4 సెం.మీ. కొలతలు గల దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితం ఒక దానిపై ఒకటి ఆవరించకుండా 4 సెం.మీ.ఎత్తు గల ఒక స్థూపంగా మడవబడింది. స్థూపం ఘనపరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన: కాగితం పొడవు స్థూపం యొక్క భూపరిధి మరియు వెడల్పు స్థూపం ఎత్తుగా మారుతుంది.

స్థూపం యొక్క భూ వ్యాసార్థం = r, ఎత్తు = h అనుకుందాం.

స్థూపం యొక్క భూ పరిధి = $2\pi r = 11$

లేదా $2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$

అందువలన, $r = \frac{7}{4}$ సెం.మీ

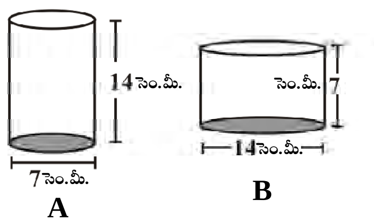
స్థూపం ఘనపరిమాణం = $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ సెం.మీ.}^3 = 38.5 \text{ ఘ.సెం.మీ}$$

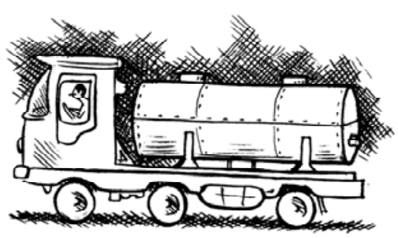
అందువలన స్థూపం యొక్క ఘన పరిమాణం 38.5 ఘ.సెం.మీ.

అభ్యాసం 11.4

1. ఒక స్థూపాకార ట్యాంక్ ఇచ్చినట్లయితే మీరు ఏ సందర్భంలో ఉపరితల వైశాల్యాన్ని మరియు ఏ సందర్భంలో ఘనపరిమాణంను కనుగొంటారు.
   (a) అది ఎంత నిల్వ చేయగలదో కనుగొనడానికి.
   (b) దానిని ప్లాస్టరింగ్ చేయడానికి అవసరమైన సిమెంట్ బస్తాల సంఖ్య కనుగొనడానికి
   (c) దానిలో ఉన్న నీటిని నింపడానికి అవసరమయ్యే చిన్న ట్యాంకుల సంఖ్యను కనుగొనడానికి.
2. స్థూపం A యొక్క వ్యాసం 7సెం.మీ మరియు ఎత్తు 14 సెం.మీ. స్థూపం B యొక్క వ్యాసం 14సెం.మీ మరియు ఎత్తు 7 సెం.మీ. ఎలాంటి గణనలు చేయకుండా దేని ఘన పరిమాణం ఎక్కువో మీరు చెప్పగలరా? రెండు స్థూపాల ఘనపరిమాణం కనుగొనడం ద్వారా ధృవీకరించండి. స్థూపం ఎక్కువ ఘనపరిమాణం కలిగి ఉంటే ఆ స్థూపం ఎక్కువ ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉందేమో సరిచూడండి.

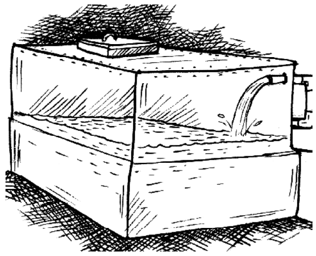


3. భూ వైశాల్యం 180 సెం.మీ.^{2} మరియు ఘనపరిమాణం 900 సెం.మీ.^{3} గా గల స్థూపం ఎత్తును కనుగొనండి.
4. ఒక దీర్ఘ ఘనం కొలతలు 60 సెం.మీ × 54 సెం.మీ × 30 సెం.మీ. ఇందులో భుజం 6 సెం.మీ.గా ఉన్న చిన్న ఘనాలను ఎన్ని ఉంచవచ్చు?
5. ఘనపరిమాణం 1.54 మీ.^{3} మరియు భూ వ్యాసం 140 సెం.మీ ఉన్న స్థూపం ఎత్తును కనుగొనండి?
6. ఒక పాల ట్యాంక్ స్థూపాకారంలో ఉంది, దీని వ్యాసార్థం 1.5మీ. మరియు పొడవు 7మీ. ట్యాంక్‌లో ఎన్ని లీటర్ల పాలను నిల్వ చేయగలమో కనుగొనండి?



7. సమఘనం యొక్క ప్రతి అంచు రెట్టింపు చేస్తే
   (i) దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఎన్ని రెట్లు పెరుగుతుంది?
   (ii) దాని ఘనపరిమాణం ఎన్ని రెట్లు పెరుగుతుంది?

8. Water is pouring into a cubiodal reservoir at the rate of 60 litres per minute. If the volume of reservoir is 108 m^3, find the number of hours it will take to fill the reservoir.



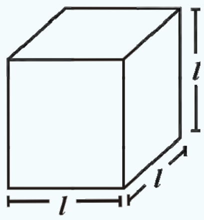
WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Area of

(i) a trapezium = half of the sum of the lengths of parallel sides × perpendicular distance between them.

(ii) a rhombus = half the product of its diagonals.

2. **Surface area** of a solid is the sum of the areas of its faces.



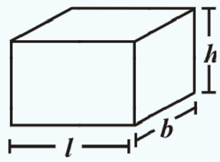
3. Surface area of

a cuboid = $2(lb + bh + hl)$

a cube = $6l^2$

a cylinder = $2\pi r(r + h)$

4. Amount of region occupied by a solid is called its **volume**.

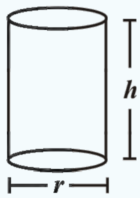


5. Volume of

a cuboid = $l \times b \times h$

a cube = l^3

a cylinder = $\pi r^2 h$

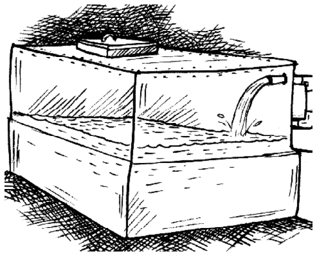


6. (i) 1 cm^3 = 1 mL

(ii) 1L = 1000 cm^3

(iii) 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000L

8. ఒక దీర్ఘ ఘనాకార జలాశయంలోనికి నిమిషానికి 60లీటర్ల వంతున నీరు చేరుతుంది. జలాశయం ఘనపరిమాణం 108 ఘ.మీ. అయిన ఆ జలాశయంను నింపడానికి పట్టే కాలాన్ని గంటలలో కనుగొనండి.



మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. (i) ట్రెపీజియం వైశాల్యం = సమాంతర భుజాల మొత్తంలో సగం × వాని మధ్య లంబదూరం

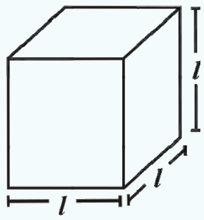
(ii) రాంబస్ వైశాల్యం = కర్ణముల లబ్ధంలో సగం

2. ఘనాకృతుల **ఉపరితల వైశాల్యం** వాని అన్ని తలముల వైశాల్యంల మొత్తానికి సమానం

3. దీర్ఘ ఘనం సంపూర్ణ తల వైశాల్యం = $2(lb + bh + hl)$

సమ ఘనం సంపూర్ణ తల వైశాల్యం = $6l^2$

స్థూపం సంపూర్ణ తల వైశాల్యం = $2\pi r(r + h)$

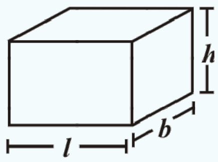


4. ఒక త్రిమితీయ ఆకృతి ఆక్రమించిన ప్రదేశాన్ని **ఘనపరిమాణం** అంటారు.

5. దీర్ఘ ఘనం ఘనపరిమాణం = $l \times b \times h$

సమ ఘనం ఘనపరిమాణం = l^3

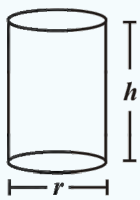
స్థూపం ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$



6. (i) 1 సెం.మీ^{3} = 1 మి.లీ.

(ii) 1లీటర్ = 1000 సెం.మీ.^{3}

(iii) 1 మీ^{3} = 1000000 సెం.మీ.^{3} = 1000 లీటర్లు.



CHAPTER

12

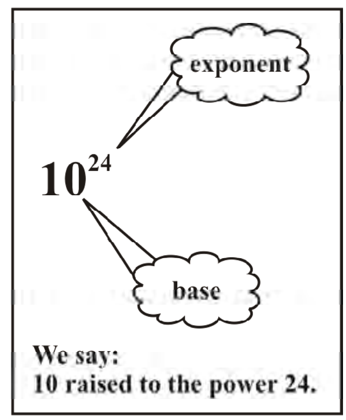
Exponents and Powers

0852CH12

12.1 Introduction

Do you know?

Mass of earth is 5,970,000,000,000, 000, 000, 000, 000 kg. We have already learnt in earlier class how to write such large numbers more conveniently using exponents, as, 5.97×10^{24} kg.



We read 10^{24} as 10 raised to the power 24.

We know $\quad 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

and $\quad 2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times ... \times 2 \times 2 ...$ (m times)

Let us now find what is 2^{-2} is equal to?

Exponent is a negative integer.

12.2 Powers with Negative Exponents

You know that, $\quad 10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

As the exponent decreases by1, the value becomes one-tenth of the previous value.

Continuing the above pattern we get, $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

Similarly $\quad 10^{-2} = \dfrac{1}{10} \div 10 = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2}$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

What is 10^{-10} equal to?

ఘాతాంకాలు - ఘాతాలు

అధ్యాయం **12**

A3R1X1

12.1 పరిచయం

మీకు తెలుసా?

భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి 5,970,000,000,000, 000, 000, 000, 000 కి.గ్రా. మనం క్రింది తరగతిలో ఇటువంటి పెద్ద సంఖ్యలను ఘాతాంకాలనుపయోగించి సులభంగా 5.97×10^{24} కి.గ్రా. అని రాయుటను నేర్చుకున్నాం.

10^{24} ను 10 యొక్క 24 వ ఘాతమని చదువుతాం.

ఘాతాంకము

10^{24}

భూమి

10ని 24వ ఘాతాంకానికి హెచ్చించామని అంటాం

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ అని మనకు తెలుసు

మరియు $2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2 \ldots$ (m సార్లు)

ఇప్పుడు మనం 2^{-2} అనేది దేనికి సమానమో కనుగొందాం?

ఘాతాంకం ఒక ఋణ పూర్ణసంఖ్య

12.2 ఋణ ఘాతాంకాలతో కూడిన ఘాతాలు

$10^2 = 10 \times 10 = 100$ అని మనకు తెలుసు

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

ఒక సంఖ్య యొక్క ఘాతాంకము 1 తగ్గిన, దాని విలువ దాని ముందు సంఖ్య విలువలో 10వ భాగం తగ్గుతుంది.

పై అమరికను అదేవిధంగా కొనసాగిస్తే , $10^{-1} = \frac{1}{10}$ అని వచ్చును.

అదేవిధంగా

$$10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

10^{-10} కు సమానమగు విలువ ఎంత?

Now consider the following.

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^\circ = 1 = \frac{3}{3}$$

The previous number is divided by the base 3.

So looking at the above pattern, we say

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

You can now find the value of 2^{-2} in a similar manner.

We have, $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ or $10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ or $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ or $3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$ etc.

In general, we can say that for any non-zero integer a, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, where m is a positive integer. a^{-m} is the multiplicative inverse of a^m.

TRY THESE

Find the multiplicative inverse of the following.

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

We learnt how to write numbers like 1425 in expanded form using exponents as $1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^\circ$.

Let us see how to express 1425.36 in expanded form in a similar way.

We have $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

TRY THESE

Expand the following numbers using exponents.

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$$

ముందు (పూర్వ) సంఖ్య, భూమి 3చే భాగించబడుచున్నది

పై అమరికను బట్టి, మనం $3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$ అని చెప్పగలము.

ఇప్పుడు మీరు 2^{-2} యొక్క విలువను ఇదే పద్ధతిలో కనుగొనగలరు.

అదేవిధంగా, $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ లేదా $10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ లేదా $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ లేదా $3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$ మొదలైనవి

దీని నుండి a ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య అయిన $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ అని సామాన్యీకరించవచ్చు. ఇచ్చట m ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య, a^m యొక్క గుణకార విలోమము a^{-m}.

ప్రయత్నించండి

క్రింది వాని గుణకార విలోమములను కనుగొనుము.

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

1425 వంటి సంఖ్యలను $1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ గా ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి విస్తరణ రూపములో ఏవిధంగా రాయాలో నేర్చుకున్నాం.

ఇదే పద్ధతిలో 1425.36 విస్తరణ రూపములో ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ఏవిధంగా రాయవచ్చో చూద్దాం.

$$1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$$

$$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

ప్రయత్నించండి

క్రింది సంఖ్యలను ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి విస్తరించి రాయండి.

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

12.3 Laws of Exponents

We have learnt that for any non-zero integer a, $a^m \times a^n = a^{m+n}$, where m and n are natural numbers. Does this law also hold if the exponents are negative? Let us explore.

(i) We know that $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$ and $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$

$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ for any non-zero integer a.

Therefore, $2^{-3} \times 2^{-2} = \dfrac{1}{2^3} \times \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2^3 \times 2^2} = \dfrac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

–5 is the sum of two exponents – 3 and – 2

(ii) Take $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$

$$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$$

$(-4) + (-3) = -7$

(iii) Now consider $5^{-2} \times 5^4$

$$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^{(2)}$$

$(-2) + 4 = 2$

In Class VII, you have learnt that for any non-zero integer a, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, where m and n are natural numbers and $m > n$.

(iv) Now consider $(-5)^{-4} \times (-5)^2$

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{-(2)}$$

$(-4) + 2 = -2$

In general, we can say that for any non-zero integer a, $a^m \times a^n = a^{m+n}$, where m and n are integers.

TRY THESE

Simplify and write in exponential form.

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

On the same lines you can verify the following laws of exponents, where a and b are non zero integers and m, n are any integers.

(i) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

These laws you have studied in Class VII for positive exponents only.

Let us solve some examples using the above Laws of Exponents.

12.3 ఘాతాంక న్యాయాలు

ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య a కు $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ఇక్కడ m, n లు సహజ సంఖ్యలు) అగునని మనం నేర్చుకున్నాం. అయితే ఈ నియమము ఋణ ఘాతాంకాలకు కూడా సరిపోతుందా? దీనిని అన్వేషిద్దాం.

$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ ఇచ్చట a ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య

(i) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$ మరియు $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$ అని మనకు తెలుసు.

అందువలన $2^{-3} \times 2^{-2} = \dfrac{1}{2^3} \times \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2^3 \times 2^2} = \dfrac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

ఘాతాంకాలు -3 మరియు -2 ల మొత్తం -5

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ను తీసుకోండి.

$$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$$

$(-4) + (-3) = -7$

(iii) ఇప్పుడు $5^{-2} \times 5^4$ ను పరిశీలిద్దాం

$$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^{(2)}$$

$(-2) + 4 = 2$

ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య a కు $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ఇక్కడ m, n లు సహజ సంఖ్యలు మరియు $m > n$ అని 7వ తరగతిలో నేర్చుకున్నాం.

(iv) ఇప్పుడు $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ను పరిశీలిద్దాం

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{-(2)}$$

$(-4) + 2 = -2$

సాధారణంగా, ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య a కు,
$a^m \times a^n = a^{m+n}$, ఇక్కడ m, n లు పూర్ణ సంఖ్యలు

ప్రయత్నించండి

సూక్ష్మీకరించి, ఘాతాంక రూపంలో రాయండి.

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

ఇదేవిధంగా క్రింది ఘాతాంక న్యాయాలను కూడా a, b లు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు m, nలు ఏవైనా పూర్ణ సంఖ్యలు అయినప్పుడు సరిచూడవచ్చును.

(i) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

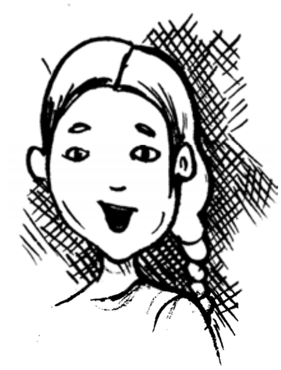
ఈ న్యాయాలను 7వ తరగతిలో ధన ఘాతాంకాలకు మాత్రమే నేర్చుకున్నాము.

(iv) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

పైన తెలిపిన ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించుకొని కొన్ని ఉదాహరణలను సాధన చేద్దాం.

Example 1: Find the value of

(i) 2^{-3} (ii) $\frac{1}{3^{-2}}$



Solution:

(i) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

Example 2: Simplify

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

Solution:

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \frac{1}{(-4)^5}$ $\left(a^m \times a^n = a^{m+n},\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ $(a^m \div a^n = a^{m-n})$

Example 3: Express 4^{-3} as a power with the base 2.

Solution: We have, $4 = 2 \times 2 = 2^2$

Therefore, $(4)^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2 \times (-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

Example 4: Simplify and write the answer in the exponential form.

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

Solution:

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \frac{1}{100^3}$

[using the law $a^m \times b^m = (ab)^m$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$]

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3} = \frac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \frac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

Example 5: Find m so that $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

Solution: $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

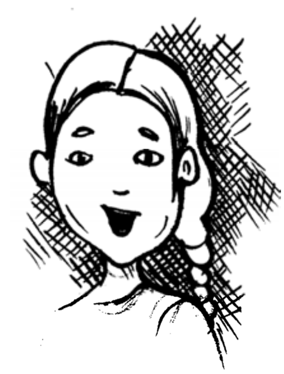
$(-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$(-3)^{m+6} = (-3)^7$

On both the sides powers have the same base different from 1 and – 1, so their exponents must be equal.

ఉదాహరణ 1: క్రింది విలువలను కనుగొనుము.

(i) 2^{-3} (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}}$



సాధన:

(i) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ (ii) $\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

ఉదాహరణ 2: సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

సాధన:

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \dfrac{1}{(-4)^5}$ $\left(a^m \times a^n = a^{m+n},\ a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right)$

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ $(a^m \div a^n = a^{m-n})$

ఉదాహరణ 3: 4^{-3} ను 2 భూమి గా గల ఘాతరూపములో వ్యక్తపరచండి.

సాధన: $4 = 2 \times 2 = 2^2$

అందువలన $(4)^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2 \times (-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

ఉదాహరణ 4: క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించి, జవాబులను ఘాతరూపములో రాయండి.

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$

సాధన:

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20} = \dfrac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \dfrac{1}{100^3}$

$\left[a^m \times b^m = (ab)^m,\ a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right.$ న్యాయాలను ఉపయోగించి]

(iii) $\dfrac{1}{8} \times (3)^{-3} = \dfrac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \dfrac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \dfrac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

ఉదాహరణ 5: $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$ అయిన m విలువ కనుగొనుము.

సాధన :

$(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$(-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$(-3)^{m+6} = (-3)^7$

ఇరువైపులా ఘాతాలు 1 మరియు −1 కానటువంటి ఒకే భూమిని కలిగి ఉన్నాయి. అందువలన వాటి ఘాతాంకాలు సమానంగా ఉంటాయి.

Therefore, $m + 6 = 7$

or $m = 7 - 6 = 1$

$a^n = 1$ only if $n = 0$. This will work for any a. For $a = 1$, $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{-2} = ... = 1$ or $(1)^n = 1$ for infinitely many n.
For $a = -1$,
$(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = ... = 1$ or $(-1)^p = 1$ for any even integer p.

Example 6: Find the value of $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Solution: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

In general, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

Example 7: Simplify (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

Solution:

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \{9 - 8\} \div 16 = \frac{1}{16}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$$

EXERCISE 12.1

1. Evaluate.

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. Simplify and express the result in power notation with positive exponent.

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. Find the value of.

(i) $(3^\circ + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

అందువలన $m + 6 = 7$

లేదా $m = 7 - 6 = 1$

$n = 0$ అయినప్పుడు మాత్రమే $a^n = 1$ అవుతుంది.
ఇది a యొక్క అన్ని విలువలకు సరిపోతుంది.
$a = 1$ కు n యొక్క అపరిమితమైన విలువలకు
$1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{-2} = \ldots = 1$ లేదా $(1)^n = 1$.
$a = -1$కు,
$(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = \ldots = 1$
లేదా ఏదైనా ఒక సరిపూర్ణ సంఖ్య p కు $(-1)^p = 1$.

ఉదాహరణ 6: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

సాధారణంగా, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

ఉదాహరణ 7: సూక్ష్మీకరించుము (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

సాధన:

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \{9 - 8\} \div 16 = \frac{1}{16}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$$

అభ్యాసం 12.1

1. గణించండి.

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించి ఫలితాన్ని, ధనాత్మక ఘాతాంకం గల ఘాత రూపంలో రాయండి.

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. (i) $(3^{\circ} + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ ల విలువలను కనుగొనుము

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. Evaluate (i) $\frac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. Find the value of m for which $5^m \div 5^{-3} = 5^5$.

6. Evaluate (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. Simplify.

(i) $\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12.4 Use of Exponents to Express Small Numbers in Standard Form

Observe the following facts.

1. The distance from the Earth to the Sun is 149,600,000,000 m.
2. The speed of light is 300,000,000 m/sec.
3. Thickness of Class VII Mathematics book is 20 mm.
4. The average diameter of a Red Blood Cell is 0.000007 mm.
5. The thickness of human hair is in the range of 0.005 cm to 0.01 cm.
6. The distance of moon from the Earth is 384, 467, 000 m (approx).
7. The size of a plant cell is 0.00001275 m.
8. Average radius of the Sun is 695000 km.
9. Mass of propellant in a space shuttle solid rocket booster is 503600 kg.
10. Thickness of a piece of paper is 0.0016 cm.
11. Diameter of a wire on a computer chip is 0.000003 m.
12. The height of Mount Everest is 8848 m.

Observe that there are few numbers which we can read like 2 cm, 8848 m, 6,95,000 km. There are some large numbers like 150,000,000,000 m and some very small numbers like 0.000007 m.

Identify very large and very small numbers from the above facts and write them in the adjacent table:

Very large numbers	Very small numbers
150,000,000,000 m	0.000007 m
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------

We have learnt how to express very large numbers in standard form in the previous class.

For example: $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

Now, let us try to express 0.000007 m in standard form.

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. గణించండి (i) $\frac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. $5^m \div 5^{-3} = 5^5$ అయిన m విలువను కనుగొనుము.

6. గణించండి (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\frac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

12.4 చిన్న సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపములో వ్యక్తపరచటంలో ఘాతాంకాల ఉపయోగం

క్రింది వాస్తవాలను పరిశీలించండి.

1. భూమి నుండి సూర్యుని దూరం 149,600,000,000 మీ.
2. కాంతి వేగం 300,000,000 మీ/సెకన్లు.
3. ఏడవ తరగతి గణిత పుస్తకం యొక్క మందము 20 మి.మీ.
4. ఎర్ర రక్తకణాల సరాసరి వ్యాసం 0.000007 మి.మీ.
5. మనిషి యొక్క వెంట్రుకల మందము 0.005 సెం.మీ. నుండి 0.01 సెం.మీ.వరకు ఉంటుంది.
6. భూమి నుండి చంద్రునికి గల దూరం 384, 467, 000 మీ (సుమారుగా).
7. ఒక వృక్ష కణం యొక్క పరిమాణం 0.00001275 మీ.
8. సూర్యుని సరాసరి వ్యాసార్థం 695000 కి.మీ.
9. అంతరిక్ష నౌకలో ఘన రాకెట్ బూస్టర్ నందు ఉపయోగించు ప్రొపెల్లెంట్ ద్రవ్యరాశి 503600 కి.గ్రా.
10. ఒక పేపర్ ముక్క మందము 0.0016 సెం.మీ.
11. కంప్యూటర్ చిప్‌లోని తీగ వ్యాసము 0.000003 మీ.
12. ఎవరెస్ట్ శిఖరం యొక్క ఎత్తు 8848 మీ.

పై వాక్యాలను మనం గమనించినప్పుడు కొన్ని సంఖ్యలను 2 సెం.మీ. 8848 మీ. 695000 కి.మీ., లాంటివి సులభంగా చదవవచ్చు. మరియు అతి పెద్ద సంఖ్యలు 150,000,000,000 మీ. లాంటివి మరియు అతి చిన్న సంఖ్యలు 0.000007 మీ. లాంటివి కూడా ఉన్నాయి.

పై వాక్యాలలో అతి పెద్ద సంఖ్యలు మరియు అతి చిన్న సంఖ్యలు గుర్తించి ప్రక్క పట్టికలో రాయండి.

అతి పెద్ద సంఖ్యలు	అతి చిన్న సంఖ్యలు
150,000,000,000 మీ.	0.000007 మీ.
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------

మనం క్రింది తరగతులలో అతి పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపములో వ్యక్తపరిచే విధానాన్ని నేర్చుకున్నాం.

ఉదాహరణకు: $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

ఇప్పుడు అతి చిన్న సంఖ్య 0.000007 మీ. ను ప్రామాణిక రూపములో వ్యక్తపరచడానికి ప్రయత్నిద్దాము.

$$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$$

0.000007 m $= 7 \times 10^{-6}$ m

Similarly, consider the thickness of a piece of paper which is 0.0016 cm.

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$
$$= 1.6 \times 10^{-3}$$

Therefore, we can say thickness of paper is 1.6×10^{-3} cm.

$\underbrace{150000000000}_{11\,10\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1}$. Decimal is moved 11 places to the left.

$0.\underbrace{000007}_{1\,2\,3\,4\,5\,6}$ decimal is moved 6 places to the right.

Again notice
$0.\underbrace{001}_{1\,2\,3}6$ decimal is moved 3 places to the right.

TRY THESE

1. Write the following numbers in standard form.
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. Write all the facts given in the standard form.

12.4.1 Comparing very large and very small numbers

The diameter of the Sun is 1.4×10^9 m and the diameter of the Earth is 1.2756×10^7 m. Suppose you want to compare the diameter of the Earth, with the diameter of the Sun.

Diameter of the Sun $= 1.4 \times 10^9$ m

Diameter of the earth $= 1.2756 \times 10^7$ m

Therefore $\dfrac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \dfrac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \dfrac{1.4 \times 100}{1.2756}$ which is approximately 100

So, the diameter of the Sun is about 100 times the diameter of the earth.

Let us compare the size of a Red Blood cell which is 0.000007 m to that of a plant cell which is 0.00001275 m.

Size of Red Blood cell $= 0.000007$ m $= 7 \times 10^{-6}$ m

Size of plant cell $= 0.00001275 = 1.275 \times 10^{-5}$ m

Therefore, $\dfrac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \dfrac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \dfrac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \dfrac{0.7}{1.275} = \dfrac{0.7}{1.3} = \dfrac{1}{2}$ (approx.)

So a red blood cell is half of plant cell in size.

Mass of earth is 5.97×10^{24} kg and mass of moon is 7.35×10^{22} kg. What is the total mass?

Total mass $= 5.97 \times 10^{24}$ kg $+ 7.35 \times 10^{22}$ kg.
$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$
$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$
$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$
$= 604.35 \times 10^{22}$ kg.

When we have to add numbers in standard form, we convert them into numbers with the same exponents.

The distance between Sun and Earth is 1.496×10^{11}m and the distance between Earth and Moon is 3.84×10^8m.

During solar eclipse moon comes in between Earth and Sun.

At that time what is the distance between Moon and Sun.

$$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$$

0.000007 మీ = 7×10^{-6} మీ.

అదేవిధంగా 0.0016 సెం.మీ. మందం గల ఒక కాగితపు ముక్కను పరిశీలిద్దాం.

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$
$$= 1.6 \times 10^{-3}$$

అందువలన, కాగితపు మందం 1.6×10^{-3} సెం.మీ అని చెప్పవచ్చును.

$\underbrace{15000000000}_{11\,10\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1}.$ దశాంశ బిందువు ఎడమవైపుకు 11 స్థానాలు జరిగింది.

$0.\underbrace{000007}_{1\,2\,3\,4\,5\,6}$ దశాంశ బిందువు కుడివైపుకు 6 స్థానాలు జరిగింది.

మరలా పరిశీలించగా $0.\underbrace{001}_{1\,2\,3}6$ దశాంశ బిందువు కుడివైపుకు 3 స్థానాలు జరిగింది.

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపములో రాయండి.
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. ప్రామాణిక రూపంలో రాయడంలో అనుసరించాల్సిన సోపానాలన్నింటిని రాయండి.

12.4.1 అతి పెద్ద, అతి చిన్న సంఖ్యలను పోల్చడం

సూర్యుని వ్యాసము 1.4×10^9మీ. మరియు భూమి వ్యాసము 1.2756×10^7మీ.
భూమి వ్యాసము సూర్యుని వ్యాసముతో పోల్చడానికి ప్రయత్నిస్తే,

సూర్యుని వ్యాసము = 1.4×10^9మీ.
భూమి వ్యాసము = 1.2756×10^7 మీ.

అందువలన $\frac{1.4\times10^9}{1.2756\times10^7} = \frac{1.4\times10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4\times100}{1.2756}$ ఇది సుమారుగా 100కు సమానం

అంటే, సూర్యుని వ్యాసము, భూమి వ్యాసమునకు సుమారు 100 రెట్లు కలదు.
మనం ఇప్పుడు 0.000007 మీ. గల ఎర్ర రక్త కణాల పరిమాణమును 0.00001275 మీ.గల వృక్ష కణ పరిమాణముతో పోల్చుదాం.

ఎర్ర రక్త కణాల పరిమాణము = 0.000007 m = 7×10^{-6} మీ.
వృక్ష కణ పరిమాణము = 0.00001275 = 1.275×10^{-5} మీ.

అందువలన, $\frac{7\times10^{-6}}{1.275\times10^{-5}} = \frac{7\times10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7\times10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (సుమారుగా)

అనగా ఎర్ర రక్త కణాల పరిమాణము, వృక్ష కణ పరిమాణములో సగం ఉన్నది.

భూమి ద్రవ్యరాశి = 5.97×10^{24} కి.గ్రా. మరియు చంద్రుని ద్రవ్యరాశి = 7.35×10^{22} కి.గ్రా. అయిన వాటి ద్రవ్యరాశుల మొత్తం ఎంత?

మొత్తం ద్రవ్యరాశి = 5.97×10^{24} kg + 7.35×10^{22} కి.గ్రా.
= $5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$
= $597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$
= $(597 + 7.35) \times 10^{22}$
= 604.35×10^{22} కి.గ్రా.

ప్రామాణిక రూపంలో గల సంఖ్యలను సంకలనం చేసేటప్పుడు మనం వాటిని ఒకే ఘాతాంకాన్ని కలిగి ఉండునట్లు మార్చుతాం.

సూర్యుడు మరియు భూమి మధ్యదూరం 1.496×10^{11}మీ. మరియు భూమి మరియు చంద్రుని మధ్య దూరం 3.84×10^8మీ.
సూర్య గ్రహణం సందర్భంలో భూమి మరియు సూర్యుడు మధ్యకు చంద్రుడు వస్తాడు.
ఈ సందర్భంలో చంద్రుడు మరియు సూర్యునికి మధ్య గల దూరమెంత?

Distance between Sun and Earth = 1.496×10^{11}m

Distance between Earth and Moon = 3.84×10^{8}m

Distance between Sun and Moon = $1.496 \times 10^{11} – 3.84 \times 10^{8}$

$= 1.496 \times 1000 \times 10^{8} – 3.84 \times 10^{8}$

$= (1496 – 3.84) \times 10^{8}$ m $= 1492.16 \times 10^{8}$ m

Example 8: Express the following numbers in standard form.

(i) 0.000035 (ii) 4050000

Solution: (i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^{6}$

Example 9: Express the following numbers in usual form.

(i) 3.52×10^{5} (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

Solution:

(i) $3.52 \times 10^{5} = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \dfrac{7.54}{10^{4}} = \dfrac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \dfrac{3}{10^{5}} = \dfrac{3}{100000} = 0.00003$

Again we need to convert numbers in standard form into a numbers with the same exponents.

EXERCISE 12.2

1. Express the following numbers in standard form.
   (i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942
   (iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837
   (v) 31860000000
2. Express the following numbers in usual form.
   (i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^{4} (iii) 3×10^{-8}
   (iv) 1.0001×10^{9} (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^{6}
3. Express the number appearing in the following statements in standard form.
   (i) 1 micron is equal to $\dfrac{1}{1000000}$ m.
   (ii) Charge of an electron is 0.000,000,000,000,000,000,16 coulomb.
   (iii) Size of a bacteria is 0.0000005 m
   (iv) Size of a plant cell is 0.00001275 m
   (v) Thickness of a thick paper is 0.07 mm
4. In a stack there are 5 books each of thickness 20mm and 5 paper sheets each of thickness 0.016 mm. What is the total thickness of the stack.

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Numbers with negative exponents obey the following laws of exponents.
   (a) $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$ (b) $a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$ (c) $(a^{m})^{n} = a^{mn}$
   (d) $a^{m} \times b^{m} = (ab)^{m}$ (e) $a^{0} = 1$ (f) $\dfrac{a^{m}}{b^{m}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m}$
2. Very small numbers can be expressed in standard form using negative exponents.

సూర్యుడు మరియు భూమి మధ్య దూరం $= 1.496 \times 10^{11}$మీ.
భూమి మరియు చంద్రుని మధ్య దూరం $= 3.84 \times 10^{8}$మీ.
సూర్యుడు మరియు చంద్రుని మధ్య దూరం $= 1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8}$
$= 1.496 \times 1000 \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8}$
$= (1496 - 3.84) \times 10^{8}\ \text{m} = 1492.16 \times 10^{8}$మీ.

ఉదాహరణ 8: క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 0.000035 (ii) 4050000

సాధన: (i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^{6}$

ఉదాహరణ 9: క్రింది సంఖ్యలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 3.52×10^{5} (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

సాధన:

(i) $3.52 \times 10^{5} = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \frac{7.54}{10^{4}} = \frac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \frac{3}{10^{5}} = \frac{3}{100000} = 0.00003$

ప్రామాణిక రూపంలో గల సంఖ్యలను, మరల ఒకే ఘాతాంకాలు గల సంఖ్యలుగా మార్చవలసిన అవసరం ఉన్నది

అభ్యాసం 12.2

1. క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.
   (i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942
   (iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837
   (v) 31860000000
2. క్రింది సంఖ్యలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.
   (i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^{4} (iii) 3×10^{-8}
   (iv) 1.0001×10^{9} (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^{6}
3. క్రింది సమాచారంలోని సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి.
   (i) ఒక మైక్రాన్ $\frac{1}{1000000}$ మీ. కు సమానము
   (ii) ఒక ఎలక్ట్రాన్ విద్యుదావేశం 0.000,000,000,000,000,000,16 కూలుంబు.
   (iii) ఒక బ్యాక్టీరియా పరిమాణము 0.0000005 మీ.
   (iv) ఒక వృక్షకణ పరిమాణము 0.00001275 మీ.
   (v) ఒక కాగితపు మందము 0.07 మి.మీ.
4. ఒక పుస్తకాల కట్టలో 20మి.మీ. మందం గల 5 పుస్తకాలు, 0.016 మి.మీ. మందం గల 5 పేపర్లు కలవు. అయిన ఆ పుస్తకాల కట్ట యొక్క మొత్తం మందం కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. ఋణ ఘాతాంకాలు గలిగిన సంఖ్యలు ఈ క్రింది నియమాలను పాటించును.
   (a) $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$ (b) $a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$ (c) $(a^{m})^{n} = a^{mn}$
   (d) $a^{m} \times b^{m} = (ab)^{m}$ (e) $a^{0} = 1$ (f) $\frac{a^{m}}{b^{m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m}$
2. చాలా చిన్న సంఖ్యలను ఋణ ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ప్రామాణిక రూపములో రాయవచ్చును.

Direct and Inverse Proportions

CHAPTER 13

0852CH13

13.1 Introduction

Mohan prepares tea for himself and his sister. He uses 300 mL of water, 2 spoons of sugar, 1 spoon of tea leaves and 50 mL of milk. How much quantity of each item will he need, if he has to make tea for five persons?

If two students take 20 minutes to arrange chairs for an assembly, then how much time would five students take to do the same job?

We come across many such situations in our day-to-day life, where we need to see variation in one quantity bringing in variation in the other quantity.

For example:

(i) If the number of articles purchased increases, the total cost also increases.

(ii) More the money deposited in a bank, more is the interest earned.

(iii) As the speed of a vehicle increases, the time taken to cover the same distance decreases.

(iv) For a given job, more the number of workers, less will be the time taken to complete the work.

Observe that change in one quantity leads to change in the other quantity.

Write five more such situations where change in one quantity leads to change in another quantity.

How do we find out the quantity of each item needed by Mohan? Or, the time five students take to complete the job?

To answer such questions, we now study some concepts of variation.

13.2 Direct Proportion

If the cost of 1 kg of sugar is ` 36, then what would be the cost of 3 kg sugar? It is ` 108.

అనులోమ విలోమానుపాతములు

అధ్యాయం 13

I3Y9B7

13.1 పరిచయం

మోహన్ తనకు, తన చెల్లికి టీ తయారు చేయడానికి 300మి.లీ. నీరు, రెండు స్పూన్లు చక్కెర, 1 స్పూన్ టీ పొడి మరియు 50మి.లీ. పాలను ఉపయోగించాడు. అయితే 5 మందికి టీ తయారు చేయడానికి అతనికి కావలసిన ప్రతి వస్తువు పరిమాణమెంత?

ఒక సమావేశానికి ఇద్దరు విద్యార్థులు కలిసి 20 ని॥లలో కుర్చీలు వేస్తే అదే పనిని చేయడానికి ఐదుగురు విద్యార్థులు ఎంత సమయం తీసుకుంటారు?

ఒక రాశి లోని మార్పు వేరొక రాశిలోని మార్పుకు కారణమయ్యే అనేక సందర్భాలు మన నిత్య జీవితంలో ఎదురవుతుంటాయి.

ఉదాహరణకు:

(i) కొన్న వస్తువుల సంఖ్య పెరిగే కొలది, వాటికి వెచ్చించే సొమ్ము విలువ కూడా పెరుగుతుంది.

(ii) బ్యాంకులో డిపాజిట్ చేసిన డబ్బు పెరిగే కొలది, దాని పై వచ్చే వడ్డీ కూడా పెరుగుతుంది.

(iii) ఒక వాహనపు వేగం పెరిగే కొలది, అదే దూరాన్ని ప్రయాణించడానికి పట్టే సమయం తగ్గుతుంది.

(iv) ఇవ్వబడిన పనిలో కూలీల సంఖ్య పెరిగే కొలది, ఆ పనిని పూర్తి చేసే సమయం తగ్గుతుంది.

పై సందర్భాలు అన్నింటిలో ఒక రాశి లోని ఏర్పడు మార్పు మరొక రాశి లోని మార్పుకు కారణం అవుతుందని గమనించవచ్చు.

ఒక రాశి లోని మార్పు వేరొక రాశి లోని మార్పుకు కారణమయ్యే సందర్భాలను మరొక ఐదింటిని రాయండి?

మోహన్ కు కావలసిన ప్రతి వస్తువు పరిమాణాన్ని లేదా ఐదుగురు విద్యార్థులు ఆ పనిని పూర్తి చేయడానికి కావలసిన సమయాన్ని ఎలా కనుక్కుంటారు? ఇటువంటి ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇచ్చుటకు రాశులలో కలుగు మార్పులపై కొన్ని భావనలను నేర్చుకుందాం.

13.2 అనులోమానుపాతం

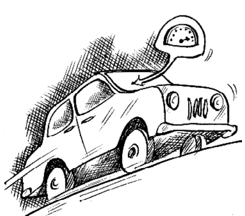
1 కి.గ్రా. చక్కెర వెల ` 36, అయితే 3 కి.గ్రా. చక్కెర ధర ఎంత? దీని విలువ `108.

Similarly, we can find the cost of 5 kg or 8 kg of sugar. Study the following table.

Weight of sugar (in kg)	1	3	5	6	8	10
Cost (in Rs)	36	108	180	...	...	...

Observe that as weight of sugar increases, cost also increases in such a manner that their ratio remains constant.

Take one more example. Suppose a car uses 4 litres of petrol to travel a distance of 60 km. How far will it travel using 12 litres? The answer is 180 km. How did we calculate it? Since petrol consumed in the second instance is 12 litres, i.e., three times of 4 litres, the distance travelled will also be three times of 60 km. In other words, when the petrol consumption becomes three-fold, the distance travelled is also three fold the previous one. Let the consumption of petrol be x litres and the corresponding distance travelled be y km. Now, complete the following table:



Petrol in litres (x)	4	8	12	15	20	25
Distance in km (y)	60	...	180	...	...	...

We find that as the value of x increases, value of y also increases in such a way that the ratio $\frac{x}{y}$ does not change; it remains constant (say k). In this case, it is $\frac{1}{15}$ (check it!).

We say that **x and y are in direct proportion, if $\frac{x}{y} = k$ or $x = ky$.**

In this example, $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$, where 4 and 12 are the quantities of petrol consumed in litres (x) and 60 and 180 are the distances (y) in km. So when x and y are in **direct proportion**, we can write $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. [$y_1$, y_2 are values of y corresponding to the values x_1, x_2 of x respectively]

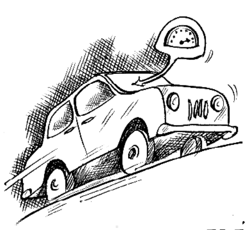
The consumption of petrol and the distance travelled by a car is a case of direct proportion. Similarly, the total amount spent and the number of articles purchased is also an example of direct proportion.

ఇదేవిధంగా, మనం 5 కి.గ్రా లేదా 8 కి.గ్రా చక్కెర వెలను కనుగొనగలం. ఈ క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

చక్కెర బరువు (కి.గ్రా.లలో)	1	3	5	6	8	10
వెల (రూపాయలలో)	36	108	180	...	...	...

చక్కెర బరువు పెరిగే కొద్దీ దాని వెల కూడా ఆ రెండింటి నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉండునట్లుగా పెరగడం గమనించవచ్చు.

ఇప్పుడు మరొక ఉదాహరణ తీసుకుందాం. ఒక కారు 4 లీ. పెట్రోల్‌తో 60కి.మీ. దూరం పోతుంది అనుకుందాం. అదే కారు 12లీ. పెట్రోలుతో ఎంత దూరం పోతుంది? దీనికి జవాబు 180కి.మీ. దీనిని మనం ఎలా లెక్కించాం? రెండో సందర్భంలో పెట్రోల్ వినియోగం 12లీ. అంటే 4లీ.కు మూడు రెట్లు. అలాగే ప్రయాణ దూరం కూడా 60కి.మీ. కు మూడు రెట్లు ఉండాలి. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే పెట్రోల్ వినియోగం మూడు రెట్లు అయితే ప్రయాణ దూరం కూడా మూడు రెట్లు ఉంటుంది. పెట్రోల్ వినియోగం x లీ మరియు దీనికి సదృశ్యంగా ప్రయాణించిన దూరం y కి.మీ. అనుకుందాం. ఇప్పుడు కింది పట్టిక పూర్తి చేయండి.



పెట్రోలు (లీటర్లలో) (x)	4	8	12	15	20	25
దూరం (కి.మీ.లలో) (y)	60	...	180	...	...	...

$\frac{x}{y}$ నిష్పత్తి మారక, స్థిరంగా ఉండేవిధంగా x విలువ పెరిగే కొద్ది y విలువ కూడా పెరగడం మనం గమనించవచ్చు. ఈ నిష్పత్తి ఒక స్థిరాంకం (k అనుకుందాం). ఈ ఉదాహరణలో అది $\frac{1}{15}$ (సరిచూడుము!).

అంటే $\frac{x}{y} = k$ **or** $x = ky$ అయిన మనం **x, y లు అనులోమానుపాతంలో** ఉన్నాయని చెప్పవచ్చు.

ఈ ఉదాహరణలో $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ లో 4, 12 లు వినియోగించిన పెట్రోల్ పరిమాణం (x) లీటర్లలో మరియు 60 , 180లు దూరాలు (y) కి.మీ.లలో ఉంటాయి కాబట్టి x, y లు **అనులోమానుపాతం** లో ఉన్నట్లయితే $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ అని రాయవచ్చు.

[x యొక్క విలువలు x_1, x_2 లకు సదృశంగా ఉండే y యొక్క విలువలు y_1, y_2]
పెట్రోల్ వినియోగం, కారు ప్రయాణించిన దూరం అనులోమానుపాతంనకు ఒక సందర్భం. ఇదేవిధంగా కొన్న వస్తువుల సంఖ్య, వాటి ఖర్చు కూడా అనులోమానుపాతమునకు ఒక ఉదాహరణ.

Think of a few more examples for direct proportion. Check whether Mohan [in the initial example] will take 750 mL of water, 5 spoons of sugar, $2\frac{1}{2}$ spoons of tea leaves and 125 mL of milk to prepare tea for five persons! Let us try to understand further the concept of direct proportion through the following activities.

DO THIS

(i) • Take a clock and fix its minute hand at 12.

• Record the angle turned through by the minute hand from its original position and the time that has passed, in the following table:

Time Passed (T) (in minutes)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
Angle turned (A) (in degree)	(A_1) 90	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...

What do you observe about T and A? Do they increase together?

Is $\frac{T}{A}$ same every time?

Is the angle turned through by the minute hand directly proportional to the time that has passed? Yes!

From the above table, you can also see

$$T_1 : T_2 = A_1 : A_2 \text{, because}$$
$$T_1 : T_2 = 15 : 30 \quad = 1:2$$
$$A_1 : A_2 = 90 : 180 \quad = 1:2$$

Check if $\quad T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ and $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$

You can repeat this activity by choosing your own time interval.

(ii) Ask your friend to fill the following table and find the ratio of his age to the corresponding age of his mother.

	Age five years ago	**Present age**	**Age after five years**
Friend's age (F)			
Mother's age (M)			
$\frac{F}{M}$			

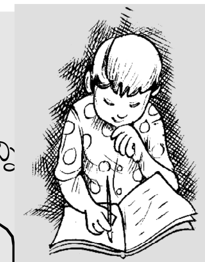
What do you observe?

Do F and M increase (or decrease) together? Is $\frac{F}{M}$ same every time? No!

You can repeat this activity with other friends and write down your observations.

అనులోమానుపాతంనకు మరికొన్ని ఉదాహరణలు ఆలోచించండి. [మొదటి ఉదాహరణలో] మోహన్ ఐదు మందికి టీ తయారుచేయడానికి 750మి.లీ. నీరు, 5 స్పూన్ల చక్కెర, $2\frac{1}{2}$ స్పూన్ల టీపొడి మరియు 125 మి.లీ. పాలను తీసుకుంటాడో లేదో పరిశీలించండి. ఈ క్రింది కృత్యాలతో అనులోమానుపాతం భావనను మరింత అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

ఇవి చేయండి

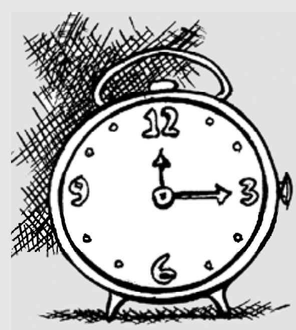


(i) • ఒక గడియారాన్ని తీసుకుని అందులో 12 వద్ద నిమిషాల ముల్లును ఉంచండి.
• నిమిషాల ముల్లు దాని మొదటి స్థానం నుండి తిరిగిన కోణాన్ని మరియు పట్టిన కాలాన్ని పట్టికలో నమోదు చేయండి.

గడిచిన సమయం (నిమిషాలలో) (T)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
తిరిగిన కోణం (డిగ్రీలలో) (A)	(A_1) 90	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...

T మరియు A ల గురించి మీరు ఏమి గ్రహించారు? అవి కలిసి పెరుగుతున్నాయా?

అన్ని సందర్భాలలోను $\frac{T}{A}$ ఒకేలా ఉందా?



ఇక్కడ నిమిషాల ముల్లు చేసే కోణం, పట్టిన సమయానికి అనులోమానుపాతంలో ఉందా? అవును!

పై పట్టిక నుండి మీరు దీనిని చూడవచ్చు.

$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$, ఎందుకంటే

$T_1 : T_2 = 15 : 30 \quad = 1:2$

$A_1 : A_2 = 90 : 180 \quad = 1:2$

$T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ మరియు $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

మీరు ఇదే కృత్యాన్ని మీ సొంత కాలవ్యవధి ఎంచుకుని మరలా చేయండి.

(ii) క్రింది పట్టికను పూరించి అతని వయస్సుకు, అతని తల్లి వయస్సుకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనమని మీ స్నేహితుణ్ణి అడగండి.

	ఐదు సంవత్సరాల క్రితం వయస్సు	**ప్రస్తుత వయస్సు**	**ఐదు సంవత్సరాల తర్వాత వయస్సు**
స్నేహితుని వయస్సు (F)			
తల్లి వయస్సు (M)			
$\frac{F}{M}$			

ఇక్కడ మీరు ఏమి పరిశీలించారు?

ఇక్కడ F మరియు M లు రెండూ పెరిగాయా (లేదా తగ్గాయా)? ప్రతీ సందర్భంలోనూ $\frac{F}{M}$ ఒకేలా ఉందా? లేదు!

ఈ కృత్యాన్ని ఇతర స్నేహితులతో కూడా చేయించి మీరు గమనించిన పరిశీలనలు నమోదు చేయండి.

Thus, variables increasing (or decreasing) together need not always be in direct proportion. For example:

(i) physical changes in human beings occur with time but not necessarily in a predetermined ratio.

(ii) changes in weight and height among individuals are not in any known proportion and

(iii) there is no direct relationship or ratio between the height of a tree and the number of leaves growing on its branches. Think of some more similar examples.

TRY THESE

1. Observe the following tables and find if x and y are directly proportional.

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. Principal = ` 1000, Rate = 8% per annum. Fill in the following table and find which type of interest (simple or compound) changes in direct proportion with time period.

$$\frac{P \times r \times t}{100}$$

$$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - P$$

Time period	1 year	2 years	3 years
Simple Interest (in `)			
Compound Interest (in `)			

THINK, DISCUSS AND WRITE

If we fix time period and the rate of interest, simple interest changes proportionally with principal. Would there be a similar relationship for compound interest? Why?

Let us consider some solved examples where we would use the concept of direct proportion.

Example 1: The cost of 5 metres of a particular quality of cloth is ` 210. Tabulate the cost of 2, 4, 10 and 13 metres of cloth of the same type.

Solution: Suppose the length of cloth is x metres and its cost, in `, is y.

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

ఇలా, ఒకేవిధంగా కలిసి పెరిగే (లేదా తగ్గే) చరరాశులు ఎల్లప్పుడూ అనులోమానుపాతంలో ఉండాల్సిన అవసరం లేదు. ఉదాహరణకు

(i) మానవ శరీరంలోని భౌతిక మార్పులు కాలంతో పాటు వస్తాయి కానీ అవి ముందుగా నిర్ధారితమైన నిష్పత్తిలో ఉండాల్సిన అవసరం లేదు.

(ii) వ్యక్తుల బరువు మరియు ఎత్తులలో కలిగే మార్పులు, తెలిసిన అనుపాతంలో ఉండవు.

(iii) వృక్షం ఎత్తుకు మరియు దాని కొమ్మలలో పెరిగే ఆకుల సంఖ్యకు ప్రత్యక్ష సంబంధం లేదా నిష్పత్తి ఉండదు. ఇలాంటి మరికొన్ని ఉదాహరణలు ఆలోచించండి.

ప్రయత్నించండి

1. ఈ క్రింది పట్టికలను పరిశీలించి x మరియు y లు అనులోమానుపాతంలోఉన్నాయా? కనుగొనండి.

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. అసలు = `1000, వడ్డీరేటు = ఏడాదికి 8% అయినప్పుడు ఈ క్రింది పట్టికను పూరించి ఏవిధమైన వడ్డీ (సామాన్య లేదా చక్ర), కాలవ్యవధితో అనులోమానుపాతంలో ఉంటుందో కనుగొనండి.

$\frac{P \times r \times t}{100}$

$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - P$

కాల వ్యవధి	1 సం॥	2 సం॥లు	3 సం॥లు
సామాన్య వడ్డీ (` లలో)			
చక్ర వడ్డీ (` లలో)			

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

మనం కాలపరిమితి మరియు వడ్డీ రేటును స్థిరీకరించినప్పుడు సామాన్య వడ్డీ అసలుకు అనుపాతంలో ఉంటుంది. చక్రవడ్డీలో కూడా ఇదేవిధమైన సంబంధం ఉంటుందా? ఎందుకు?

మనం అనులోమానుపాత భావనను ఉపయోగించి సాధించిన కొన్ని సమస్యలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 1: 5మీ. గుడ్డ వెల `210 అయితే 2,4,10 మరియు 13మీ కొలతలు గల అదేరకం గుడ్డకు అయ్యే ధరల పట్టికను తయారు చేయండి.

ఉదాహరణ: గుడ్డ పొడవు x మీ మరియు వాటి వెల y (` లలో) అనుకుందాం.

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

As the length of cloth increases, cost of the cloth also increases in the same ratio. It is a case of direct proportion.

We make use of the relation of type $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

(i) Here $x_1 = 5$, $y_1 = 210$ and $x_2 = 2$

Therefore, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ gives $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ or $5y_2 = 2 \times 210$ or $y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$

(ii) If $x_3 = 4$, then $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3}$ or $5y_3 = 4 \times 210$ or $y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

[Can we use $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ here? Try!]

(iii) If $x_4 = 10$, then $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4}$ or $y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(iv) If $x_5 = 13$, then $\frac{5}{210} = \frac{13}{y_5}$ or $y_5 = \frac{13 \times 210}{5} = 546$

$\left[\text{Note that here we can also use } \frac{2}{84} \text{ or } \frac{4}{168} \text{ or } \frac{10}{420} \text{ in the place of } \frac{5}{210}\right]$

Example 2: An electric pole, 14 metres high, casts a shadow of 10 metres. Find the height of a tree that casts a shadow of 15 metres under similar conditions.

Solution: Let the height of the tree be x metres. We form a table as shown below:

height of the object (in metres)	14	x
length of the shadow (in metres)	10	15

Note that more the height of an object, the more would be the length of its shadow.

Hence, this is a case of direct proportion. That is, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

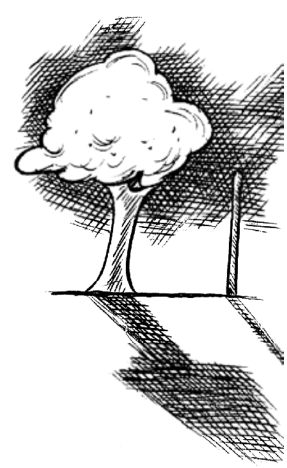
We have $\frac{14}{10} = \frac{x}{15}$ (Why?)

or $\frac{14}{10} \times 15 = x$

or $\frac{14 \times 3}{2} = x$

So $21 = x$

Thus, height of the tree is 21 metres.



Alternately, we can write $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ as $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

గుడ్డ పొడవు పెరిగిన కొలది దాని వెల కూడా అదే నిష్పత్తిలో పెరుగుతుంది. ఇది అనులోమానుపాతమును సూచించును.

మనం $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ సంబంధాన్ని ఉపయోగించుకుంటాం.

(i) ఇక్కడ $x_1 = 5$, $y_1 = 210$ మరియు $x_2 = 2$

కాబట్టి, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ కావున $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ అగును, లేదా $5y_2 = 2 \times 210$ లేదా $y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$

(ii) $x_3 = 4$, అయితే $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3}$ లేదా $5y_3 = 4 \times 210$ లేదా $y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

[ఇక్కడ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ ఉపయోగించవచ్చా? ప్రయత్నించండి!]

(iii) $x_4 = 10$, అయితే $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4}$ లేదా $y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(iv) $x_5 = 13$, అయితే $\frac{5}{210} = \frac{13}{y_5}$ లేదా $y_5 = \frac{13 \times 210}{5} = 546$

[ఇక్కడ $\frac{5}{210}$ స్థానంలో $\frac{2}{84}$ లేదా $\frac{4}{168}$ లేదా $\frac{10}{420}$ ను కూడా ఉపయోగించవచ్చని గమనించండి]

ఉదాహరణ 2: 14మీ. ఎత్తుగల ఒక విద్యుత్ స్థంభం 10మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరుస్తుంది. అదే సందర్భంలో ఒక చెట్టు 15మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ చెట్టు యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన: ఇక్కడ చెట్టు యొక్క ఎత్తు x మీటర్లు అనుకొనుము. క్రింది చూపినవిధంగా పట్టికను తయారుచేద్దాం:

వస్తువు యొక్క ఎత్తు (మీటర్లలో)	14	x
నీడ పొడవు (మీటర్లలలో)	10	15

అనగా వస్తువు ఎత్తు పెరిగిన కొలది, దాని నీడ పొడవు కూడా పెరుగుతుంది.

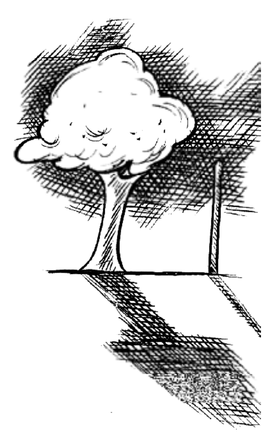
అందువల్ల, ఇది అనులోమానుపాతంలో ఉంది అంటాం. అంటే $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

$$\frac{14}{10} = \frac{x}{15} \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

లేదా $$\frac{14}{10} \times 15 = x$$

లేదా $$\frac{14 \times 3}{2} = x$$

కావున $$21 = x$$



అనగా, చెట్టు ఎత్తు 21 మీటర్లు.

మరోవిధంగా, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ను మనం $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ గా రాయవచ్చు.

so $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$

or $14 : x = 10 : 15$

Therefore, $10 \times x = 15 \times 14$

or $x = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

Example 3: If the weight of 12 sheets of thick paper is 40 grams, how many sheets of the same paper would weigh $2\frac{1}{2}$ kilograms?

Solution:

Let the number of sheets which weigh $2\frac{1}{2}$ kg be x. We put the above information in the form of a table as shown below:

Number of sheets	12	x
Weight of sheets (in grams)	40	2500

1 kilogram = 1000 grams

$2\frac{1}{2}$ kilograms = 2500 grams

More the number of sheets, the more would their weight be. So, the number of sheets and their weights are directly proportional to each other.

So, $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

or $\frac{12 \times 2500}{40} = x$

or $750 = x$

Thus, the required number of sheets of paper = 750.

Alternate method:

Two quantities x and y which vary in direct proportion have the relation $x = ky$ or $\frac{x}{y} = k$

Here, $k = \frac{\text{number of sheets}}{\text{weight of sheets in grams}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

Now x is the number of sheets of the paper which weigh $2\frac{1}{2}$ kg [2500 g].

Using the relation $x = ky$, $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

Thus, 750 sheets of paper would weigh $2\frac{1}{2}$ kg.

Example 4: A train is moving at a uniform speed of 75 km/hour.

(i) How far will it travel in 20 minutes?

(ii) Find the time required to cover a distance of 250 km.

Solution: Let the distance travelled (in km) in 20 minutes be x and time taken (in minutes) to cover 250 km be y.

1 hour = 60 minutes

Distance travelled (in km)	75	x	250
Time taken (in minutes)	60	20	y

కావున $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$

లేదా $14 : x = 10 : 15$

అందువలన, $10 \times x = 15 \times 14$, లేదా $x = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

ఉదాహరణ 3: 12 దళసరి కాగితాల బరువు 40గ్రా. అయిన అదేవిధమైన ఎన్ని కాగితాల బరువు $2\frac{1}{2}$ కి.గ్రా. అవుతుంది?

సాధన:

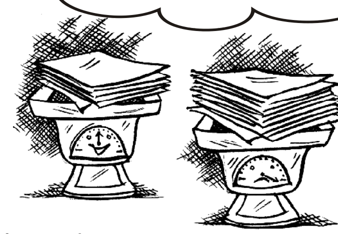
$2\frac{1}{2}$ కి.గ్రా. బరువుండే కాగితాల సంఖ్య x అనుకుందాం. పై విషయాలను పట్టిక రూపంలో క్రింది విధముగా రాయవచ్చు:

కాగితాల సంఖ్య	12	x
కాగితాల బరువు (గ్రాములలో)	40	2500

కాగితాల సంఖ్య పెరిగేకొద్దీ, వాటి బరువు పెరుగుతుంది. కావున కాగితాల సంఖ్య మరియు వాటి బరువు పరస్పరం అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

1 కి.గ్రా = 1000 గ్రా.

$2\frac{1}{2}$ కి.గ్రా = 2500 గ్రా.



కావున, $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

లేదా $\frac{12 \times 2500}{40} = x$

లేదా $750 = x$

అనగా, అవసరమైన కాగితాల సంఖ్య = 750.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి :

x మరియు y అనే రెండు చరరాశులు అనులోమానుపాతంలో ఉంటే వాటి మధ్య సంబంధం $x = ky$ లేదా $\frac{x}{y} = k$ అవుతుంది.

ఇక్కడ, $k = \frac{\text{కాగితముల సంఖ్య}}{\text{కాగితం బరువు గ్రాములలో}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

$2\frac{1}{2}$ కి.గ్రా అనగా (2500గ్రా) బరువు గల దళసరి కాగితాల సంఖ్య x అయిన

$x = ky$ సంబంధాన్ని ఉపయోగించి $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

అదేవిధంగా, 750 దళసరి కాగితాల బరువు $2\frac{1}{2}$ కి.గ్రా. ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 4: ఒక రైలు గంటకు 75కి.మీ. సమవేగంతో ప్రయాణిస్తుంది.

(i) అది 20 నిమిషాలలో ఎంత దూరం ప్రయాణిస్తుంది?

(ii) 250కి.మీ. దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టే సమయాన్ని కనుగొనండి?

Solution: 20 నిమిషాలలో ప్రయాణించిన దూరం x (కి.మీ.లలో) మరియు 250కి.మీ. దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టిన సమయం y (నిమిషాలలో) అని అనుకుందాం.

1 గంట = 60 నిమిషాలు

ప్రయాణించిన దూరం (కి.మీ.లలో)	75	x	250
పట్టు సమయం (నిమిషాలలో)	60	20	y

Since the speed is uniform, therefore, the distance covered would be directly proportional to time.

(i) We have $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$

or $\frac{75}{60} \times 20 = x$

or $x = 25$

So, the train will cover a distance of 25 km in 20 minutes.

(ii) Also, $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

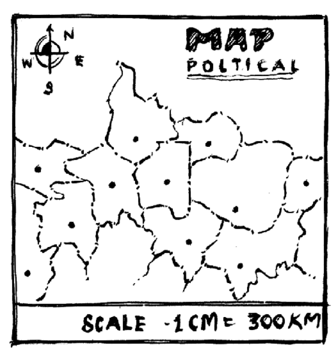
or $y = \frac{250 \times 60}{75}$ = 200 minutes or 3 hours 20 minutes.

Therefore, 3 hours 20 minutes will be required to cover a distance of 250 kilometres.

Alternatively, when x is known, then one can determine y from the relation $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$.

> You know that a map is a miniature representation of a very large region. A scale is usually given at the bottom of the map. The scale shows a relationship between actual length and the length represented on the map. The scale of the map is thus the ratio of the distance between two points on the map to the actual distance between two points on the large region.
>
> For example, if 1 cm on the map represents 8 km of actual distance [i.e., the scale is 1 cm : 8 km or 1 : 800,000] then 2 cm on the same map will represent 16 km. Hence, we can say that scale of a map is based on the concept of direct proportion.

Example 5: The scale of a map is given as 1:30000000. Two cities are 4 cm apart on the map. Find the actual distance between them.



Solution: Let the map distance be x cm and actual distance be y cm, then

$$1:30000000 = x : y$$

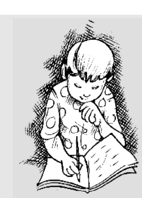
or $$\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$$

Since $x = 4$ so, $$\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$$

or $$y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7 \text{ cm} = 1200 \text{ km}.$$

Thus, two cities, which are 4 cm apart on the map, are actually 1200 km away from each other.

DO THIS



Take a map of your State. Note the scale used there. Using a ruler, measure the "map distance" between any two cities. Calculate the actual distance between them.

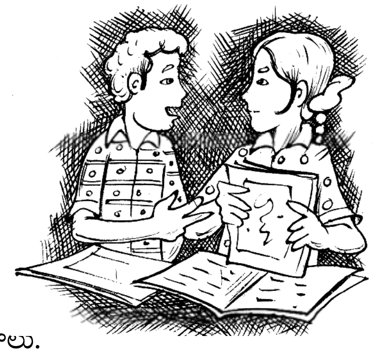
రైలు సమవేగంతో ఉండటం వల్ల ప్రయాణించిన దూరం, కాలానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

(i) $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$

లేదా $\frac{75}{60} \times 20 = x$

లేదా $x = 25$

కావున, రైలు 20 నిమిషాలలో 25 కి.మీ.ల దూరం ప్రయాణిస్తుంది.



(ii) అలాగే, $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

లేదా $y = \frac{250 \times 60}{75}$ = 200 నిమిషాలు లేదా 3 గంటల 20 నిమిషాలు.

కావున, రైలు 250 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించడానికి 3 గంటల 20నిమిషాలు పడుతుంది.

ప్రత్యామ్నాయంగా, $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ సంబంధం ఉపయోగించి x విలువ తెలిసినచో y విలువ కనుగొనవచ్చు.

మ్యాప్ అనేది ఒక విశాల ప్రదేశాన్ని ప్రతిబింబించే చిన్న ప్రతిరూపం అని నీకు తెలుసు. ఒక స్కేలు సాధారణంగా మ్యాప్ కింది భాగంలో సూచించబడి ఉంటుంది. ఆ స్కేలు నిజ కొలతకు మ్యాప్‌లో గుర్తించిన కొలతకు గల సంబంధం సూచిస్తుంది. ఒక మ్యాప్‌లో గల రెండు బిందువుల మధ్య దూరానికి, విశాల ప్రాంతంలో ఆ రెండు బిందువుల మధ్య నిజ దూరానికి గల నిష్పత్తి మ్యాప్ యొక్క స్కేల్ అవుతుంది.

ఉదాహరణకు మ్యాప్ పై 1 సెం.మీ. అనేది 8 కి.మీ నిజ దూరాన్ని సూచించినట్లయితే [ఇక్కడ స్కేలు 1 సెం.మీ : 8కి.మీ. లేదా 1 : 800,000 అవుతుంది.] అదే మ్యాప్ పై 2సెం.మీ అనేది 16 కి.మీ. నిజ దూరాన్ని సూచిస్తుంది. కావున మ్యాప్ యొక్క స్కేలు అనులోమానుపాత భావనపై ఆధారపడి ఉంటుందని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 5: ఒక మ్యాప్ పై స్కేలు 1:30000000 అని ఇవ్వబడినది. మ్యాప్‌లో రెండు నగరాలు 4సెం.మీ దూరంలో ఉన్నాయి. వాటి మధ్య గల నిజ దూరాన్ని కనుగొనండి?

సాధన: మ్యాప్‌లో దూరం x సెం.మీ. మరియు నిజ దూరం y సెం.మీ. అనుకుందాం. అప్పుడు

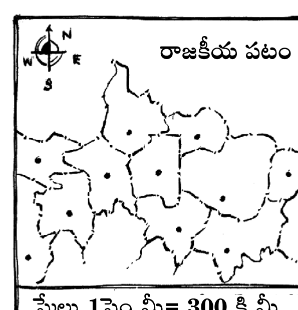
$1:30000000 = x : y$

లేదా $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$

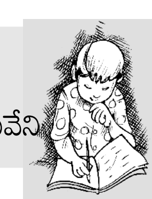
$x = 4$ అయినందున, $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$

లేదా $y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ cm = 1200 కి.మీ.

ఆవిధంగా, ఈ మ్యాప్‌లో 4 సెం.మీ. దూరంలో గల రెండు నగరాలు, నిజానికి ఒకదానికొకటి 1200 కి.మీ. దూరంలో ఉన్నాయి.



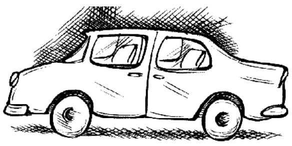
ఇవి చేయండి



మన రాష్ట్ర మ్యాప్ తీసుకొని అందులో స్కేలును గమనించండి. కొలబద్ద సహాయంతో మ్యాప్‌లోని ఏవేని రెండు నగరాల మధ్య దూరాన్ని కొలవండి. వాటి మధ్య నిజ దూరాన్ని లెక్కించండి.

EXERCISE 13.1

1. Following are the car parking charges near a railway station upto



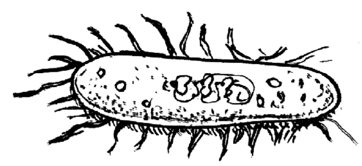
4 hours	₹ 60
8 hours	₹ 100
12 hours	₹ 140
24 hours	₹ 180

Check if the parking charges are in direct proportion to the parking time.

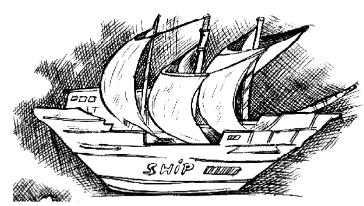
2. A mixture of paint is prepared by mixing 1 part of red pigments with 8 parts of base. In the following table, find the parts of base that need to be added.

Parts of red pigment	1	4	7	12	20
Parts of base	8	...	...	...	...

3. In Question 2 above, if 1 part of a red pigment requires 75 mL of base, how much red pigment should we mix with 1800 mL of base?
4. A machine in a soft drink factory fills 840 bottles in six hours. How many bottles will it fill in five hours?
5. A photograph of a bacteria enlarged 50,000 times attains a length of 5 cm as shown in the diagram. What is the *actual* length of the bacteria? If the photograph is enlarged 20,000 times only, what would be its enlarged length?



6. In a model of a ship, the mast is 9 cm high, while the mast of the actual ship is 12 m high. If the length of the ship is 28 m, how long is the model ship?



7. Suppose 2 kg of sugar contains 9×10^6 crystals. How many sugar crystals are there in (i) 5 kg of sugar? (ii) 1.2 kg of sugar?
8. Rashmi has a road map with a scale of 1 cm representing 18 km. She drives on a road for 72 km. What would be her distance covered in the map?
9. A 5 m 60 cm high vertical pole casts a shadow 3 m 20 cm long. Find at the same time (i) the length of the shadow cast by another pole 10 m 50 cm high (ii) the height of a pole which casts a shadow 5m long.
10. A loaded truck travels 14 km in 25 minutes. If the speed remains the same, how far can it travel in 5 hours?

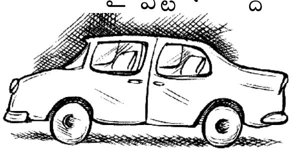
DO THIS

1. On a squared paper, draw five squares of different sides. Write the following information in a tabular form.

	Square-1	**Square-2**	**Square-3**	**Square-4**	**Square-5**
Length of a side (L)					
Perimeter (P)					
$\frac{L}{P}$					

అభ్యాసం 13.1

1. ఒక రైల్వేస్టేషన్ వద్ద కారు పార్కింగ్ ధరలు ఈక్రింది విధంగా ఉన్నాయి.



4 గంటల వ్యవధికి	` 60
8 గంటల వ్యవధికి	` 100
12 గంటల వ్యవధికి	` 140
24 గంటల వ్యవధికి	` 180

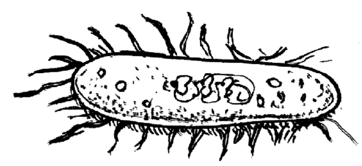
పార్కింగ్ ధరలు మరియు పార్కింగ్ చేయబడిన సమయం అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయో లేదో సరిచూడండి.

2. ఒక పెయింట్ మిశ్రమంలో ఒక భాగం ఎరుపు రంగు పెయింట్ 8 భాగాలు బేస్(మూల) ద్రావకంతో కలుపబడింది. క్రింది పట్టికలో కలపవలసిన మూల ద్రావకం భాగాలను కనుగొనండి.

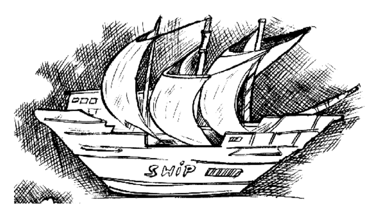
ఎరుపు రంగు భాగాలు	1	4	7	12	20
ద్రావకం భాగాలు	8	...	...	...	...

3. రెండవ ప్రశ్నలో, ఒక భాగం ఎరుపు పెయింట్‌కు 75మి.లీ. మూల ద్రావకం అవసరమయితే, 1800మి.లీ. మూలద్రావకానికి కావలసిన ఎరుపు రంగు పెయింట్ ఎంత?

4. ఒక శీతల పానీయాల పరిశ్రమలో ఒక యంత్రం 6గం.లలో 840 సీసాలను నింపుతుంది. అయితే 5 గంటలలో అది ఎన్ని సీసాలను నింపగలదు?



5. ఒక బ్యాక్టీరియా ఛాయాచిత్రము 50,000 రెట్లు పెంచినపుడు, అది చిత్రంలో చూపిన విధంగా 5 సెం.మీ. పొడవు కలిగి ఉంటుంది. అయితే బ్యాక్టీరియా నిజమైన పొడవు ఎంత? ఛాయాచిత్రము 20,000 రెట్లు మాత్రమే పెంచినప్పుడు దాని పెంచిన పొడవు ఎంత?



6. నమూనా ఓడలో, ఓడ స్థంభం ఎత్తు 9సెం.మీ. అయితే అసలు ఓడ స్థంభం ఎత్తు 12మీ. ఉంటుంది. అసలు ఓడ పొడవు 28మీ. అయినప్పుడు నమూనా ఓడ పొడవెంత?

7. 2 కి.గ్రా. చక్కెరలో 9×10^6 స్ఫటికాలు ఉన్నాయి. అయితే
i) 5.కి.గ్రా. చక్కెర ii) 1.2కి.గ్రా. చక్కెరలో ఉండే స్ఫటికాల సంఖ్య ఎంత?

8. రష్మీ వద్ద గల మ్యాప్‌లోని స్కేలులో రోడ్డు పొడవు ఒక సెం.మీ. 18కి.మీ. గా సూచిస్తున్నది. ఆమె రోడ్డుపై 72కి.మీ. ప్రయాణించినచో, ఆమె ప్రయాణించిన దూరానికి మ్యాప్‌లో దూరమెంత?

9. 5మీ. 60సెం.మీ. ఎత్తు గల ఒక నిలువు స్థంభం ఏర్పరచు నీడ పొడవు 3మీ.20సెం.మీ. అదే సమయంలో 1) 10మీ. 50సెం.మీ ఎత్తు గల మరొక స్థంభం ఏర్పరచు నీడ పొడవు ఎంత? 2) 5మీ. నీడను ఏర్పరచిన స్థంభం యొక్క ఎత్తు ఎంత?

10. సరుకులతో నింపబడిన ఒక లారీ 25ని॥లలో 14కి.మీ. ప్రయాణిస్తుంది. లారీ అదే వేగంతో ప్రయాణించిన, 5 గంటలలో ఎంత దూరం ప్రయాణిస్తుంది?

ఇవి చేయండి

1. ఒక గళ్ళ కాగితం (గ్రిడ్ పేపర్) పై వేర్వేరు భుజాల కొలతలతో ఐదు చతురస్రాలను గీయండి. క్రింది వివరాలను పట్టికలో రాయండి.

	చతురస్రం-1	చతురస్రం-2	చతురస్రం-3	చతురస్రం-4	చతురస్రం-5
భుజాల పొడవు (L)					
చుట్టు కొలత (P)					
$\frac{L}{P}$					

Area (A)					
$\frac{L}{A}$					

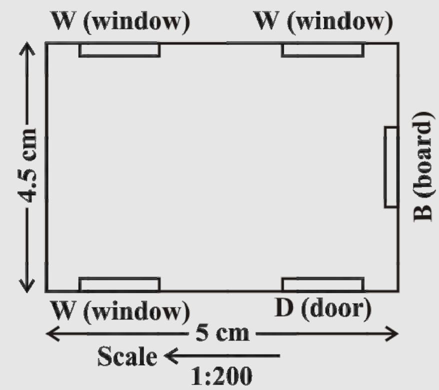
Find whether the length of a side is in direct proportion to:

(a) the perimeter of the square.

(b) the area of the square.

2. The following ingredients are required to make halwa for 5 persons:
Suji/Rawa = 250 g, Sugar = 300 g,
Ghee = 200 g, Water = 500 mL.
Using the concept of proportion, estimate the changes in the quantity of ingredients, to prepare halwa for your class.

3. Choose a scale and make a map of your classroom, showing windows, doors, blackboard etc. (An example is given here).



THINK, DISCUSS AND WRITE

Take a few problems discussed so far under 'direct variation'. Do you think that they can be solved by 'unitary method'?

13.3 Inverse Proportion

Two quantities may change in such a manner that if one quantity increases, the other quantity decreases and vice versa. For example, as the number of workers increases, time taken to finish the job decreases. Similarly, if we increase the speed, the time taken to cover a given distance decreases.

To understand this, let us look into the following situation.

Zaheeda can go to her school in four different ways. She can walk, run, cycle or go by car. Study the following table.

	Walking	Running	Cycling	By Car
Speed in km/hour	3	6	9	45
Time taken (in minutes)	30	15	10	2

వైశాల్యం (A)					
$\frac{L}{A}$					

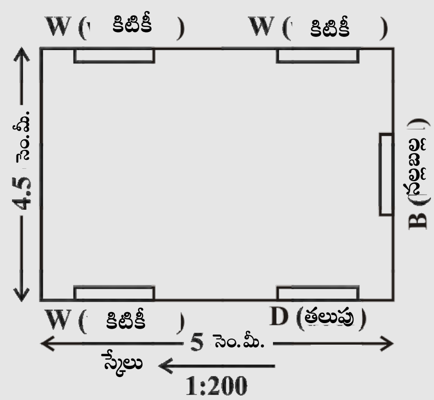
ఈ క్రింది వానిలో భుజం పొడవు దేనికి అనులోమ సంబంధం కలిగి ఉంది:

(a) చతురస్రం చుట్టు కొలత.

(b) చతురస్ర వైశాల్యము.

2. 5 గురికి హల్వా చేయడానికి కావలసిన పదార్థాలు రవ్వ = 250 గ్రా, చక్కెర = 300 గ్రా, నెయ్యి = 200 గ్రా, నీరు = 500 మి.లీ. అనులోమానుపాతం భావనను ఉపయోగించుకుంటూ మీ తరగతిలోని విద్యార్థులందరికీ హల్వా చేయడానికి కావలసిన పదార్థాల పరిమాణాలను అంచనా వేయండి.

3. సరైన స్కేలు తీసుకుని మీ తరగతి గది కిటికీలు, తలుపులు మరియు నల్లబల్ల మొదలైన వాటిని చూపించు మ్యాప్ తయారు చేయండి. (ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వబడినది).



ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఇంతవరకు చర్చించిన అనులోమానుపాతానికి సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలు తీసుకోండి. వీటిని "ఏక వస్తు" విధానంలో కూడా సాధించవచ్చని మీరు భావిస్తున్నారా?

13.3 విలోమానుపాతము

రెండు రాశులలో మార్పు క్రింది విధంగా ఉండవచ్చు. ఒక రాశి విలువ పెరిగితే రెండవ రాశి తగ్గుతుంది. అలాగే రెండవ రాశి తగ్గితే మొదటి రాశి పెరుగుతుంది. ఉదాహరణకు పనివాళ్ళ సంఖ్య పెరిగే కొద్దీ పని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయం తగ్గిపోతుంది. అదేవిధంగా మన వేగాన్ని పెంచితే ప్రయాణ సమయం తగ్గుతుంది.

దీనిని అర్థం చేసుకోవడానికి కింది సందర్భాన్ని చూద్దాం.

జహీద పాఠశాలకు నాలుగు విధాలుగా అనగా నడక, పరుగు, సైకిల్ లేదా కారు ద్వారా వెళ్ళవచ్చు. కింది పట్టిక చూడండి.

	నడక	పరుగు	సైక్లింగ్	కారు
వేగం కి.మీ/గంటకు	3	6	9	45
కాలం(నిమిషాలలో)	30	15	10	2

Observe that as the speed increases, time taken to cover the same distance decreases.

As Zaheeda doubles her speed by running, time reduces to half. As she increases her speed to three times by cycling, time decreases to one third. Similarly, as she increases her speed to 15 times, time decreases to one fifteenth. (Or, in other words the ratio by which time decreases is inverse of the ratio by which the corresponding speed increases). Can we say that speed and time change inversely in proportion?

> Multiplicative inverse of a number is its reciprocal. Thus, $\frac{1}{2}$ is the inverse of 2 and vice versa. (Note that $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$).

Let us consider another example. A school wants to spend ` 6000 on mathematics textbooks. How many books could be bought at ` 40 each? Clearly 150 books can be bought. If the price of a textbook is more than ` 40, then the number of books which could be purchased with the same amount of money would be less than 150. Observe the following table.

Price of each book (in `)	40	50	60	75	80	100
Number of books that can be bought	150	120	100	80	75	60

What do you observe? You will appreciate that as the price of the books increases, the number of books that can be bought, keeping the fund constant, will decrease.

Ratio by which the price of books increases when going from 40 to 50 is 4 : 5, and the ratio by which the corresponding number of books decreases from 150 to 120 is 5 : 4. This means that the two ratios are inverses of each other.

Notice that the product of the corresponding values of the two quantities is constant; that is, $40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000$.

If we represent the price of one book as x and the number of books bought as y, then as x increases y decreases and vice-versa. It is important to note that the product xy remains constant. We say that x varies inversely with y and y varies inversely with x. *Thus two quantities x and y are said to vary in inverse proportion, if there exists a relation of the type $xy = k$ between them, k being a constant. If y_1, y_2 are the values of y corresponding to the values x_1, x_2 of x respectively then $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), or* $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

We say that x and y are in **inverse proportion**.

Hence, in this example, cost of a book and number of books purchased in a fixed amount are inversely proportional. Similarly, speed of a vehicle and the time taken to cover a fixed distance changes in inverse proportion.

Think of more such examples of pairs of quantities that vary in inverse proportion. You may now have a look at the furniture – arranging problem, stated in the introductory part of this chapter.

Here is an activity for better understanding of the inverse proportion.

వేగం పెరిగే కొలది అదే దూరాన్ని చేరడానికి పట్టే కాలం తగ్గుతుందని గమనించండి.

జహీద పరిగెడుతూ తన వేగాన్ని రెట్టింపు చేస్తే గమ్యాన్ని చేరుటకు పట్టే కాలం సగం అవుతుంది. ఆమె సైకిల్ పై వెళుతూ తన వేగాన్ని మూడు రెట్లు పెంచితే, ప్రయాణకాలం 1/3 వంతుకు తగ్గుతుంది. ఇదేవిధంగా ఆమె తన వేగాన్ని 15రెట్లు పెంచితే ప్రయాణకాలం తగ్గి 1/15వ వంతు అవుతుంది. (మరొకవిధంగా చెప్పాలంటే కాలం తగ్గే నిష్పత్తి సంబంధిత వేగం పెరిగే నిష్పత్తికి విలోమం). వేగం మరియు కాలంలోని మార్పులు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయని మనం చెప్పవచ్చునా?

> ఒక సంఖ్య యొక్క గుణకార విలోమం దాని వ్యుత్క్రమము అవుతుంది. కావున 2కు గుణకార విలోమం $\frac{1}{2}$, దానికి ప్రతిగా $\frac{1}{2}$ కు గుణకార వ్యుత్క్రమము 2.
> ($2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ అని గమనించండి)

మరొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం, ఒక పాఠశాల గణిత పాఠ్య పుస్తకాలకు `6000 ఖర్చు పెట్టాలని అనుకున్నది. ఒక పుస్తకం వెల `40 చొప్పున ఎన్ని పుస్తకాలు కొనవచ్చు? 150 పుస్తకాలు కొనవచ్చు అని తెలుస్తుంది. ఒకవేళ పుస్తకం వెల `40 కంటే ఎక్కువ ఉంటే అదే సొమ్ముకు 150 కన్నా తక్కువ పుస్తకాలు వస్తాయి. కింది పట్టిక పరిశీలించండి.

ప్రతి పుస్తకం వెల (` లలో)	40	50	60	75	80	100
కొనదగిన పుస్తకాల సంఖ్య	150	120	100	80	75	60

పై పట్టిక ద్వారా ఏం గమనించారు? పెట్టుబడి స్థిరంగా ఉన్నప్పుడు పుస్తకం వెల పెరిగిన కొలదీ, కొనగలిగే పుస్తకాల సంఖ్య తగ్గుతుంది అని మనకు తెలుస్తుంది.

ఒకవేళ పుస్తకం వెల `40 నుండి `50 కు పెరిగినప్పుడు, దాని నిష్పత్తి 4:5 కు అనుగుణంగా పుస్తకాల సంఖ్య 150 నుండి 120 కు తగ్గి, నిష్పత్తి 5:4 అంటే నిష్పత్తులు పరస్పరం విలోమాలు అని తెలుస్తుంది. ఈ పట్టికలో అనురూప రాశుల లబ్ధం స్థిరంగా ఉండటాన్ని గమనించవచ్చు. అనగా $40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000$.

మనం ఒక పుస్తకం వెలను x గాను మరియు కొన్న పుస్తకాల సంఖ్యను y గాను ప్రతిపాదిస్తే x విలువ పెరిగే కొద్ది y విలువ తగ్గుతుంది. దీనికి విపర్యంగా y విలువ పెరిగితే x విలువ తగ్గాలి. ఇక్కడ ముఖ్యంగా గమనించాల్సిన విషయం x,y ల లబ్ధం స్థిరం. మనము x,y కు విలోమానుపాతంలో ఉంటుందని అలాగే y, x కు విలోమానుపాతంలో ఉంటుందని చెబుతాం. *రెండు రాశులు x మరియు y లు విలోమానుపాతంలో ఉంటే వాటి మధ్య $\mathbf{xy = k}$ (k ఒక స్థిరాంకం) వంటి సంబంధం ఏర్పడుతుంది. x యొక్క విలువలు $\mathbf{x_1, x_2}$లకు అనుగుణంగా వచ్చిన y యొక్క విలువలు వరుసగా*

$\mathbf{y_1, y_2}$ లు అయిన $\mathbf{x_1y_1 = x_2y_2}$ $(= k)$, లేదా $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ అవుతుంది.

అప్పుడు మనం x మరియు y లు **విలోమానుపాతంలో** ఉన్నాయని అంటాం.

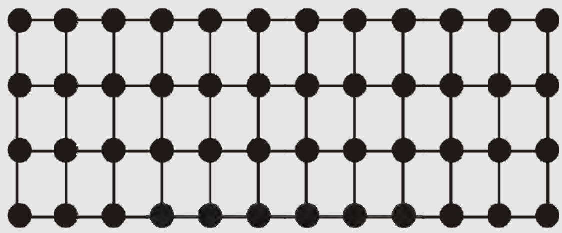
ఈ ఉదాహరణలో పుస్తకం వెల మరియు ఒక నిర్దేశిత మొత్తానికి కొన్న పుస్తకాల సంఖ్య విలోమానుపాతంలో ఉంటాయి. ఇదేవిధంగా ఒక వాహన వేగం, నిర్ధేశిత దూరానికి ప్రయాణకాలం విలోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

విలోమానుపాతంలో మారే ఇలాంటి మరిన్ని జతల రాశుల గురించి ఆలోచించండి. ఈ అధ్యాయం ప్రారంభంలో చెప్పిన కుర్చీల అమరికల సమస్యను పరిశీలించండి.

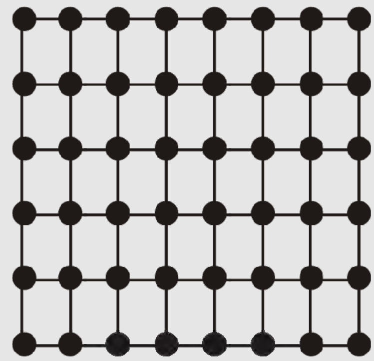
విలోమానుపాతం భావనను బాగా అర్థం చేసుకొనుటకు ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేయండి.

DO THIS

Take a squared paper and arrange 48 counters on it in different number of rows as shown below.



4 Rows, 12 columns



6 Rows, 8 columns

Number of Rows (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
Number of Columns (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

What do you observe? As R increases, C decreases.

(i) Is $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$? (ii) Is $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$?

(iii) Are R and C inversely proportional to each other?

Try this activity with 36 counters.

TRY THESE

Observe the following tables and find which pair of variables (here x and y) are in inverse proportion.

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

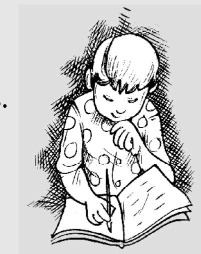
x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

Let us consider some examples where we use the concept of inverse proportion.

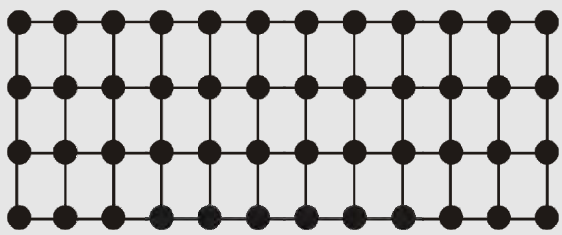
When two quantities x and y are in direct proportion (or vary directly) they are also written as $x \propto y$.

When two quantities x and y are in inverse proportion (or vary inversely) they are also written as $x \propto \frac{1}{y}$.

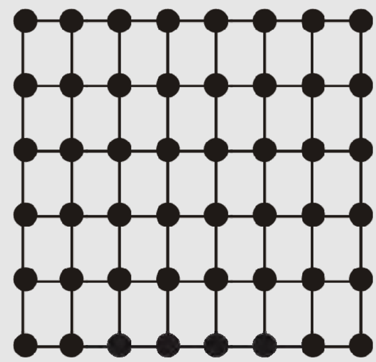
ఇవి చేయండి



ఒక గళ్ళ కాగితాన్ని తీసుకోండి. 48 చదరపు గళ్ళను కింద చూపినట్లు వివిధ వరుసలలో అమర్చండి.



4 అడ్డువరుసలు, 12 నిలువ వరుసలు



6 అడ్డువరుసలు, 8 నిలువ వరుసలు

అడ్డువరుసల సంఖ్య (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
నిలువు వరుసల సంఖ్య (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

మీరు ఏమి గమనించారు. R పెరిగితే, C విలువ తగ్గుతుంది.

(i) $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ అవుతుందా? (ii) $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ అవుతుందా?

(iii) R మరియు C లు ఒకదానికొకటి విలోమానుపాతంలో వున్నాయా?

ఇదే కృత్యాన్ని గళ్ళకాగితంపై 36 చదరపు గడులను తీసుకొని చేయండి.

ప్రయత్నించండి

క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి. ఏ పట్టికలోని చరరాశులు (ఇచట x మరియు y) విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయో కనుగొనండి.

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

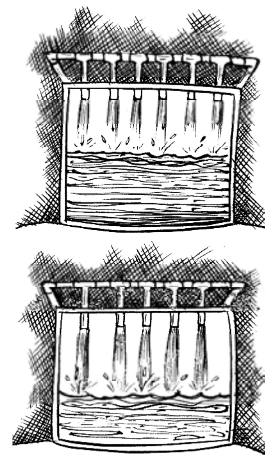
మనం ఇప్పుడు విలోమానుపాతం భావనను ఉపయోగించే కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

రెండు రాశులు x మరియు y లు అనులోమానుపాతంలో ఉంటే (లేదా నేరుగా మారుచున్నచో) $x \propto y$ అని రాస్తాం.

రెండు రాశులు x మరియు y లు విలోమానుపాతంలో ఉంటే (లేదా విలోమంగా మారుచున్నచో) $x \propto \frac{1}{y}$ అని రాస్తాం.

Example 7: 6 pipes are required to fill a tank in 1 hour 20 minutes. How long will it take if only 5 pipes of the same type are used?

Solution:



Let the desired time to fill the tank be x minutes. Thus, we have the following table.

Number of pipes	6	5
Time (in minutes)	80	x

Lesser the number of pipes, more will be the time required by it to fill the tank. So, this is a case of inverse proportion.

Hence, $80 \times 6 = x \times 5$ $\quad [x_1 y_1 = x_2 y_2]$

or $\dfrac{80 \times 6}{5} = x$

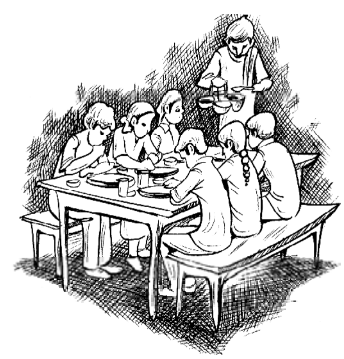
or $x = 96$

Thus, time taken to fill the tank by 5 pipes is 96 minutes or 1 hour 36 minutes.

Example 8: There are 100 students in a hostel. Food provision for them is for 20 days. How long will these provisions last, if 25 more students join the group?

Solution: Suppose the provisions last for y days when the number of students is 125. We have the following table.

Number of students	100	125
Number of days	20	y



Note that more the number of students, the sooner would the provisions exhaust. Therefore this is a case of inverse proportion.

So, $100 \times 20 = 125 \times y$

or $\dfrac{100 \times 20}{125} = y$ or $16 = y$

Thus, the provisions will last for 16 days, if 25 more students join the hostel.

Alternately, we can write $x_1 y_1 = x_2 y_2$ as $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{y_1}$.

That is, $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

or $100 : 125 = y : 20$

or $y = \dfrac{100 \times 20}{125} = 16$

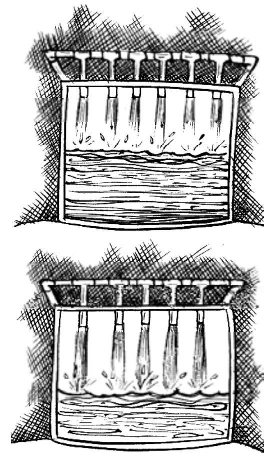
Example 9: If 15 workers can build a wall in 48 hours, how many workers will be required to do the same work in 30 hours?

Solution:

Let the number of workers employed to build the wall in 30 hours be y.

ఉదాహరణ 7: ఒక నీటితొట్టె నింపుటకు 6 పైపులకు 1గం.20ని. సమయం పట్టును. అవే రకమైన 5 పైపులను మాత్రమే ఉపయోగించిన ఆ ట్యాంకు ఎంత సమయంలో నిండుతుంది?

సాధన:



నీటితొట్టెను నింపడానికి కావలసిన సమయం 'x' నిమిషాలు అనుకొనిన, మనకు క్రింది పట్టిక లభిస్తుంది.

పైపుల సంఖ్య	6	5
సమయం (నిమిషాలలో)	80	x

పైపుల సంఖ్య తగ్గే కొద్దీ నీటితొట్టెను నింపుటకు కావలసిన సమయం పెరుగుతుంది. కావున ఇది విలోమానుపాతమునకు సంబంధించిన సందర్భము.

కాబట్టి, $80 \times 6 = x \times 5$ $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

లేదా $\frac{80 \times 6}{5} = x$

లేదా $x = 96$

5 పైపులు నీటితొట్టెను నింపుటకు పట్టు సమయం 96 నిమిషాలు లేదా 1 గంట 36 నిమిషాలు.

ఉదాహరణ 8: ఒక వసతి గృహంలో 100 మంది విద్యార్థులున్నారు. వారికి 20 రోజులకు సరిపడు ఆహార పదార్థాలు కలవు. అదనంగా 25 మంది విద్యార్థులు చేరినచో, ఆ ఆహార పదార్థాలు ఎన్ని రోజులకు సరిపోతాయి?

సాధన: విద్యార్థుల సంఖ్య 125 ఉన్నప్పుడు ఆహార పదార్థాలు సరిపోయే రోజులు 'y' అనుకోండి. క్రింది పట్టిక చూడండి.

విద్యార్థుల సంఖ్య	100	125
రోజుల సంఖ్య	20	y

విద్యార్థుల సంఖ్య పెరిగే కొద్దీ ఆహారపదార్థాలు తొందరగా అయిపోతాయి. కావున ఇది విలోమానుపాతమునకు సంబంధించిన సందర్భం

కాబట్టి, $100 \times 20 = 125 \times y$

లేదా $\frac{100 \times 20}{125} = y$ లేదా $16 = y$

అదనంగా 25మంది విద్యార్థులు వసతి గృహానికి వచ్చినపుడు, ఆహార పదార్థాలు 16 రోజులకే సరిపోతాయి.

$x_1 y_1 = x_2 y_2$ ను ప్రత్యామ్నాయంగా $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ గా రాయవచ్చు. అనగా, $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

లేదా $100 : 125 = y : 20$

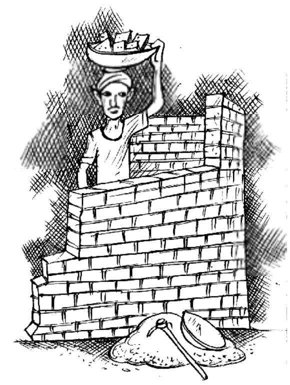
లేదా $y = \frac{100 \times 20}{125} = 16$

ఉదాహరణ 9: 15 మంది కూలీలు 48 గంటలలో ఒక గోడను కడితే అదే పనిని 30 గంటలలో చేయడానికి ఎంతమంది కూలీలు కావాలి?

సాధన: గోడను 30 గంటలలో కట్టడానికి నియమించిన కూలీల సంఖ్య y అనుకోండి.

We have the following table.

Number of hours	48	30
Number of workers	15	y



Obviously more the number of workers, faster will they build the wall.
So, the number of hours and number of workers vary in inverse proportion.

So $\quad 48 \times 15 = 30 \times y$

Therefore, $\quad \dfrac{48 \times 15}{30} = y \quad$ or $\quad y = 24$

i.e., to finish the work in 30 hours, 24 workers are required.

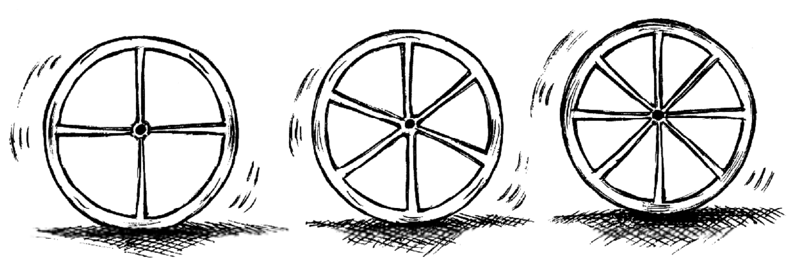
EXERCISE 13.2

1. Which of the following are in inverse proportion?
   (i) The number of workers on a job and the time to complete the job.
   (ii) The time taken for a journey and the distance travelled in a uniform speed.
   (iii) Area of cultivated land and the crop harvested.
   (iv) The time taken for a fixed journey and the speed of the vehicle.
   (v) The population of a country and the area of land per person.

2. In a Television game show, the prize money of ` 1,00,000 is to be divided equally amongst the winners. Complete the following table and find whether the prize money given to an individual winner is directly or inversely proportional to the number of winners?

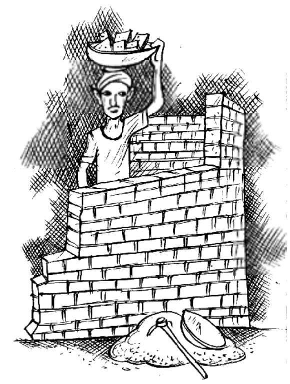
Number of winners	1	2	4	5	8	10	20
Prize for each winner (in `)	1,00,000	50,000	...	...	...	...	...

3. Rehman is making a wheel using spokes. He wants to fix equal spokes in such a way that the angles between any pair of consecutive spokes are equal. Help him by completing the following table.



Number of spokes	4	6	8	10	12
Angle between a pair of consecutive spokes	90°	60°	...	...	...

పై దత్తాంశం నుండి మనకు క్రింది పట్టిక నుండి లభిస్తుంది.



పని గంటల సంఖ్య	48	30
కూలీల సంఖ్య	15	y

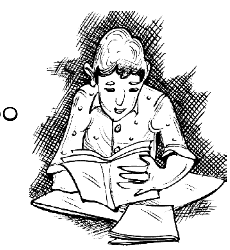
కూలీల సంఖ్య పెరిగే కొద్ది వాళ్ళు గోడ త్వరగా కడతారు అని స్పష్టంగా తెలుస్తుంది.
కావున పని గంటల సంఖ్య మరియు కూలీల సంఖ్య విలోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

కాబట్టి $48 \times 15 = 30 \times y$

అందువలన, $\dfrac{48 \times 15}{30} = y$ లేదా $y = 24$

అంటే, ఆ పనిని 30 గంటలలో ముగించడానికి 24 మంది కూలీలు కావాలి.

అభ్యాసం 13.2



1. ఈ క్రింది వానిలో ఏవి విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి?

(i) ఒక పనికి కావలసిన కూలీల సంఖ్య మరియు ఆ పనిని పూర్తిచేయడానికి కావలసిన సమయం

(ii) ఒక ప్రయాణానికి పట్టిన సమయం మరియు సమవేగంతో ప్రయాణించిన దూరం.

(iii) సాగు భూమి వైశాల్యం మరియు పండిన పంట.

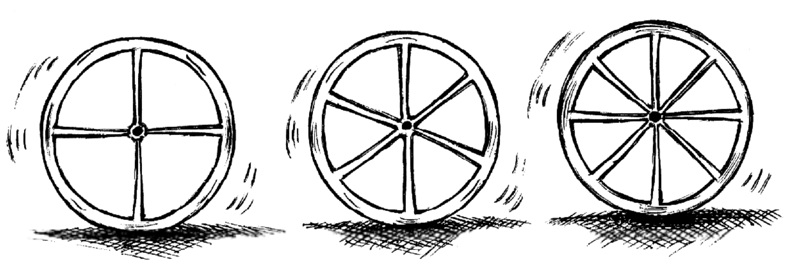
(iv) ఒక నిర్దిష్ట ప్రయాణానికి తీసుకున్న సమయం మరియు వాహనం యొక్క వేగం.

(v) ఒక దేశ జనాభా మరియు ప్రతి వ్యక్తికి లభించే సగటు భూమి వైశాల్యం.

2. ఒక టెలివిజన్ గేమ్ షో లో మొత్తం బహుమతి `1,00,000 ను విజేతలకు సమానంగా పంచవలసి ఉన్నది. క్రింది పట్టిక పూర్తి చేసి ప్రతి విజేతకు ఇచ్చే బహుమతి, విజేతల సంఖ్యకు అనులోమ లేదా విలోమానుపాతం లో ఉన్నదా కనుగొనండి?

విజేతల సంఖ్య	1	2	4	5	8	10	20
ప్రతి విజేతకు ఇచ్చే బహుమతి (` లలో)	1,00,000	50,000	...	...	...	...	...

3. రెహమాన్ చువ్వలు ఉపయోగించి చక్రం తయారు చేస్తున్నాడు. అతను ప్రతి జత వరుస చువ్వల మధ్య కోణాలు సమానంగా ఉండునట్లు సమాన సంఖ్యలో చువ్వలను అమర్చాలని అనుకున్నాడు. పట్టికను పూరించడం ద్వారా అతనికి సహకరించండి.



చువ్వల సంఖ్య	4	6	8	10	12
ప్రతి వరుస జత చువ్వల మధ్య కోణం	90°	60°	...	...	...

(i) Are the number of spokes and the angles formed between the pairs of consecutive spokes in inverse proportion?

(ii) Calculate the angle between a pair of consecutive spokes on a wheel with 15 spokes.

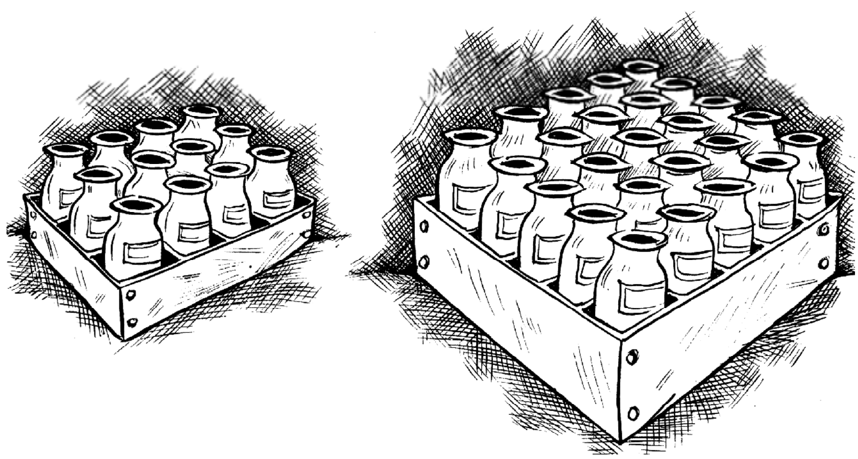
(iii) How many spokes would be needed, if the angle between a pair of consecutive spokes is 40°?

4. If a box of sweets is divided among 24 children, they will get 5 sweets each. How many would each get, if the number of the children is reduced by 4?

5. A farmer has enough food to feed 20 animals in his cattle for 6 days. How long would the food last if there were 10 more animals in his cattle?

6. A contractor estimates that 3 persons could rewire Jasminder's house in 4 days. If, he uses 4 persons instead of three, how long should they take to complete the job?

7. A batch of bottles were packed in 25 boxes with 12 bottles in each box. If the same batch is packed using 20 bottles in each box, how many boxes would be filled?



8. A factory requires 42 machines to produce a given number of articles in 63 days. How many machines would be required to produce the same number of articles in 54 days?

9. A car takes 2 hours to reach a destination by travelling at the speed of 60 km/h. How long will it take when the car travels at the speed of 80 km/h?

10. Two persons could fit new windows in a house in 3 days.

(i) One of the persons fell ill before the work started. How long would the job take now?

(ii) How many persons would be needed to fit the windows in one day?

11. A school has 8 periods a day each of 45 minutes duration. How long would each period be, if the school has 9 periods a day, assuming the number of school hours to be the same?

(i) చువ్వల సంఖ్య మరియు వరుస జత చువ్వలు ఏర్పరచిన కోణం విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయా?

(ii) 15 చువ్వలు గల చక్రంలో వరుస జత చువ్వల మధ్య కోణాన్ని లెక్కించండి.

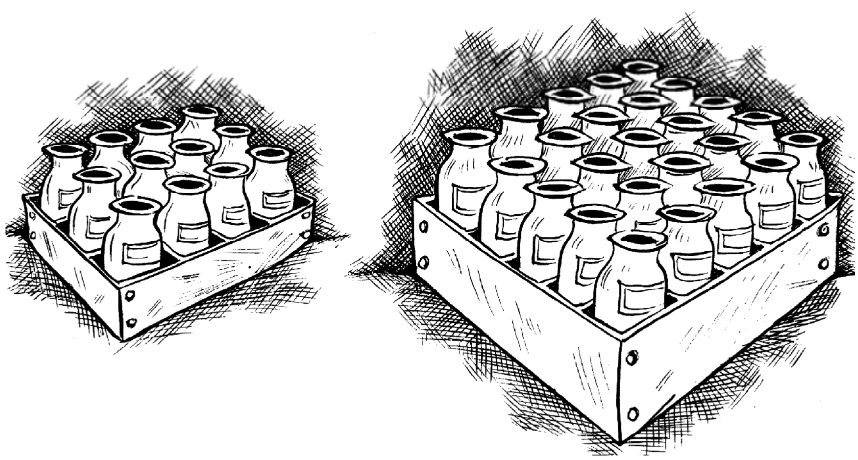
(iii) రెండు వరుస చువ్వల మధ్యకోణం 40° ఉండడానికి ఎన్ని చువ్వలు అవసరమగును?

4. ఒక మిఠాయి ప్యాకెట్‌ను 24 మంది పిల్లలకు పంచినప్పుడు ప్రతి ఒక్కరికీ 5 మిఠాయిలు వస్తాయి. ఆ పిల్లల సంఖ్య 4 తగ్గితే ఒక్కొక్కరికి ఎన్ని మిఠాయిలు వస్తాయి?

5. ఒక రైతు వద్ద 20 పశువులకు 6 రోజులకు సరిపడా దాణా ఉంది. అతని వద్ద ఇంకా 10 పశువులు అదనంగా ఉండి ఉంటే దాణా ఎన్నిరోజులకు సరిపోతుంది?

6. జస్మిందర్ ఇంటిలో గల విద్యుత్ తీగలను ముగ్గురు వ్యక్తులు నాలుగు రోజులలో మార్చగలరని కాంట్రాక్టర్ అంచనా వేశాడు. ముగ్గురుకి బదులుగా నలుగురితో ఆ పని చేయిస్తే ఆ పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేస్తారు?

7. ప్రతి పెట్టెలో 12 సీసాలు ఉండునట్లు 25 పెట్టెలలో సీసాలను నింపారు. అదే సీసాలను ప్రతి పెట్టెలో 20 చొప్పున నింపితే ఎన్ని పెట్టెలు పట్టి ఉంటాయి?



8. ఒక ఫ్యాక్టరీకి కావలసిన సంఖ్యలో వస్తువులను 63 రోజులలో తయారు చేయడానికి 42 యంత్రాలు అవసరం. అదే సంఖ్యలో వస్తువులను 54 రోజులలో తయారు చేయడానికి ఎన్ని యంత్రాలు అవసరం?

9. ఒక కారు గంటకు 60కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణించిన గమ్యాన్ని చేరడానికి 2 గంటల సమయం పడుతుంది. ఒకవేళ ఆ కారు గంటకు 80కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణించిన గమ్యాన్ని చేరుటకు ఎంత సమయం పడుతుంది?

10. ఒక ఇంటికి క్రొత్త కిటికీలను ఇద్దరు పనివాళ్లు మూడు రోజులలో అమర్చగలరు.

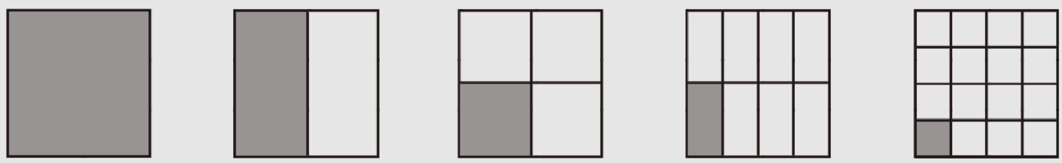
(i) వీరిలో ఒకరికి పని ప్రారంభానికి ముందే అనారోగ్యం వచ్చింది. ఈ పరిస్థితులలో ఆ పని పూర్తి చేయడానికి ఎంత సమయం కావాలి?

(ii) ఆ కిటికీలను ఒకేరోజులో అమర్చడానికి ఎంతమంది కావాలి?

11. ఒక పాఠశాలలో 45నిమిషాల కాలవ్యవధితో 8 పీరియడ్లు కలవు. పాఠశాల పని గంటలు అవే అనుకుంటే ఒకరోజులో 9 పీరియడ్లు ఉన్న ఒక పీరియడ్‌కు ఎంత కాలవ్యవధి ఉండాలి?

DO THIS

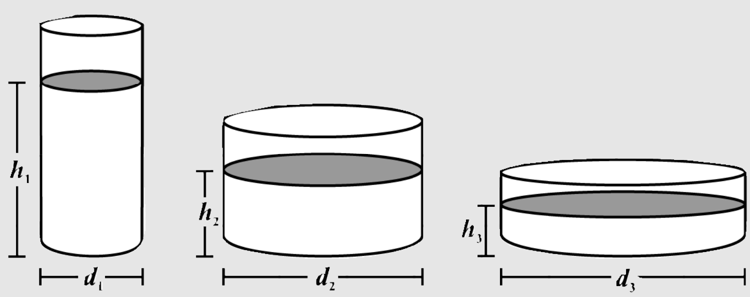
1. Take a sheet of paper. Fold it as shown in the figure. Count the number of parts and the area of a part in each case.



Tabulate your observations and discuss with your friends. Is it a case of inverse proportion? Why?

Number of parts	1	2	4	8	16
Area of each part	area of the paper	$\frac{1}{2}$ the area of the paper	...	...	...

2. Take a few containers of different sizes with circular bases. Fill the same amount of water in each container. Note the diameter of each container and the respective height at which the water level stands. Tabulate your observations. Is it a case of inverse proportion?



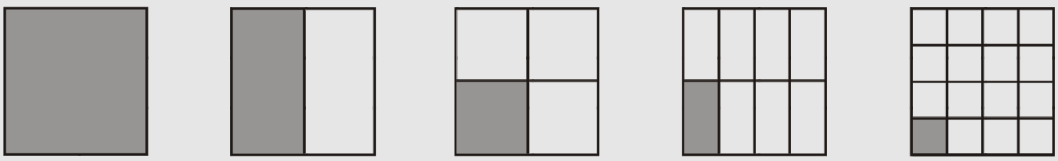
Diameter of container (in cm)			
Height of water level (in cm)			

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Two quantities x and y are said to be in **direct proportion** if they increase (decrease) together in such a manner that the ratio of their corresponding values remains constant. That is if $\frac{x}{y} = k$ [k is a positive number], then x and y are said to vary directly. In such a case if y_1, y_2 are the values of y corresponding to the values x_1, x_2 of x respectively then $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.

ఇవి చేయండి

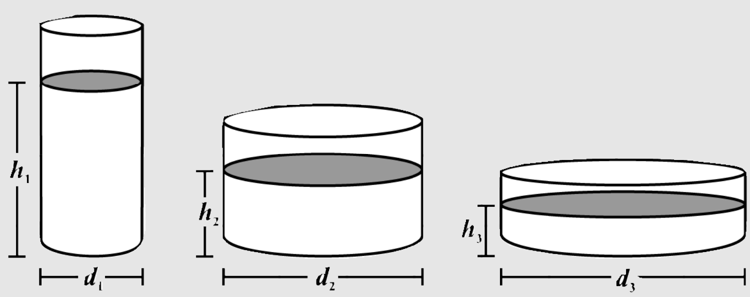
1. ఒక కాగితాన్ని తీసుకోండి. పటంలో చూపిన విధంగా మడవండి. ప్రతి సందర్భంలోను భాగాల సంఖ్య మరియు వైశాల్యం కనుగొనండి.



మీరు గమనించిన విషయాలను పట్టికలో నమోదుచేసి మీ స్నేహితులతో చర్చించండి. అవి విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయా? ఎందుకు?

భాగాల సంఖ్య	1	2	4	8	16
ప్రతి భాగపు వైశాల్యం	కాగితపు వైశాల్యం	$\frac{1}{2}$ కాగితపు వైశాల్యం	....	....	....

2. వృత్తాకార భూమిగా గల వివిధ పరిమాణపు కొన్ని పాత్రలను తీసుకోండి. ప్రతి పాత్రలో ఒకే ప్రమాణంలో నీటిని నింపండి. ప్రతి పాత్ర యొక్క వ్యాసం మరియు దానికనుగుణంగా నీటి మట్టపు ఎత్తును నమోదు చేయండి. మీరు గమనించిన విషయాలను పట్టికలో రాయండి. ఇవి విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయా?



పాత్ర యొక్క వ్యాసం (సెం.మీ.లలో)			
నీటి మట్టం ఎత్తు (సెం.మీ.లలో)			

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. x మరియు y లు రెండు చరరాశులు, వాటి అనురూప విలువల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉండునట్లు వాటి విలువలు కలిసి పెరిగిన (తగ్గిన) x, y లు **అనులోమానుపాతంలో** ఉన్నాయని అంటాం. అనగా $\frac{x}{y} = k$ (k ఒక ధన సంఖ్య) అయిన x మరియు y లు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయని అంటాం. ఇలాంటి సందర్భంలో x యొక్క విలువలు x_1, x_2 లకు అనురూప y యొక్క విలువలు y_1, y_2 లు అయిన $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ అగును.

2. Two quantities x and y are said to be in **inverse proportion** if an increase in x causes a proportional decrease in y (and vice-versa) in such a manner that the product of their corresponding values remains constant. That is, if $xy = k$, then x and y are said to vary inversely. In this case if y_1, y_2 are the values of y corresponding to the values x_1, x_2 of x respectively then $x_1 y_1 = x_2 y_2$ or $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

2. x మరియు y లు రెండు చరరాశులు, వాటి అనురూప విలువల లబ్ధం స్థిరంగా ఉండునట్లు x రాశిలో పెరుగుదల y రాశిలో తరుగుదలకు (లేదా x రాశిలో తరుగుదల y రాశిలో పెరుగుదలకు) కారణమైన x, y లు **విలోమానుపాతంలో** ఉన్నాయని అంటాం. అనగా $xy = k$ అయిన x మరియు y లు ఒకదానికొకటి విలోమంగా మారుతూ ఉంటాయి. ఇలాంటి సందర్భంలో x యొక్క విలువలు x_1, x_2 లకు అనురూప y యొక్క విలువలు y_1, y_2 లు అయిన $x_1 y_1 = x_2 y_2$ లేదా $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ అగును.

Factorisation

CHAPTER 14

0852CH14

14.1 Introduction

14.1.1 Factors of natural numbers

You will remember what you learnt about factors in Class VI. Let us take a natural number, say 30, and write it as a product of other natural numbers, say

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

Thus, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 and 30 are the factors of 30. Of these, 2, 3 and 5 are the prime factors of 30 (Why?)

A number written as a product of prime factors is said to be in the prime factor form; for example, 30 written as $2 \times 3 \times 5$ is in the prime factor form.

> We know that 30 can also be written as
> $30 = 1 \times 30$
> Thus, 1 and 30 are also factors of 30. You will notice that 1 is a factor of any number. For example, $101 = 1 \times 101$. However, when we write a number as a product of factors, we shall not write 1 as a factor, unless it is specially required.

The prime factor form of 70 is $2 \times 5 \times 7$.

The prime factor form of 90 is $2 \times 3 \times 3 \times 5$, and so on.

Similarly, we can express algebraic expressions as products of their factors. This is what we shall learn to do in this chapter.

14.1.2 Factors of algebraic expressions

We have seen in Class VII that in algebraic expressions, terms are formed as products of factors. For example, in the algebraic expression $5xy + 3x$ the term $5xy$ has been formed by the factors 5, x and y, i.e.,

$$5xy = 5 \times x \times y$$

Observe that the factors 5, x and y of $5xy$ cannot further be expressed as a product of factors. We may say that 5, x and y are 'prime' factors of $5xy$. In algebraic expressions, we use the word 'irreducible' in place of 'prime'. We say that $5 \times x \times y$ is the irreducible form of $5xy$. Note $5 \times (xy)$ is not an irreducible form of $5xy$, since the factor xy can be further expressed as a product of x and y, i.e., $xy = x \times y$.

> Note 1 is a factor of $5xy$, since
> $5xy = 1 \times 5 \times x \times y$
> In fact, 1 is a factor of every term. As in the case of natural numbers, unless it is specially required, we do not show 1 as a separate factor of any term.

కారణాంక విభజన

అధ్యాయం 14

J5J2L1

14.1 పరిచయం

14.1.1 సహజ సంఖ్యల కారణాంకాలు

మీరు 6వ తరగతిలో కారణాంకాల గురించి నేర్చుకున్నది జ్ఞాపకం తెచ్చుకోండి. ఒక సహజ సంఖ్య 30ని తీసుకుందాం. 30ను ఇతర సహజ సంఖ్యల లబ్ధంగా రాద్దాము.

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

ఈ విధముగా 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 మరియు 30 లు 30 యొక్క కారణాంకాలు అవుతాయి. వీటిలో 2,3 మరియు 5లు 30 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు (ఎందుకు?)

ఒక సంఖ్యను దాని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసినపుడు అది ప్రధాన కారణాంక లబ్ధ రూపంలో ఉంది అంటారు. ఉదాహరణకు, 30ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ రూపంలో $2 \times 3 \times 5$గా రాయవచ్చు.

30ని 1×30 అని కూడా రాయవచ్చని మనకు తెలుసు. అనగా, 1 మరియు 30లు కూడా 30 యొక్క కారణాంకాలు. 1 ఏ సంఖ్యకైనా కారణాంకమవుతుందని మీరు గమనించారు. ఉదాహరణకు $101 = 1 \times 101$. ఒక సంఖ్యను దాని కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయునపుడు ప్రత్యేకించి అవసరం లేనపుడు 1ని కారణాంకంగా చూపనవసరం లేదు.

70 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ రూపం $2 \times 5 \times 7$.

90 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధ రూపం $2 \times 3 \times 3 \times 5$

ఇదేవిధంగా, మనం బీజీయ సమాసాలను కూడా వాటి కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. వాటి గురించి మనం ఈ అధ్యాయంలో నేర్చుకుంటాము.

14.1.2 బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజన

బీజీయ సమాసాలలో బీజీయ పదాలు వాటి కారణాంకాల లబ్ధంతో ఏర్పడతాయని మనం 7వ తరగతిలో నేర్చుకున్నాం. ఉదాహరణకు బీజీయ సమాసం $5xy + 3x$ లో $5xy$ అనే పదం 5, x మరియు y అను కారణాంకాలచే ఏర్పడినది. అనగా, $5xy = 5 \times x \times y$

$5xy$ యొక్క కారణాంకాలయిన 5,x,y లను తిరిగి కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయడానికి వీలు కాదని గమనించండి. అందువలన 5,x మరియు y లను 5xy యొక్క 'ప్రధాన' కారణాంకాలుగా చెప్పవచ్చు. బీజీయ సమాసాలలో, 'ప్రధాన కారణాంకాలు' బదులు 'అవిభాజ్య కారణాంకములు' అను పదం ఉపయోగిస్తాం. $5 \times x \times y$ ని 5xy యొక్క అవిభాజ్య కారణాంక రూపం అంటాం. 5 x (xy) అనేది 5xy యొక్క అవిభాజ్య కారణాంక రూపం కాదు. ఎందుకంటే xy కారణాంకాన్ని మరలా x మరియు y ల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చు. అనగా, $xy = x$ x y.

గమనించండి: 1, $5xy$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది. ఎందుకనగా $5xy = 1 \times 5 \times x \times y$ నిజానికి 1 బీజీయ పదాలన్నింటికి కారణాంకమవుతుంది. సహజ సంఖ్యలలో వలే ప్రత్యేకంగా అవసరం లేని సందర్భాలలో 1ని ఏదైనా బీజీయ పదానికి కారణాంకంగా చూపించము.

Next consider the expression $3x\,(x + 2)$. It can be written as a product of factors. 3, x and $(x + 2)$

$$3x(x + 2) = 3 \times x \times (x+2)$$

The factors 3, x and $(x + 2)$ are irreducible factors of $3x\,(x + 2)$.

Similarly, the expression $10x\,(x + 2)\,(y + 3)$ is expressed in its irreducible factor form as $10x\,(x + 2)\,(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x+2) \times (y+3)$.

14.2 What is Factorisation?

When we factorise an algebraic expression, we write it as a product of factors. These factors may be numbers, algebraic variables or algebraic expressions.

Expressions like $3xy$, $5x^2y$, $2x\,(y + 2)$, $5\,(y + 1)\,(x + 2)$ are already in factor form. Their factors can be just read off from them, as we already know.

On the other hand consider expressions like $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$. It is not obvious what their factors are. We need to develop systematic methods to factorise these expressions, i.e., to find their factors. This is what we shall do now.

14.2.1 Method of common factors

- We begin with a simple example: Factorise $2x + 4$.

  We shall write each term as a product of irreducible factors;

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$

Hence $\qquad 2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$

Notice that factor 2 is common to both the terms.

Observe, by distributive law

$$2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

Therefore, we can write

$$2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2\,(x + 2)$$

Thus, the expression $2x + 4$ is the same as $2\,(x + 2)$. Now we can read off its factors: they are 2 and $(x + 2)$. These factors are irreducible.

Next, factorise $5xy + 10x$.

The irreducible factor forms of $5xy$ and $10x$ are respectively,

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

Observe that the two terms have 5 and x as common factors. Now,

$$5xy + 10x = (5 \times x \times y) + (5 \times x \times 2)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

We combine the two terms using the distributive law,

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$$

Therefore, $5xy + 10x = 5\,x\,(y + 2)$. (This is the desired factor form.)

తరువాత $3x(x + 2)$ బీజీయ సమాసాన్ని పరిశీలిద్దాం. దీనిని 3, x మరియు $(x + 2)$ కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. $3x(x + 2) = 3 \times x \times (x+2)$.

3, x, $(x + 2)$ లు $3x(x + 2)$ యొక్క అవిభాజ్య కారణాంకాలు. ఇదేవిధంగా $10x(x + 2)(y + 3)$ బీజీయ సమాసాన్ని దాని అవిభాజ్య కారణాంక రూపంలో క్రిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$10x(x + 2)(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x+2) \times (y+3)$.

14.2 కారణాంక విభజన అనగా నేమి?

ఒక బీజీయ సమాసాన్ని కారణాంక విభజన చేసేటప్పుడు మనం దానిని కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయాలి. ఈ కారణాంకాలు సంఖ్యలు, చరరాశులు లేదా బీజీయ సమాసాలు కావచ్చు.

$3xy$, $5x^2y$, $2x(y + 2)$, $5(y + 1)(x + 2)$ వంటి బీజీయ సమాసాలు కారణాంకాల లబ్ధరూపంలో ఉన్నాయి. ఇంతకుముందు మనకు తెలిసినట్లుగా బీజీయ సమాసాన్ని చూసి వీటి కారణాంకాలు చెప్పవచ్చు.

ఇప్పుడు $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$ వంటి బీజీయ సమాసాలను పరిశీలిద్దాం. వీటి కారణాంకాలేవో చూసిన వెంటనే ఖచ్చితంగా చెప్పలేము. ఇటువంటి బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజన చేయడానికి అనగా వాటి కారణాంకాలు కనుగొనడానికి మనం క్రమబద్ధమైన పద్ధతులను అభివృద్ధి చేయాల్సిన అవసరం ఉంది. వీటిపై ఇప్పుడు అధ్యయనం చేద్దాం.

14.2.1 సామాన్య కారణాంకముల పద్ధతి

- మనం ఒక సులభమైన ఉదాహరణతో ప్రారంభిద్దాం. $2x + 4$ ను కారణాంక విభజన చేయండి. వీటిలో ప్రతి పదాన్ని అవిభాజ్య కారణాంకాల లబ్ధంగా రాద్దాం

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$

అందువలన $2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$

రెండు పదాలలో 2 ఉమ్మడి కారణాంకంగా ఉండడం గమనించండి.

విభాగన్యాయం ప్రకారం $2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$

అందువలన, $2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2(x + 2)$ అని రాయవచ్చు.

అనగా $2x + 4$ మరియు $2(x + 2)$లు ఒకేవిధమైన బీజీయ సమాసాలు. ఇపుడు మనం దీని కారణాంకాలు చెప్పవచ్చు. అవి 2 మరియు $(x + 2)$లు. ఈ కారణాంకాలు అవిభాజ్య కారణాంకాలు

తరువాత $5xy + 10x$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

$5xy$ మరియు $10x$ ల అవిభాజ్య కారణాంకాల రూపం వరుసగా,

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

ఈ రెండు పదాలలో 5 మరియు x లు ఉమ్మడి కారణాంకాలని గమనించండి. ఇప్పుడు

$$5xy + 10x = (5 \times x \times y) + (5 \times x \times 2)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి రెండు పదాలను కలిపి రాయగా,

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$$

అందువలన, $5xy + 10x = 5x(y + 2)$. (ఇది కావలసిన కారణాంక రూపం.)

Example 1: Factorise $12a^2b + 15ab^2$

Solution: We have $12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$

$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$

The two terms have 3, a and b as common factors.

Therefore, $12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$

$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$ (combining the terms)

$= 3ab \times (4a + 5b)$

$= 3ab\ (4a + 5b)$ (required factor form)

Example 2: Factorise $10x^2 - 18x^3 + 14x^4$

Solution:

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$

$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$

The common factors of the three terms are 2, x and x.

Therefore, $10x^2 - 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x)$

$+ (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$

$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$ (combining the three terms)

$= 2x^2 \times (5 - 9x + 7x^2) = \underbrace{2x^2(7x^2 - 9x + 5)}$

Do you notice that the factor form of an expression has only one term?

TRY THESE

Factorise: (i) $12x + 36$ (ii) $22y - 33z$ (iii) $14pq + 35pqr$

14.2.2 Factorisation by regrouping terms

Look at the expression $2xy + 2y + 3x + 3$. You will notice that the first two terms have common factors 2 and y and the last two terms have a common factor 3. But there is no single factor common to all the terms. How shall we proceed?

Let us write $(2xy + 2y)$ in the factor form:

$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$

$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$

$= (2y \times x) + (2y \times 1) = 2y\ (x + 1)$

Note, we need to show 1 as a factor here. Why?

Similarly, $3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$

$= 3 \times (x + 1) = 3\ (x + 1)$

Hence, $2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\ (x + 1) + 3\ (x + 1)$

Observe, now we have a common factor $(x + 1)$ in both the terms on the right hand side. Combining the two terms,

$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\ (x + 1) + 3\ (x + 1) = (x + 1)\ (2y + 3)$$

The expression $2xy + 2y + 3x + 3$ is now in the form of a product of factors. Its factors are $(x + 1)$ and $(2y + 3)$. Note, these factors are irreducible.

ఉదాహరణ 1: $12a^2b + 15ab^2$ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన:
$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

ఈ రెండు పదాల ఉమ్మడి కారణాంకాలు $3, a, b$

అందువలన, $12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$

$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$ (రెండు పదాలను కలిపి రాయగా)

$= 3ab \times (4a + 5b)$

$= 3ab\,(4a + 5b)$ (కావలసిన కారణాంక రూపం)

ఉదాహరణ 2: $10x^2 - 18x^3 + 14x^4$ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన:
$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$
$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$
$$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$$

ఈ మూడు పదాల ఉమ్మడి కారణాంకాలు $2, x, x$

అందువలన, $10x^2 - 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x)$
$+ (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$

$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$(మూడు పదాలను కలిపి రాయగా)

$= 2x^2 \times (5 - 9x + 7x^2) = \underbrace{2x^2(7x^2 - 9x + 5)}$

ఒక బీజీయ సమాస కారణాంక రూపం ఒకే పదం కలిగి ఉండడం గమనించారా?

ప్రయత్నించండి

కారణాంక విభజన చేయండి: (i) $12x + 36$ (ii) $22y - 33z$
(iii) $14pq + 35pqr$

14.2.2 గ్రూపులుగా విభజించడం ద్వారా కారణాంక విభజన

$2xy + 2y + 3x + 3$ సమాసమును పరిశీలించండి. మొదటి రెండు పదాలకు $2, y$ మరియు చివరి రెండు పదాలకు 3 ఉమ్మడి కారణాంకాలుగా ఉండటాన్ని మీరు గమనిస్తారు. కాని అన్ని పదాలకు ఒకే ఉమ్మడి కారణాంకం లేదు. మరి ఎలా కారణాంక విభజన చేద్దాం?

$(2xy + 2y)$ ను కారణాంక రూపంలో రాద్దాం:

$$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$$
$$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$$
$$= (2y \times x) + (2y \times 1) = 2y\,(x + 1)$$

ఇక్కడ 1ని కారణాంకంగా చూపవలసిన అవసరాన్ని గమనించారా? ఎందుకు?

ఇదేవిధంగా, $$3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$$
$$= 3 \times (x + 1) = 3\,(x + 1)$$

అందువలన, $2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1)$

పరిశీలిస్తే ఇప్పుడు $(x + 1)$ సమాసపు కుడి భాగంలో ఉన్న రెండు పదాలకు ఉమ్మడి కారణాంకముగా ఉన్నది. రెండు పదాలను కలిపి రాయగా

$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1) = (x + 1)\,(2y + 3)$$

ఇప్పుడు $2xy + 2y + 3x + 3$ సమాసము కారణాంకముల లబ్ధ రూపంలో ఉంది. $(x + 1)$ మరియు $(2y + 3)$ లు కారణాంకములు. ఇవి అవిభాజ్య కారణాంకాలని గమనించవచ్చు.

What is regrouping?

Suppose, the above expression was given as $2xy + 3 + 2y + 3x$; then it will not be easy to see the factorisation. Rearranging the expression, as $2xy + 2y + 3x + 3$, allows us to form groups $(2xy + 2y)$ and $(3x + 3)$ leading to factorisation. This is regrouping.

Regrouping may be possible in more than one ways. Suppose, we regroup the expression as: $2xy + 3x + 2y + 3$. This will also lead to factors. Let us try:

$$\begin{aligned} 2xy + 3x + 2y + 3 &= 2 \times x \times y + 3 \times x + 2 \times y + 3 \\ &= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3) \\ &= (2y + 3)\,(x + 1) \end{aligned}$$

The factors are the same (as they have to be), although they appear in different order.

Example 3: Factorise $6xy - 4y + 6 - 9x$.

Solution:

Step 1 Check if there is a common factor among all terms. There is none.

Step 2 Think of grouping. Notice that first two terms have a common factor $2y$;

$$6xy - 4y = 2y\,(3x - 2) \qquad \text{(a)}$$

What about the last two terms? Observe them. If you change their order to $-9x + 6$, the factor $(3x - 2)$ will come out;

$$\begin{aligned} -9x + 6 &= -3\,(3x) + 3\,(2) \\ &= -3\,(3x - 2) \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

Step 3 Putting (a) and (b) together,

$$\begin{aligned} 6xy - 4y + 6 - 9x &= 6xy - 4y - 9x + 6 \\ &= 2y\,(3x - 2) - 3\,(3x - 2) \\ &= (3x - 2)\,(2y - 3) \end{aligned}$$

The factors of $(6xy - 4y + 6 - 9x)$ are $(3x - 2)$ and $(2y - 3)$.

EXERCISE 14.1

1. Find the common factors of the given terms.

(i) $12x$, 36 (ii) $2y$, $22xy$ (iii) $14\,pq$, $28p^2q^2$

(iv) $2x$, $3x^2$, 4 (v) $6\,abc$, $24ab^2$, $12\,a^2b$

(vi) $16\,x^3$, $-4x^2$, $32x$ (vii) $10\,pq$, $20qr$, $30rp$

(viii) $3x^2\,y^3$, $10x^3\,y^2$, $6\,x^2\,y^2z$

2. Factorise the following expressions.

(i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$

(iv) $-16\,z + 20\,z^3$ (v) $20\,l^2\,m + 30\,a\,l\,m$

(vi) $5\,x^2\,y - 15\,xy^2$ (vii) $10\,a^2 - 15\,b^2 + 20\,c^2$

(viii) $-4\,a^2 + 4\,ab - 4\,ca$ (ix) $x^2\,y\,z + x\,y^2z + x\,y\,z^2$

(x) $a\,x^2\,y + b\,x\,y^2 + c\,x\,y\,z$

3. Factorise.

(i) $x^2 + x\,y + 8x + 8y$ (ii) $15\,xy - 6x + 5y - 2$

గ్రూపులుగా విభజించడం అనగానేమి?

పై బీజీయ సమాసాన్ని $2xy + 3 + 2y + 3x$ రూపంలో ఇచ్చినపుడు కారణాంక విభజన చేయడం సులభం కాదు. సమాసాన్ని $2xy + 2y + 3x + 3$ గా పునరమరిక చేసిన రెండు గ్రూపులు $(2xy+2y)$ మరియు $(3x+3)$ లు లభించి తద్వార కారణాంక విభజన చేయవచ్చు. గ్రూపులుగా విభజించడమంటే ఇదే. గ్రూపులుగా విభజించడం ఒకటి కంటే ఎక్కువ పద్ధతులలో చేయవచ్చు. పై బీజీయ సమాసాన్ని $2xy + 3x + 2y + 3$ అని రాసినపుడు కూడా కారణాంక విభజన చేయవచ్చు. దీనిని ప్రయత్నిద్దాం:

$$2xy + 3x + 2y + 3 = 2 \times x \times y + 3 \times x + 2 \times y + 3$$
$$= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3)$$
$$= (2y + 3)(x + 1)$$

కారణాంకములు వేరే క్రమములో కనిపించినప్పటికి అవి ఒకటే (సమానం).

ఉదాహరణ 3: $6xy - 4y + 6 - 9x$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన:

సోపానం 1 అన్ని పదాలకు ఏదైనా ఉమ్మడి కారణాంకం ఉందేమో చూడండి. ఏదీ లేదు.

సోపానం 2 పదాలను గ్రూపులుగా విభజించడం గురించి ఆలోచిద్దాం. మొదటి రెండు పదాలకు $2y$ సామాన్య కారణాంకంగా ఉండడం గమనించండి.

$$6xy - 4y = 2y(3x - 2) \qquad (a)$$

చివరి రెండు పదాల సంగతి ఏమిటి? వాటిని పరిశీలించండి. వాటి క్రమాన్ని $-9x + 6$ గా మార్చిన, $(3x - 2)$ కారణాంకం వస్తుంది;

$$-9x + 6 = -3(3x) + 3(2)$$
$$= -3(3x - 2) \qquad (b)$$

సోపానం 3 (a) మరియు (b) లను కలిపి రాసినపుడు,

$$6xy - 4y + 6 - 9x = 6xy - 4y - 9x + 6$$
$$= 2y(3x - 2) - 3(3x - 2)$$
$$= (3x - 2)(2y - 3)$$

$(6xy - 4y + 6 - 9x)$ యొక్క కారణాంకాలు $(3x - 2)$ మరియు $(2y - 3)$.

అభ్యాసం 14.1

1. ఈ క్రింది ఇచ్చిన పదాలకు ఉమ్మడి కారణాంకములు కనుగొనండి.

(i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14pq, 28p^2q^2$
(iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6abc, 24ab^2, 12a^2b$
(vi) $16x^3, -4x^2, 32x$ (vii) $10pq, 20qr, 30rp$
(viii) $3x^2y^3, 10x^3y^2, 6x^2y^2z$

2. ఈ క్రింది బీజీయ సమాసాలకు కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$
(iv) $-16z + 20z^3$ (v) $20l^2m + 30alm$
(vi) $5x^2y - 15xy^2$ (vii) $10a^2 - 15b^2 + 20c^2$
(viii) $-4a^2 + 4ab - 4ca$ (ix) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$
(x) $ax^2y + bxy^2 + cxyz$

3. కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $x^2 + xy + 8x + 8y$ (ii) $15xy - 6x + 5y - 2$

(iii) $ax + bx - ay - by$ (iv) $15\,pq + 15 + 9q + 25p$

(v) $z - 7 + 7\,x\,y - x\,y\,z$

14.2.3 Factorisation using identities

We know that

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(I)}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{(II)}$$

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{(III)}$$

The following solved examples illustrate how to use these identities for factorisation. What we do is to observe the given expression. If it has a form that fits the right hand side of one of the identities, then the expression corresponding to the left hand side of the identity gives the desired factorisation.

Example 4: Factorise $x^2 + 8x + 16$

Solution: Observe the expression; it has three terms. Therefore, it does not fit Identity III. Also, it's first and third terms are perfect squares with a positive sign before the middle term. So, it is of the form $a^2 + 2ab + b^2$ where $a = x$ and $b = 4$

such that $a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2\,(x)\,(4) + 4^2$

$= x^2 + 8x + 16$

Since $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,

by comparison $x^2 + 8x + 16 = (\,x + 4)^2$ (the required factorisation)

Observe here the given expression is of the form $a^2 - 2ab + b^2$.
Where $a = 2y$, and $b = 3$
with $2ab = 2 \times 2y \times 3 = 12y$.

Example 5: Factorise $4y^2 - 12y + 9$

Solution: Observe $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$ and $12y = 2 \times 3 \times (2y)$

Therefore, $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times 3 \times (2y) + (3)^2$

$= (\,2y - 3)^2$ (required factorisation)

Example 6: Factorise $49p^2 - 36$

Solution: There are two terms; both are squares and the second is negative. The expression is of the form $(a^2 - b^2)$. Identity III is applicable here;

$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (\,6\,)^2$

$= (7p - 6\,)\,(\,7p + 6)$ (required factorisation)

Example 7: Factorise $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

Solution: The first three terms of the given expression form $(a - b)^2$. The fourth term is a square. So the expression can be reduced to a difference of two squares.

Thus, $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (Applying Identity II)

$= [(a - b) - c)\,((a - b) + c)]$ (Applying Identity III)

$= (a - b - c)\,(a - b + c)$ (required factorisation)

Notice, how we applied two identities one after the other to obtain the required factorisation.

Example 8: Factorise $m^4 - 256$

Solution: We note $m^4 = (m^2)^2$ and $256 = (16)^2$

(iii) $ax + bx - ay - by$ (iv) $15\,pq + 15 + 9q + 25p$

(v) $z - 7 + 7\,xy - xyz$

14.2.3 సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయడం

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (III) లు మనకు తెలిసిన సర్వ సమీకరణాలు.

కారణాంక విభజనలో ఈ సర్వ సమీకరణాలను ఎలా ఉపయోగించాలో క్రింది ఉదాహరణలు వివరిస్తాయి. మనము ఇచ్చిన బీజీయ సమాసాన్ని పరిశీలించాలి. దత్త సమాసరూపం, పై ఏదైనా ఒక సర్వసమీకరణం కుడిభాగానికి సరిపోయినచో దానికి అనుగుణమైన సర్వసమీకరణం ఎడమభాగం బీజీయ సమాసం యొక్క కావాలసిన కారణాంక విభజన అగును.

ఉదాహరణ 4: $x^2 + 8x + 16$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: దత్త సమాసాన్ని పరిశీలించిన; అందులో 3 పదాలున్నవి. అందువలన, ఇది సర్వ సమీకరణం III కు సరిపోదు మరియు దాని మొదటి, మూడవ పదాలు పరిపూర్ణ వర్గాలవుతూ మధ్య పదం ధన సంజ్ఞను కలిగి ఉంది. కావున ఇది $a^2 + 2ab + b^2$ రూపంలో ఉంది. ఇచ్చట $a = x$ మరియు $b = 4$

కావున $a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2\,(x)\,(4) + 4^2$

$= x^2 + 8x + 16$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ అయినందున

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (కావలసిన కారణాంక విభజన)

గమనిక: దత్త సమాసము $a^2 - 2ab + b^2$ రూపంలో ఉంది. $a = 2y$, $b = 3$ మరియు $2ab = 2 \times 2y \times 3 = 12y$

ఉదాహరణ 5: $4y^2 - 12y + 9$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: దత్త సమాసాన్ని పరిశీలించిన $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$ మరియు $12y = 2 \times 3 \times (2y)$

అందువలన $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times 3 \times (2y) + (3)^2$

$= (2y - 3)^2$ (కావలసిన కారణాంక విభజన)

ఉదాహరణ 6: $49p^2 - 36$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమాసంలో రెండు పదాలున్నవి. రెండూ పరిపూర్ణ వర్గములు మరియు రెండవ పదం ఋణ సంజ్ఞను కలిగి ఉంది. దత్త సమాసము $(a^2 - b^2)$ రూపంలో ఉంది. కావున ఇక్కడ సర్వసమీకరణం III ను ఉపయోగించవచ్చు.

$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (6)^2$

$= (7p - 6)(7p + 6)$ (కావలసిన కారణాంక విభజన)

ఉదాహరణ 7: $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమాసంలో మొదటి మూడు పదాలు $(a - b)^2$ రూపంలో ఉన్నాయి. నాల్గవ పదం పరిపూర్ణ వర్గం. కావున దత్త సమాసాన్ని రెండు పరిపూర్ణ వర్గాల భేదంగా రాయవచ్చు.

$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (సర్వసమీకరణం II ఉపయోగించి)

$= [(a - b) - c)\,((a - b) + c)]$ (సర్వసమీకరణం III ఉపయోగించి)

$= (a - b - c)\,(a - b + c)$ (కావలసిన కారణాంక విభజన)

కావలసిన కారణాంక విభజన చేయుటకు రెండు సర్వ సమీకరణాలను ఒకదాని తర్వాత ఒకటి ఎలా ఉపయోగించామో గమనించండి.

ఉదాహరణ 8: $m^4 - 256$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: $m^4 = (m^2)^2$ మరియు $256 = (16)^2$

Thus, the given expression fits Identity III.

Therefore, $m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$

$= (m^2 - 16)\ (m^2 + 16)$ [(using Identity (III)]

Now, $(m^2 + 16)$ cannot be factorised further, but $(m^2 - 16)$ is factorisable again as per Identity III.

$$m^2 - 16 = m^2 - 4^2$$
$$= (m-4)\ (m+4)$$

Therefore, $m^4 - 256 = (m-4)\ (m+4)\ \ (m^2+16)$

14.2.4 Factors of the form $(x + a)\ (x + b)$

Let us now discuss how we can factorise expressions in one variable, like $x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$, etc. Observe that these expressions are not of the type $(a + b)^2$ or $(a - b)^2$, i.e., they are not perfect squares. For example, in $x^2 + 5x + 6$, the term 6 is not a perfect square. These expressions obviously also do not fit the type $(a^2 - b^2)$ either.

They, however, seem to be of the type $x^2 + (a + b)\ x + a\ b$. We may therefore, try to use Identity IV studied in the last chapter to factorise these expressions:

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab \qquad \text{(IV)}$$

For that we have to look at the coefficients of x and the constant term. Let us see how it is done in the following example.

Example 9: Factorise $x^2 + 5x + 6$

Solution: If we compare the R.H.S. of Identity (IV) with $x^2 + 5x + 6$, we find $ab = 6$, and $a + b = 5$. From this, we must obtain a and b. The factors then will be $(x + a)$ and $(x + b)$.

If $a\ b = 6$, it means that a and b are factors of 6. Let us try $a = 6$, $b = 1$. For these values $a + b = 7$, and not 5, So this choice is not right.

Let us try $a = 2$, $b = 3$. For this $a + b = 5$ exactly as required.

The factorised form of this given expression is then $(x + 2)\ (x + 3)$.

> In general, for factorising an algebraic expression of the type $x^2 + px + q$, we find two factors a and b of q (i.e., the constant term) such that
>
> $ab = q$ and $a + b = p$
>
> Then, the expression becomes $x^2 + (a + b)\ x + ab$
>
> or $x^2 + ax + bx + ab$
>
> or $x(x + a) + b(x + a)$
>
> or $(x + a)\ (x + b)$ which are the required factors.

Example 10: Find the factors of $y^2 - 7y + 12$.

Solution: We note $12 = 3 \times 4$ and $3 + 4 = 7$. Therefore,

$$y^2 - 7y + 12 = y^2 - 3y - 4y + 12$$
$$= y\ (y - 3) - 4\ (y - 3) = (y - 3)\ (y - 4)$$

ఇది, సర్వ సమీకరణం III ను పోలిఉంది.

అందువలన, $m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$

$= (m^2 - 16)(m^2 + 16)$ [((III) వ సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి]

ఇప్పుడు, $(m^2 + 16)$ ను మరలా కారణాంక విభజన చేయలేం. కాని $(m^2 - 16)$ ను సర్వసమీకరణం III ను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయవచ్చు.

$$m^2 - 16 = m^2 - 4^2$$

$$= (m - 4)(m + 4)$$

అందువలన, $m^4 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$

14.2.4 $(x + a)(x + b)$ రూపంలో గల కారణాంకాలు

$x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$ మొదలైన ఒకే చర రాశి గల బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజన ఎలా చేయాలో చర్చిద్దాం. ఈ సమాసాలు $(a + b)^2$ లేదా $(a - b)^2$ రూపంలో లేవని గమనించండి. అనగా అవి పరిపూర్ణ వర్గాలు కాదు. ఉదాహరణకు $x^2 + 5x + 6$ లో 6 పరిపూర్ణ వర్గము కాదు. ఈ సమాసాలు $(a^2 - b^2)$ రూపంలో కూడా లేవు.

అయితే, ఇవి $x^2 + (a + b)x + ab$ రూపంలో ఉండవచ్చు అని తెలుస్తుంది. అందువలన 9వ అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న సర్వసమీకరణం IV ను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయడానికి ప్రయత్నం చేద్దాం. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (IV)

అందుకు x యొక్క గుణకాన్ని, స్థిర పదాన్ని గమనించాలి. ఎలా చేయాలో క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా చూద్దాం.

ఉదాహరణ 9: $x^2 + 5x + 6$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన: సర్వ సమీకరణం (IV) యొక్క కుడి భాగాన్ని $x^2 + 5x + 6$ తో పోల్చినపుడు $ab = 6$ మరియు $a + b = 5$ అని కనుగొంటాం. వీటి నుండి, a మరియు b ల విలువలు రాబట్టాలి. అపుడు $(x + a)$ మరియు $(x + b)$ లు కారణాంకాలు అవుతాయి.

$ab = 6$, అనగా a మరియు b లు 6 యొక్క కారణాంకాలు. $a = 6, b = 1$ లను ప్రయత్నిద్దాం. ఈ విలువలకు $a + b = 7$ అవుతుంది, కానీ 5 కాదు. అందువలన ఈ ఎంపిక సరైనది కాదు. $a = 2, b = 3$ లను ప్రయత్నిద్దాం. ఈ విలువలకు $a + b = 5$ అవుతుంది. ఇవే మనకు కావలసిన ఖచ్చిత విలువలు. అపుడు ఇచ్చిన బీజీయ సమాసం కారణాంక రూపం $(x + 2)(x + 3)$ అవుతుంది.

> సాధారణంగా $x^2 + px + q$ రూపంలో ఉన్న బీజీయ సమాసం కారణాంక విభజనకు $ab = q$ మరియు $a + b = p$ అయ్యేటట్లు q (అనగా స్థిర పదం) యొక్క రెండు కారణాంకాలు a మరియు b లను కనుగొంటాము. అపుడు బీజీయ సమాసం $x^2 + (a + b)x + ab$ అవుతుంది.
> లేదా $x^2 + ax + bx + ab$
> లేదా $x(x + a) + b(x + a)$
> లేదా $(x + a)(x + b)$ లు కావలసిన కారణాంకాలు అగును.

ఉదాహరణ 10: $y^2 - 7y + 12$ యొక్క కారణాంకాలు కనుగొనండి.

సాధన: $12 = 3 \times 4$ మరియు $3 + 4 = 7$ అని మనం గమనిస్తాము. అందువలన,

$$y^2 - 7y + 12 = y^2 - 3y - 4y + 12$$

$$= y(y - 3) - 4(y - 3) = (y - 3)(y - 4)$$

Note, this time we did not compare the expression with that in Identity (IV) to identify a and b. After sufficient practice you may not need to compare the given expressions for their factorisation with the expressions in the identities; instead you can proceed directly as we did above.

Example 11: Obtain the factors of $z^2 - 4z - 12$.

Solution: Here $a\,b = -12$; this means one of a and b is negative. Further, $a + b = -4$, this means the one with larger numerical value is negative. We try $a = -4$, $b = 3$; but this will not work, since $a + b = -1$. Next possible values are $a = -6$, $b = 2$, so that $a + b = -4$ as required.

Hence,
$$
\begin{aligned}
z^2 - 4z - 12 &= z^2 - 6z + 2z - 12\\
&= z(z - 6) + 2(z - 6)\\
&= (z - 6)(z + 2)
\end{aligned}
$$

Example 12: Find the factors of $3m^2 + 9m + 6$.

Solution: We notice that 3 is a common factor of all the terms.

Therefore, $3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$

Now, $m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2$ (as $2 = 1 \times 2$)

$$
\begin{aligned}
&= m(m + 1) + 2(m + 1)\\
&= (m + 1)(m + 2)
\end{aligned}
$$

Therefore, $3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$

EXERCISE 14.2

1. Factorise the following expressions.
   (i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$
   (iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$
   (vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$
   (vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (Hint: Expand $(l + m)^2$ first)
   (viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
2. Factorise.
   (i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$
   (iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$
   (vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$
   (viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$
3. Factorise the expressions.
   (i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$
   (iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$
   (vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$
   (viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$

ఈసారి a , b లను గుర్తించుటకు బీజీయ సమాసాన్ని సర్వసమీకరణం (IV) తో పోల్చకపోవుటను గమనించండి. కొంత సాధన తరువాత ఇచ్చిన సమాసాన్ని కారణాంక విభజన చేయుటకు సర్వ సమీకరణాలతో పోల్చనవసరం లేదు. బదులుగా పైన చేసిన విధంగా నేరుగా సాధించవచ్చు.

ఉదాహరణ 11: $z^2 - 4z - 12$ యొక్క కారణాంకాలు రాబట్టండి.

సాధన: ఇచట $ab = -12$; దీని అర్థం a , b లలో ఒకటి ఋణాత్మకం. పైగా $a + b = -4$, అంటే పరిమాణంలో పెద్ద సంఖ్య ఋణాత్మకం. ఇపుడు మనం ప్రయత్నిద్దాం. $a = -4$, $b = 3$ కాని ఇది సరైనది కాదు. ఎందుకంటే $a + b = -1$ తరువాత సాధ్యమయ్యే విలువలు $a = -6$, $b = 2$ అయిన $a + b = -4$, ఇదే మనకు కావలసిన విలువ.

అందువలన,
$$z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$$
$$= z(z - 6) + 2(z - 6)$$
$$= (z - 6)(z + 2)$$

ఉదాహరణ 12: $3m^2 + 9m + 6$ యొక్క కారణాంకాలు కనుగొనండి.

సాధన: అన్ని పదాలలో 3 సామాన్య కారణాంకం అని గమనిస్తాం.

అందువలన, $3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$

ఇప్పుడు, $m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2$ $\quad (2 = 1 \times 2$ కావున)
$$= m(m + 1) + 2(m + 1)$$
$$= (m + 1)(m + 2)$$

అందువలన, $3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$

అభ్యాసం 14.2

1. ఈ క్రింది సమాసాలకు కారణాంక విభజన చేయండి.
   (i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$
   (iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$
   (vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$
   (vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (సూచన: ముందు $(l + m)^2$ విస్తరించండి)
   (viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
2. కారణాంక విభజన చేయండి.
   (i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$
   (iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$
   (vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$
   (viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$
3. బీజీయ సమాసములకు కారణాంక విభజన చేయండి.
   (i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$
   (iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$
   (vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$
   (viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$

4. Factorise.

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$

(iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

5. Factorise the following expressions.

(i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

14.3 Division of Algebraic Expressions

We have learnt how to add and subtract algebraic expressions. We also know how to multiply two expressions. We have not however, looked at division of one algebraic expression by another. This is what we wish to do in this section.

We recall that division is the inverse operation of multiplication. Thus, $7 \times 8 = 56$ gives $56 \div 8 = 7$ or $56 \div 7 = 8$.

We may similarly follow the division of algebraic expressions. For example,

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

Therefore, $6x^3 \div 2x = 3x^2$

and also, $6x^3 \div 3x^2 = 2x$.

(ii) $5x\,(x + 4) = 5x^2 + 20x$

Therefore, $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

and also $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$.

We shall now look closely at how the division of one expression by another can be carried out. To begin with we shall consider the division of a monomial by another monomial.

14.3.1 Division of a monomial by another monomial

Consider $6x^3 \div 2x$

We may write $2x$ and $6x^3$ in irreducible factor forms,

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

Now we group factors of $6x^3$ to separate $2x$,

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

Therefore, $6x^3 \div 2x = 3x^2$.

A shorter way to depict cancellation of common factors is as we do in division of numbers:

$$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

Similarly, $6x^3 \div 2x = \dfrac{6x^3}{2x}$

$$= \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

Example 13: Do the following divisions.

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

Solution:

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

4. కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$

(iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

5. క్రింది సమాసాలకు కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

14.3 బీజీయ సమాసాల భాగహారం

బీజీయ సమాసాల కూడిక, తీసివేత ఎలా చెయ్యాలో మనం నేర్చుకున్నాం. రెండు సమాసాలను ఎలా గుణించాలో కూడా మనకు తెలుసు. కానీ ఒక బీజీయ సమాసాన్ని ఇంకొక బీజీయ సమాసంతో భాగించడం మనం చూడలేదు. ఈ విభాగంలో మనం తెలుసుకుందాం.

భాగహారం అనేది గుణకారానికి విలోమ ప్రక్రియ అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం. అలా, $7 \times 8 = 56$ అయిన $56 \div 8 = 7$ లేదా $56 \div 7 = 8$ అవుతుంది.

బీజీయ సమాసాల భాగాహారంలో ఇదేవిధానాన్ని అనుసరించవచ్చు. ఉదాహరణకు,

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

అందువలన, $6x^3 \div 2x = 3x^2$

మరియు, $6x^3 \div 3x^2 = 2x$.

(ii) $5x\,(x + 4) = 5x^2 + 20x$

అందువలన, $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

మరియు, $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$.

ఇపుడు మనం ఒక సమాసాన్ని మరొక సమాసంతో ఎలా భాగించాలో నిశితంగా గమనిద్దాం. మొదట ఒక ఏక పదిని ఇంకో ఏక పదితో భాగించడాన్ని పరిశీలిద్దాం.

14.3.1 ఒక ఏక పదిని మరొక ఏక పదితో భాగించడం

$6x^3 \div 2x$ ను పరిశీలించండి.

$2x$ మరియు $6x^3$ లను అవిభాజ్య కారణాంకాల రూపంగా రాయవచ్చు.

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

$6x^3$ కారణాంకాలను $2x$ వేరుగా ఉండునట్లు రాసిన

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

అందువలన, $6x^3 \div 2x = 3x^2$.

సూక్ష్మ పద్ధతిలో సంఖ్యల భాగహారంలో చేసినట్లు ఉమ్మడి కారణాంకాలను కొట్టివేయాలి.

$$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

ఇదేవిధంగా, $$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

ఉదాహరణ 13: క్రింది భాగాహారాలు చేయండి.

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

సాధన: (i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

Therefore, $(-20x^4) \div 10x^2 = \dfrac{-2\times2\times5\times x\times x\times x\times x}{2\times5\times x\times x} = -2\times x\times x = -2x^2$

(ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz \quad = \dfrac{7\times x\times x\times y\times y\times z\times z}{2\times7\times x\times y\times z}$

$$= \frac{x\times y\times z}{2} = \frac{1}{2}xyz$$

TRY THESE

Divide.

(i) $24xy^2z^3$ by $6yz^2$ (ii) $63a^2b^4c^6$ by $7a^2b^2c^3$

14.3.2 Division of a polynomial by a monomial

Let us consider the division of the trinomial $4y^3 + 5y^2 + 6y$ by the monomial $2y$.

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2\times2\times y\times y\times y) + (5\times y\times y) + (2\times3\times y)$$

(Here, we expressed each term of the polynomial in factor form) we find that $2\times y$ is common in each term. Therefore, separating $2\times y$ from each term. We get

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2\times y\times(2\times y\times y) + 2\times y\times\left(\frac{5}{2}\times y\right) + 2\times y\times 3$$

$$= 2y\,(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}y\right) + 2y\,(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (The common factor $2y$ is shown separately.

Therefore, $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y} = \frac{2y(2y^2+\frac{5}{2}y+3)}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

Alternatively, we could divide each term of the trinomial by the monomial using the cancellation method.

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

Here, we divide each term of the polynomial in the numerator by the monomial in the denominator.

Example 14: Divide $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ by $8xyz$ using both the methods.

Solution: $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$= 2\times2\times2\times3\times[(x\times x\times y\times z) + (x\times y\times y\times z) + (x\times y\times z\times z)]$

$= 2\times2\times2\times3\times x\times y\times z\times(x+y+z) = 8\times3\times xyz\times(x+y+z)$ (By taking out the common factor)

Therefore, $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8\times3\times xyz\times(x+y+z)}{8\times xyz} = 3\times(x+y+z) = 3\,(x+y+z)$$

అందువలన, $(-20x^4) \div 10x^2 = \dfrac{-2\times 2\times 5\times x\times x\times x\times x}{2\times 5\times x\times x} = -2 \times x \times x = -2x^2$

(ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz = \dfrac{7\times x\times x\times y\times y\times z\times z}{2\times 7\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{x\times y\times z}{2} = \dfrac{1}{2}xyz$

ప్రయత్నించండి

(i) $24xy^2z^3$ ను $6yz^2$ తో భాగించండి. (ii) $63a^2b^4c^6$ ను $7a^2b^2c^3$ తో భాగించండి.

14.3.2 ఒక బహుపదిని ఒక ఏకపదితో భాగించుట

త్రిపది $4y^3 + 5y^2 + 6y$ ను ఏకపది $2y$ తో భాగించడం పరిశీలిద్దాం.

$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2 \times 2 \times y \times y \times y) + (5 \times y \times y) + (2 \times 3 \times y)$

(ఇక్కడ మనం బహుపదిలో ప్రతి పదాన్ని కారణాంక రూపంలో వ్యక్త పరిచాం) ప్రతి పదంలో $2 \times y$ ఉమ్మడి కారణాంకంగా ఉండడం కనుగొంటాం. అందువలన ప్రతి పదం నుండి $2 \times y$ ను వేరుచేసిన

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2 \times y \times (2 \times y \times y) + 2 \times y \times \left(\frac{5}{2} \times y\right) + 2 \times y \times 3$$

$$= 2y\,(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}y\right) + 2y\,(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (ఉమ్మడి కారణాంకం $2y$ను విడిగా చూపించడమైనది).

అందువలన, $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3+5y^2+6y}{2y} = \frac{2y(2y^2+\frac{5}{2}y+3)}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

ప్రత్యామ్నాయంగా, త్రిపదిలో ప్రతి పదాన్ని ఏకపదితో కొట్టివేయు పద్ధతిలో భాగించవచ్చు.

ఇక్కడ మనం బహుపది యొక్క లవంలోని ప్రతి పదాన్ని హారంలోని ఏకపది తో భాగిస్తాం.

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

ఉదాహరణ 14: $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ ను $8xyz$ తో రెండు పద్ధతులు ఉపయోగించి భాగించండి.

సాధన: $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$ (ఉమ్మడి కారణాంకాన్ని వేరుచేసిన)

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z \times (x + y + z) = 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$

అందువలన, $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)}{8 \times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3\,(x + y + z)$$

Alternately, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \dfrac{24x^2yz}{8xyz} + \dfrac{24xy^2z}{8xyz} + \dfrac{24xyz^2}{8xyz}$

$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$

14.4 Division of Algebraic Expressions Continued (Polynomial ÷ Polynomial)

- Consider $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$

We shall factorise $(7x^2 + 14x)$ first to check and match factors with the denominator:

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$
$$= 7 \times x \times (x + 2) = 7x(x + 2)$$

Will it help here to divide each term of the numerator by the binomial in the denominator?

Now $(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \dfrac{7x^2 + 14x}{x + 2}$

$= \dfrac{7x(x+2)}{x+2} = 7x$ (Cancelling the factor $(x + 2)$)

Example 15: Divide $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ by $11x\,(x - 8)$

Solution: Factorising $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$, we get

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$

(taking the common factor x^2 out of the bracket)

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,[x\,(x - 8) + 3(x - 8)]$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,(x + 3)\,(x - 8)$$

Therefore, $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x+3) \times (x-8)}{11 \times x \times (x-8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x\,(x + 3) = 4x(x + 3)$$

We cancel the factors 11, x and $(x - 8)$ common to both the numerator and denominator.

Example 16: Divide $z(5z^2 - 80)$ by $5z(z + 4)$

Solution: Dividend $= z(5z^2 - 80)$

$$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$$
$$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$$
$$= 5z \times (z + 4)\,(z - 4)$$

[using the identity $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$]

Thus, $z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \dfrac{5z(z-4)\,(z+4)}{5z(z+4)} = (z - 4)$

ప్రత్యామ్నాయంగా, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \dfrac{24x^2yz}{8xyz} + \dfrac{24xy^2z}{8xyz} + \dfrac{24xyz^2}{8xyz}$

$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$

14.4 బీజీయ సమాసాల భాగహారం కొనసాగింపు (బహుపది÷బహుపది)

- $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$ ను పరిశీలించండి.

కారణాంకాలను హారంతో సరిచూసి జత చేయడానికి వీలుగా ముందుగా $(7x^2 + 14x)$ ను కారణాంక విభజన చేద్దాం;

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$
$$= 7 \times x \times (x + 2) = 7x(x + 2)$$

ఇక్కడ లవంలో ప్రతి పదాన్ని హారంలో ద్విపదితో భాగించడం సహాయపడునా?

ఇప్పుడు $(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \dfrac{7x^2 + 14x}{x + 2}$

$= \dfrac{7x(x + 2)}{x + 2} = 7x$ ($(x + 2)$ కారణాంకాన్ని కొట్టివేయగా)

ఉదాహరణ15: $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ ను $11x(x - 8)$ చే భాగించండి.

సాధన: $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ను కారణాంక విభజన చేసిన

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$

(ఉమ్మడి కారణాంకం x^2 ను బ్రాకెట్ బయట రాసిన)

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2 [x (x - 8) + 3(x - 8)]$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2 (x + 3) (x - 8)$$

అందువలన, $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x + 3) \times (x - 8)}{11 \times x \times (x - 8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x\,(x + 3) = 4x(x + 3)$$

మనం లవ హారాల ఉమ్మడి కారణాంకాలైన 11, x మరియు $(x - 8)$ లను కొట్టివేస్తాం

ఉదాహరణ 16: $z(5z^2 - 80)$ ను $5z(z + 4)$ చే భాగించండి.

సాధన: విభాజ్యము $= z(5z^2 - 80)$

$$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$$
$$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$$
$$= 5z \times (z + 4)\,(z - 4)$$

$[a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ సర్వసమీకరణం ఉపయోగించి$]$

కావున, $z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \dfrac{5z(z - 4)(z + 4)}{5z(z + 4)} = (z - 4)$

EXERCISE 14.3

1. Carry out the following divisions.

(i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$

(iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

2. Divide the given polynomial by the given monomial.

(i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$

(iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$

(v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$

3. Work out the following divisions.

(i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$

(iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$

(v) $96abc(3a - 12)(5b - 30) \div 144(a - 4)(b - 6)$

4. Divide as directed.

(i) $5(2x + 1)(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)(y - 4) \div 13x(y - 4)$

(iii) $52pqr(p + q)(q + r)(r + p) \div 104pq(q + r)(r + p)$

(iv) $20(y + 4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \div x(x + 1)$

5. Factorise the expressions and divide them as directed.

(i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$

(iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$

(v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$

(vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

14.5 Can you Find the Error?

Task 1 While solving an equation, Sarita does the following.

$$3x + x + 5x = 72$$

Therefore $8x = 72$

and so, $x = \dfrac{72}{8} = 9$

Where has she gone wrong? Find the correct answer.

Coefficient 1 of a term is usually not shown. But while adding like terms, we include it in the sum.

Task 2 Appu did the following:

For $x = -3$, $5x = 5 - 3 = 2$

Is his procedure correct? If not, correct it.

Remember to make use of brackets, while substituting a negative value.

Task 3 Namrata and Salma have done the multiplication of algebraic expressions in the following manner.

	Namrata	Salma
(a)	$3(x - 4) = 3x - 4$	$3(x - 4) = 3x - 12$

Remember, when you multiply the expression enclosed in a bracket by a constant (or a variable) outside, each term of the expression has to be multiplied by the constant (or the variable).

అభ్యాసం 14.3

1. ఈ క్రింది భాగహారములను చేయండి.
   (i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$
   (iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$
2. క్రింద ఇచ్చిన బహుపదులను ఇచ్చిన ఏకపదితో భాగించండి.
   (i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$
   (iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$
   (v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$
3. ఈ క్రింది భాగహారములను చేయండి.
   (i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$
   (iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$
   (v) $96abc(3a - 12)(5b - 30) \div 144(a - 4)(b - 6)$
4. సూచించిన విధముగా భాగహారము చేయండి.
   (i) $5(2x + 1)(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)(y - 4) \div 13x(y - 4)$
   (iii) $52pqr(p + q)(q + r)(r + p) \div 104pq(q + r)(r + p)$
   (iv) $20(y + 4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \div x(x + 1)$
5. బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేసి సూచించినట్లుగా భాగాహారం చేయండి.
   (i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$
   (iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$
   (v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$
   (vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

14.5 మీరు దోషమును కనుగొనగలరా?

సందర్భం 1 ఒక సమీకరణ సాధనలో సరిత ఈవిధంగా చేసింది.

$$3x + x + 5x = 72$$

అందువలన $8x = 72$

కావున, $x = \frac{72}{8} = 9$

ఆమె ఎక్కడ తప్పు చేసింది? సరియైన జవాబు కనుగొనండి.

ఒక పదం యొక్క గుణకం 1 అయిన సాధారణంగా దానిని చూపించం. కాని సజాతి పదాలను సంకలనం చేసినపుడు 1ని చేర్చుతాము.

సందర్భం 2 అప్పు ఈవిధంగా చేశాడు.

$x = -3$, అయిన $5x = 5 - 3 = 2$

అతని పద్ధతి సరియైనదేనా? కానిచో సరిచేయండి.

చరరాశి బదులు ఋణాత్మక విలువలను ప్రతిక్షేపించినపుడు బ్రాకెట్లను ఉపయోగించడం గుర్తు చేసుకోండి.

సందర్భం 3 నమ్రత మరియు సల్మా బీజీయ సమాసాల గుణకారాన్ని ఈక్రింది విధంగా చేశారు.

నమ్రత	సల్మా
(a) $3(x - 4) = 3x - 4$	$3(x - 4) = 3x - 12$

బ్రాకెట్లలలో రాసిన ఒక సమాసాన్ని బ్రాకెట్ బయట ఉన్న ఒక స్థిర(చర) రాశితో గుణించినపుడు సమాసంలో ప్రతి పదాన్ని స్థిర (లేదా చర) రాశితో గుణించాలని గుర్తుంచుకోండి.

(b) $(2x)^2 = 2x^2$ $(2x)^2 = 4x^2$

Remember, when you square a monomial, the numerical coefficient and each factor has to be squared.

(c) $(2a - 3)(a + 2)$ $= 2a^2 - 6$ $(2a - 3)(a + 2)$ $= 2a^2 + a - 6$

Make sure, before applying any formula, whether the formula is really applicable.

(d) $(x + 8)^2 = x^2 + 64$ $(x + 8)^2$ $= x^2 + 16x + 64$

(e) $(x - 5)^2 = x^2 - 25$ $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

Is the multiplication done by both Namrata and Salma correct? Give reasons for your answer.

Task 4 Joseph does a division as : $\dfrac{a+5}{5} = a + 1$

His friend Sirish has done the same division as: $\dfrac{a+5}{5} = a$

And his other friend Suman does it this way: $\dfrac{a+5}{5} = \dfrac{a}{5} + 1$

Who has done the division correctly? Who has done incorrectly? Why?

While dividing a polynomial by a monomial, we divide each term of the polynomial in the numerator by the monomial in the denominator.

Some fun!

Atul always thinks differently. He asks Sumathi teacher, "If what you say is true, then why do I get the right answer for $\dfrac{64}{16} = \dfrac{4}{1} = 4$?" The teacher explains, " This is so because 64 happens to be 16×4; $\dfrac{64}{16} = \dfrac{16 \times 4}{16 \times 1} = \dfrac{4}{1}$. In reality, we cancel a factor of 16 and not 6, as you can see. In fact, 6 is not a factor of either 64 or of 16." The teacher adds further, "Also, $\dfrac{664}{166} = \dfrac{4}{1}$, $\dfrac{6664}{1666} = \dfrac{4}{1}$, and so on". Isn't that interesting? Can you help Atul to find some other examples like $\dfrac{64}{16}$?

EXERCISE 14.4

Find and correct the errors in the following mathematical statements.

1. $4(x - 5) = 4x - 5$
2. $x(3x + 2) = 3x^2 + 2$
3. $2x + 3y = 5xy$
4. $x + 2x + 3x = 5x$
5. $5y + 2y + y - 7y = 0$
6. $3x + 2x = 5x^2$
7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 2x^2 + 8x + 7$
8. $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$
9. $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 6x + 4$

(b) $(2x)^2 = 2x^2$ $\quad$ $(2x)^2 = 4x^2$

ఒక ఏకపదిని వర్గం చేయునపుడు సంఖ్యా గుణకాన్ని మరియు ప్రతి కారణాంకాన్ని వర్గం చేయాలని గుర్తించుకోండి.

(c) $(2a - 3)(a + 2) = 2a^2 - 6$ $\quad$ $(2a - 3)(a + 2) = 2a^2 + a - 6$

(d) $(x + 8)^2 = x^2 + 64$ $\quad$ $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$

(e) $(x - 5)^2 = x^2 - 25$ $\quad$ $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

ఏదైనా సూత్రం అన్వయించేటప్పుడు మొదట ఆ సూత్రం ఆ సందర్భానికి నిజంగా అన్వయించబడుతుందని నిర్ధారించుకోండి.

నమ్రత మరియు సల్మాలు ఇద్దరూ చేసిన గుణకారం సరియైనదేనా? మీ జవాబుకు కారణాలు చెప్పండి

సందర్భం 4 జోసెఫ్ ఒక భాగహారాన్ని ఈవిధంగా చేశాడు. : $\dfrac{a+5}{5} = a + 1$

ఒక బహుపదిని ఒక ఏకపదితో భాగించినపుడు లవంలో ఉన్న బహుపదిలోని ప్రతి పదాన్ని హారంలో ఉన్న ఏకపదితో భాగించాలి.

అతని స్నేహితుడు శిరీష్ ఇదే భాగహారాన్ని ప్రక్క విధంగా చేశాడు: $\dfrac{a+5}{5} = a$

అతని మరో స్నేహితుడు సుమన్ ఈవిధంగా చేశాడు.: $\dfrac{a+5}{5} = \dfrac{a}{5} + 1$

భాగహారాన్ని వీరిలో ఎవరు సరిగ్గా చేశారు? ఎవరు తప్పుగా చేశారు? ఎందుకు?

సరదా గణితం

అతుల్ ఎల్లప్పుడు విభిన్నంగా ఆలోచిస్తాడు. "మీరు ఏం చెప్పారో అది నిజమైతే $\dfrac{64}{16} = \dfrac{4}{1} = 4$? ఇందులో నేను సరియైన జవాబును ఎలా పొందాను?" అని సుమతి టీచర్‌ను అడిగాడు. ఆమె ఇలా వివరించారు, "ఇది ఎందుకంటే $64 = 16 \times 4$; $\dfrac{64}{16} = \dfrac{16 \times 4}{16 \times 1} = \dfrac{4}{1}$. ఇక్కడ 16 అనే కారణాంకాన్ని కొట్టివేశాం. కాని 6ని కాదు. నిజానికి 6 అనేది 64 లేదా 16 యొక్క కారణాంకం కాదు". టీచర్ "కొనసాగిస్తూ $\dfrac{664}{166} = \dfrac{4}{1}, \dfrac{6664}{1666} = \dfrac{4}{1}$ మొదలైనవి కూడా సత్యం" అవుతాయని అన్నారు. ఇది ఆసక్తిగా ఉంది కదూ? $\dfrac{64}{16}$ వంటి మరికొన్ని ఉదాహరణలు కనుగొనడానికి అతుల్‌కి నీవు సహాయం చేయగలవా?

అభ్యాసం 14.4

క్రింది గణిత ప్రవచనాలలో దోషాలను కనుగొని సరిచేయండి.

1. $4(x - 5) = 4x - 5$ $\quad$ **2.** $x(3x + 2) = 3x^2 + 2$ $\quad$ **3.** $2x + 3y = 5xy$

4. $x + 2x + 3x = 5x$ $\quad$ **5.** $5y + 2y + y - 7y = 0$ $\quad$ **6.** $3x + 2x = 5x^2$

7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 2x^2 + 8x + 7$ $\quad$ **8.** $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

9. $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 6x + 4$

10. Substituting $x = -3$ in

(*a*) $x^2 + 5x + 4$ gives $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 + 2 + 4 = 15$

(*b*) $x^2 - 5x + 4$ gives $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$

(*c*) $x^2 + 5x$ gives $(-3)^2 + 5(-3) = -9 - 15 = -24$

11. $(y-3)^2 = y^2 - 9$ **12.** $(z+5)^2 = z^2 + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 - 3b^2$ **14.** $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2} = 0$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2} = 1 + 1 = 2$ **18.** $\frac{3x}{3x+2} = \frac{1}{2}$ **19.** $\frac{3}{4x+3} = \frac{1}{4x}$

20. $\frac{4x+5}{4x} = 5$ **21.** $\frac{7x+5}{5} = 7x$

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. When we factorise an expression, we write it as a product of factors. These factors may be numbers, algebraic variables or algebraic expressions.
2. An irreducible factor is a factor which cannot be expressed further as a product of factors.
3. A systematic way of factorising an expression is the common factor method. It consists of three steps: (i) Write each term of the expression as a product of irreducible factors (ii) Look for and separate the common factors and (iii) Combine the remaining factors in each term in accordance with the distributive law.
4. Sometimes, all the terms in a given expression do not have a common factor; but the terms can be grouped in such a way that all the terms in each group have a common factor. When we do this, there emerges a common factor across all the groups leading to the required factorisation of the expression. This is the method of regrouping.
5. In factorisation by regrouping, we should remember that any regrouping (i.e., rearrangement) of the terms in the given expression may not lead to factorisation. We must observe the expression and come out with the desired regrouping by trial and error.
6. A number of expressions to be factorised are of the form or can be put into the form : $a^2 + 2\,ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ and $x^2 + (a + b) + ab$. These expressions can be easily factorised using Identities I, II, III and IV, given in Chapter 9,
$$a^2 + 2\,ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)(x + b)$$
7. In expressions which have factors of the type $(x + a)(x + b)$, remember the numerical term gives ab. Its factors, a and b, should be so chosen that their sum, with signs taken care of, is the coefficient of x.
8. We know that in the case of numbers, division is the inverse of multiplication. This idea is applicable also to the division of algebraic expressions.

10. క్రింది వాటిలో $x = -3$ ప్రతిక్షేపించగా

(a) $x^2 + 5x + 4$ నుండి $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 + 2 + 4 = 15$ వస్తుంది.

(b) $x^2 - 5x + 4$ నుండి $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$ వస్తుంది.

(c) $x^2 + 5x$ నుండి $(-3)^2 + 5(-3) = -9 - 15 = -24$ వస్తుంది.

11. $(y - 3)^2 = y^2 - 9$ **12.** $(z + 5)^2 = z^2 + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 - 3b^2$ **14.** $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2} = 0$

17. $\frac{3x^2 + 1}{3x^2} = 1 + 1 = 2$ **18.** $\frac{3x}{3x + 2} = \frac{1}{2}$ **19.** $\frac{3}{4x + 3} = \frac{1}{4x}$

20. $\frac{4x + 5}{4x} = 5$ **21.** $\frac{7x + 5}{5} = 7x$

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. మనం ఒక బీజీయ సమాసంను కారణాంక విభజన చేయుటకు ఆ బీజీయ సమాసాన్ని కారణాంకాల లబ్ధంగా రాస్తాం. ఈ కారణాంకాలు సంఖ్యలు లేదా చరరాశులు లేదా బీజీయ సమాసాలు కావచ్చు.
2. ఒక అవిభాజ్య కారణాంకం అనగా ఆ కారణాంకాన్ని తిరిగి కారణాంకాల లబ్ధంగా విభజించలేనిది.
3. ఒక బీజీయ సమాసాన్ని కారణాంక విభజన చేయడానికి క్రమబద్ధమైన పద్ధతి సామాన్య కారణాంక పద్ధతి. ఇందులో మూడు సోపానాలు ఉంటాయి. (i) బీజీయ సమాసంలోని ప్రతి పదాన్ని అవిభాజ్య కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయాలి. (ii) ఉమ్మడి కారణాంకాలను చూసి వాటిని వేరు చేసి రాయాలి. (iii) ప్రతి పదంలో మిగిలిన కారణాంకాలను విభాగ న్యాయాన్ని అనుసరించి కలిపి రాయాలి.
4. కొన్ని సమయాల్లో ఇచ్చిన బీజీయ సమాసంలో అన్ని పదాలకు ఉమ్మడి కారణాంకం ఉండదు. కానీ ప్రతి గ్రూపులో ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉండునట్లు బీజీయ సమాసంలోని పదాలను గ్రూపులుగా విభజించవచ్చు. ఇలా చేయడం వలన ఇచ్చిన సమాసాన్ని కారణాంక విభజన చేయుటకు అన్ని గ్రూపులలో ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉండును. దీనిని గ్రూపులుగా విభజించు పద్ధతి అంటారు.
5. గ్రూపులుగా విభజించు పద్ధతిలో పదాలను గ్రూపులుగా విభజించు అన్ని విధానాలు కారణాంక విభజనకు దారి తీయకపోవడాన్ని మనం గుర్తించుకోవాలి. మనం బీజీయ సమాసాన్ని పరిశీలించి యత్న దోష పద్ధతిలో సరైన విధంగా గ్రూపులుగా విభజించడాన్ని గమనించాలి.
6. కారణాంక విభజన చేయవలసిన అనేక బీజీయ సమాసాలు క్రింది రూపంలో లేదా ఆయా రూపాల్లో రాయగలిగేటట్లుంటాయి. అవి $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ మరియు $x^2 + (a + b)x + ab$. ఈ బీజీయ సమాసాలను 9వ అధ్యాయంలో ఉన్న సర్వ సమీకరణములు I, II, III మరియు IV లను ఉపయోగించి సులభంగా కారణాంక విభజన చేయవచ్చు.
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$
7. $(x + a)(x + b)$ కారణాంకాలుగా ఉన్న సమాసాలలో సంఖ్యాపదం ab కి సమానం అవుతుందని గుర్తించుకోండి. ab యొక్క కారణాంకాలు a, b ల గుర్తుల ఆధారంగా వాటి మొత్తము x యొక్క గుణకమును సూచిస్తుంది.
8. సంఖ్యలలో భాగహారం గుణకారానికి విలోమ ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసు. ఈ భావన బీజీయ సమాసముల భాగహారానికి కూడా అన్వయించవచ్చు.

9. In the case of division of a polynomial by a monomial, we may carry out the division either by dividing each term of the polynomial by the monomial or by the common factor method.
10. In the case of division of a polynomial by a polynomial, we cannot proceed by dividing each term in the dividend polynomial by the divisor polynomial. Instead, we factorise both the polynomials and cancel their common factors.
11. In the case of divisions of algebraic expressions that we studied in this chapter, we have
    Dividend = Divisor × Quotient.
    In general, however, the relation is
    Dividend = Divisor × Quotient + Remainder
    Thus, we have considered in the present chapter only those divisions in which the remainder is zero.
12. There are many errors students commonly make when solving algebra exercises. You should avoid making such errors.

9. ఒక బహుపదిని మరొక ఏకపదితో భాగాహారం చేసే సందర్భంలో బహుపదిలో ప్రతి పదాన్ని ఏకపదితో భాగించవచ్చు లేదా సామాన్య కారణాంక పద్ధతిలో భాగించవచ్చు.

10. ఒక బహుపదిని మరొక బహుపదితో భాగహారం చేసే సందర్భంలో విభాజ్య బహుపదిలో ప్రతి పదాన్ని విభాజక బహుపదిలో ప్రతి పదంతో భాగించుకుంటూ వెళ్ళలేము. బదులుగా రెండు బహుపదులను కారణాంక విభజన చేసి ఉమ్మడి కారణాంకాలను కొట్టివేస్తాం.

11. ఈ అధ్యాయంలో మనం అధ్యయనం చేసిన బీజీయ సమాసాల భాగహారంలో
విభాజ్యం = విభాజకం × భాగఫలం
సాధారణంగా ఈ సంబంధాన్ని ఈవిధంగా రాస్తాం.
విభాజ్యం = (విభాజకం × భాగఫలం) + శేషం
ఈ అధ్యాయంలో శేషం సున్న వచ్చు బీజీయ సమాసాల భాగహారాలను మాత్రమే పరిగణలోనికి తీసుకున్నాం.

12. బీజీయ సమాసాల అభ్యాసముల సాధనలో విద్యార్థులు సాధారణంగా కొన్ని పొరపాట్లు చేస్తారు. మీరు అటువంటి పొరపాట్లు చేయడం మానుకోవాలి.

CHAPTER 15

Introduction to Graphs

0852CH15

15.1 Introduction

Have you seen graphs in the newspapers, television, magazines, books etc.? The purpose of the graph is to show numerical facts in visual form so that they can be understood quickly, easily and clearly. Thus graphs are visual representations of data collected. Data can also be presented in the form of a table; however a graphical presentation is easier to understand. This is true in particular when there is **a trend** or **comparison** to be shown. We have already seen some types of graphs. Let us quickly recall them here.

15.1.1 A Bar graph

A bar graph is used to show comparison among categories. It may consist of two or more parallel vertical (or horizontal) bars (rectangles).

The bar graph in Fig 15.1 shows Anu's mathematics marks in the three terminal examinations. It helps you to compare her performance easily. She has shown good progress.

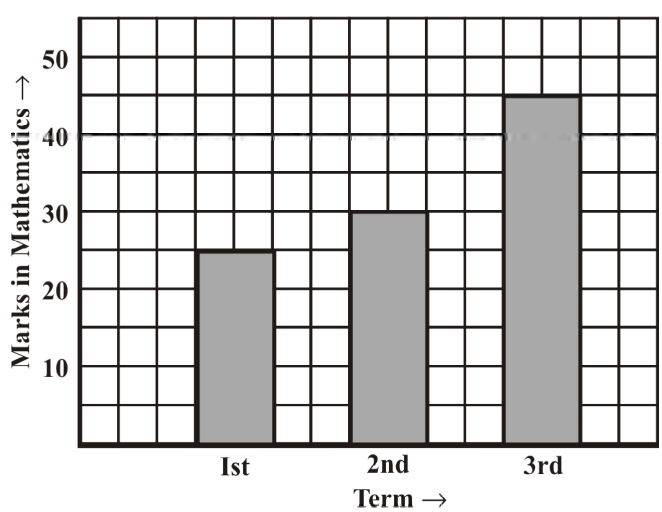


Fig 15.1

Bar graphs can also have double bars as in Fig 15.2. This graph gives a comparative account of sales (in `) of various fruits over a two-day period. How is Fig 15.2 different from Fig 15.1? Discuss with your friends.

అధ్యాయం

15

గ్రాఫ్‌ల పరిచయం

I3A8U6

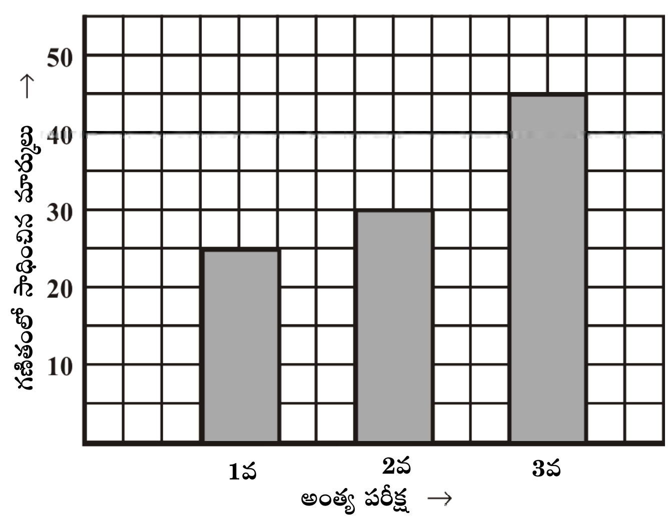
15.1 పరిచయం

వార్తా పత్రికలు, టెలివిజన్లు, వివిధ పత్రికలు, పుస్తకాలు మొదలైన వాటిలో గ్రాఫ్‌లను మీరు చూసారా? సంఖ్యాత్మక వాస్తవాలను సులభంగా, స్పష్టంగా మరియు త్వరితంగా అవగాహన కల్పించటం కోసం చిత్ర రూపంలో చూపించడమే గ్రాఫ్‌ల యొక్క ఉద్దేశ్యం. అందువలన సేకరించిన దత్తాంశములను చిత్రరూపంలో చూపించబడినవే గ్రాఫ్‌లు. సేకరించిన సమాచారమును పట్టిక రూపంలో ప్రదర్శించినప్పటికీ దానిని గ్రాఫ్ ద్వారా ప్రదర్శించటం వలన సులభంగా అర్ధం చేసుకోగలము. దత్తాంశాలలో **మార్పు**ను లేదా **పోలిక**ను చూపునపుడు ఇది వర్తిస్తుంది. మనం ఇది వరకే కొన్ని రకాల గ్రాఫ్‌లను చూశాం. ఇప్పుడు త్వరగా వాటిని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

15.1.1 కమ్మీ రేఖా చిత్రము (బార్‌గ్రాఫ్)

వివిధ విభాగాల మధ్యగల పోలికలు చూపించడానికి కమ్మీ రేఖాచిత్రము ఉపయోగిస్తారు. అందులో రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సమాంతర నిలువు (లేదా అడ్డు) కమ్మీలు (దీర్ఘచతురస్రాలు) ఉంటాయి.

కమ్మీ రేఖాచిత్రము 15.1లో గణితంలో మూడు అంత్య పరీక్షలలో అను అనే అమ్మాయికి వచ్చిన మార్కులు చూపబడినవి. ఇది ఆమె ప్రగతిని పోల్చడానికి ఉపయోగపడుతుంది. ఆమె మంచి ప్రగతిని కనబరిచింది.



పటం 15.1

కమ్మీ రేఖాచిత్రము 15.2 లో రెండు కమ్మీలు కల్గి ఉండుట చూడగలం. ఈ గ్రాఫ్ రెండు రోజుల వ్యవధిలో వివిధ రకాల పండ్ల అమ్మకాల (కి.గ్రా.లలో) యొక్క పోలికను చూపుతుంది. పటం15.1, పటం 15.2ల మధ్య ఏమైనా తేడాలు ఉన్నాయా? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

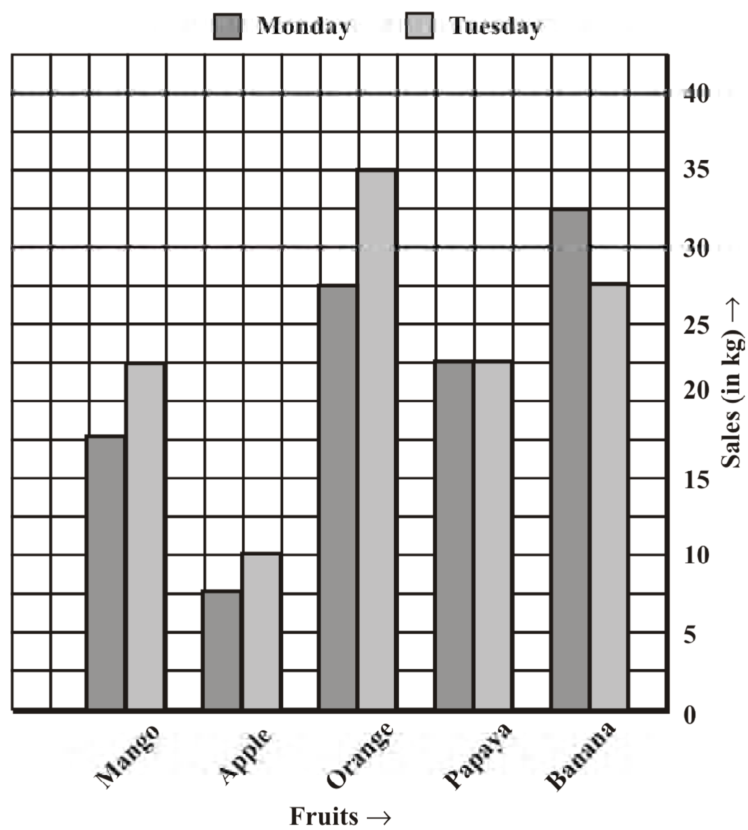


Fig 15.2

15.1.2 A Pie graph (or a circle-graph)

A pie-graph is used to compare parts of a whole. The circle represents the whole. Fig 15.3 is a pie-graph. It shows the percentage of viewers watching different types of TV channels.

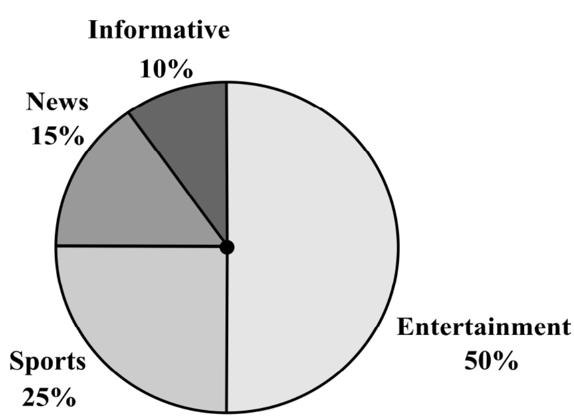
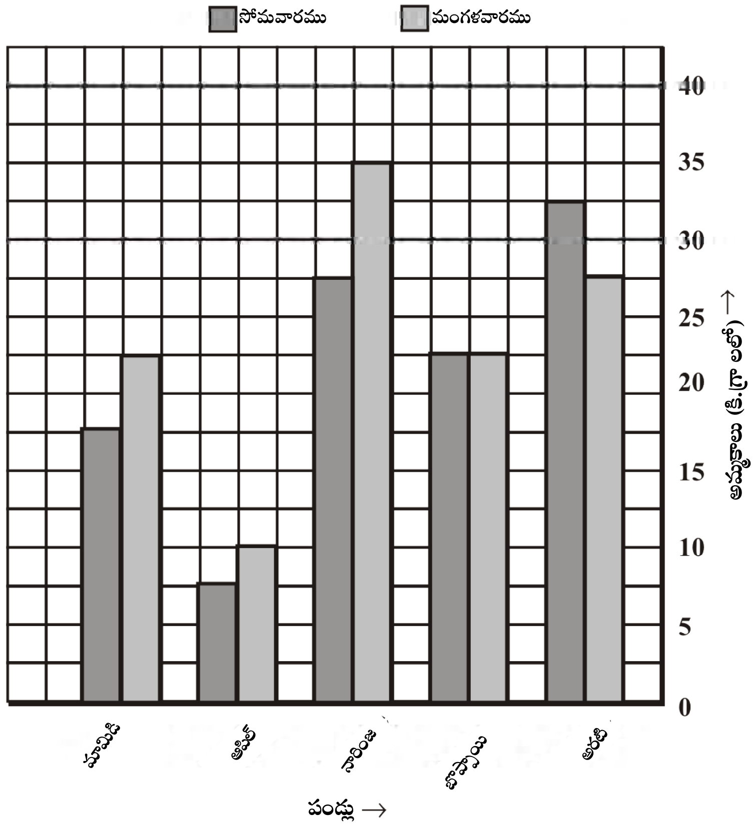
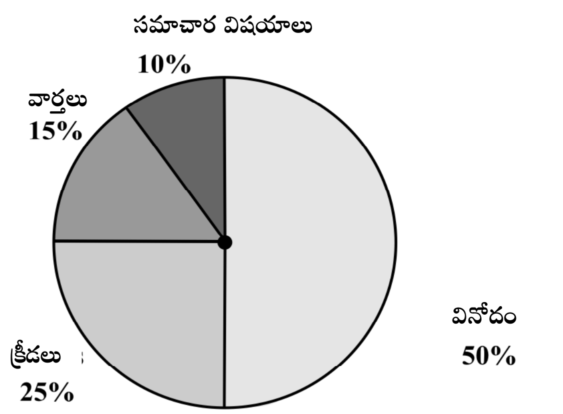


Fig 15.3

15.1.3 A histogram

A Histogram is a bar graph that shows data in intervals. It has adjacent bars over the intervals.





పటం 15.3

15.1.3 సోపాన చిత్రము

అంతరములలో దత్తాంశమును చూపే కమ్మీ రేఖా చిత్రమే సోపాన చిత్రము. సోపాన చిత్రము అంతరములలో ప్రక్కప్రక్కనే ఒకే వెడల్పు కలిగిన కమ్మీలు కలిగి ఉంటుంది.

The histogram in Fig 15.4 illustrates the distribution of weights (in kg) of 40 persons of a locality.

Weights (kg)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
No. of persons	4	12	13	6	5

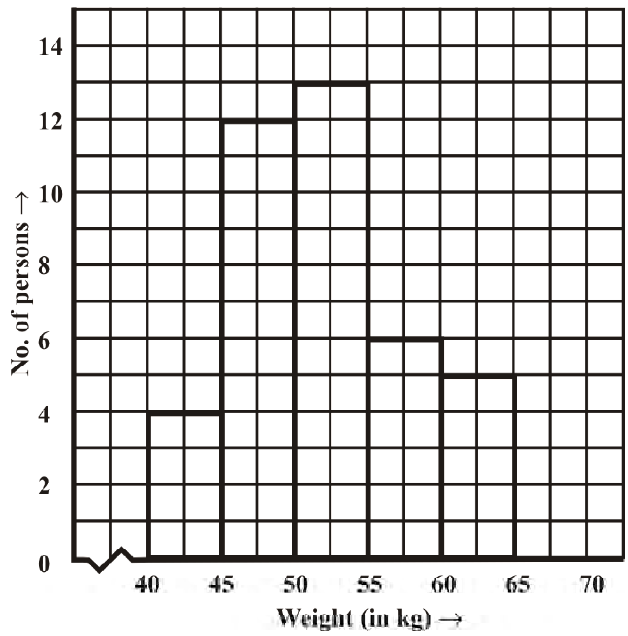
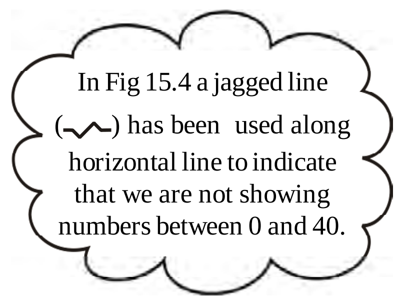


Fig 15.4



There are no gaps between bars, because there are no gaps between the intervals. What is the information that you gather from this histogram? Try to list them out.

15.1.4 A line graph

A **line graph** displays data that changes continuously over periods of time.

When Renu fell sick, her doctor maintained a record of her body temperature, taken every four hours. It was in the form of a graph (shown in Fig 15.5 and Fig 15.6).

We may call this a "time-temperature graph".

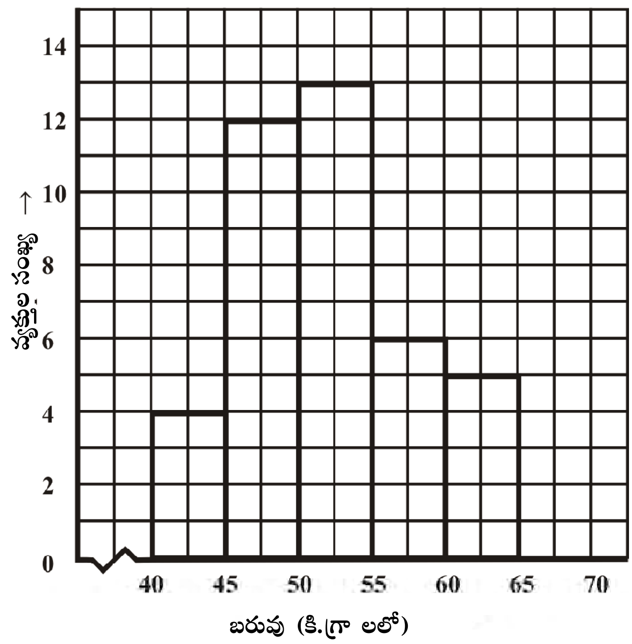
It is a pictorial representation of the following data, given in tabular form.

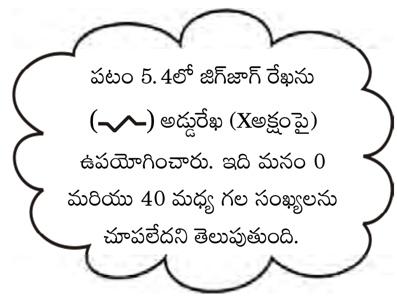
Time	6 a.m.	10 a.m.	2 p.m.	6 p.m.
Temperature(°C)	37	40	38	35

The horizontal line (usually called the *x*-axis) shows the timings at which the temperatures were recorded. What are labelled on the vertical line (usually called the *y*-axis)?

పటం15.4లో సోపాన చిత్రము ఒక ప్రాంతంలో 40 మంది వ్యక్తుల బరువులు (కి.గ్రా.లలో) విభాజనం గురించి తెలియజేస్తుంది.

బరువులు (కి.గ్రా)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
వ్యక్తుల సంఖ్య	4	12	13	6	5





పటం 15.4

అంతరాల మధ్య ఖాళీలు లేనందున కమ్మీల మధ్య ఏ ఖాళీలు లేవు. ఈ సోపాన రేఖా చిత్రం నుండి ఏ సమాచారమును మీరు సేకరిస్తారు? వాటిని పేర్కొని జాబితా తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించండి.

15.1.4 రేఖా చిత్రము (లైన్ గ్రాఫ్)

వివిధ కాల వ్యవధులలో నిరంతరం మార్పు చెందే దత్తాంశాలను ఈ **రేఖా చిత్రం** చూపుతుంది.

రేణు అనారోగ్యంతో ఉన్నప్పుడు వైద్యులు ఆమె శరీర ఉష్ణోగ్రత వివరాలను ప్రతి 4 గంటలకు ఒకసారి పరీక్షించి నమోదు చేసారు. అది గ్రాఫ్ రూపంలో చూపబడింది (పటం 15.5 మరియు 15.6లో). దీనిని మనం "కాలం-ఉష్ణోగ్రతల గ్రాఫ్" అని అనవచ్చును.

ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన సమాచారము, చిత్ర రూపంలో సూచించడం జరిగింది.

సమయం(కాలం)	6 a.m.	10 a.m.	2 p.m.	6 p.m.
ఉష్ణోగ్రత (°C)	37	40	38	35

క్షితిజ సమాంతర రేఖ (సాధారణంగా x-అక్షం అంటాం) మీద శరీర ఉష్ణోగ్రతలు నమోదు చేయబడిన సమయం సూచించబడింది. నిలువు రేఖ (సాధారణంగా y -అక్షం అంటాం) మీద సూచించబడిన విలువలు ఏమిటి?

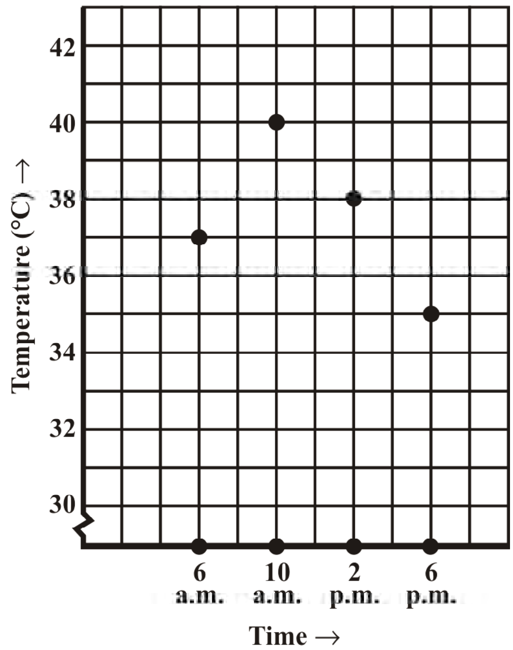


Fig 15.5

Each piece of data is shown by a point on the square grid.

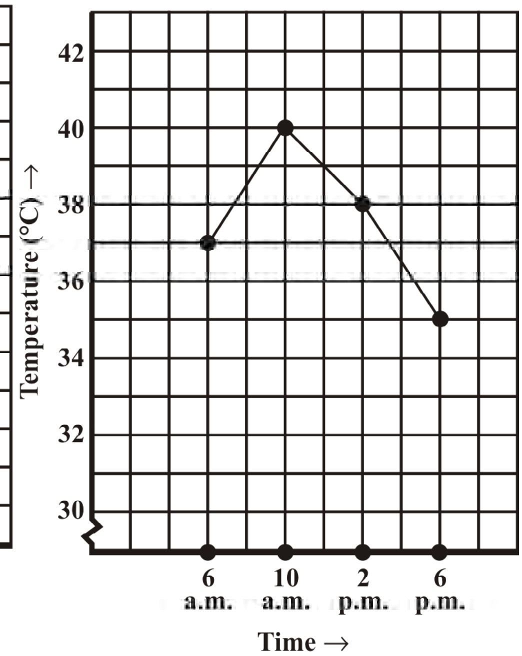


Fig 15.6

The points are then connected by line segments. The result is the **line graph**.

What all does this graph tell you? For example you can see the pattern of temperature; more at 10 a.m. (see Fig 15.5) and then decreasing till 6 p.m. Notice that the temperature increased by 3° C(= 40° C – 37° C) during the period 6 a.m. to 10 a.m.

There was no recording of temperature at 8 a.m., however the graph *suggests* that it was more than 37 °C (How?).

Example 1: **(A graph on "performance")**

The given graph (Fig 15.7) represents the total runs scored by two batsmen A and B, during each of the ten different matches in the year 2007. Study the graph and answer the following questions.

(i) What information is given on the two axes?

(ii) Which line shows the runs scored by batsman A?

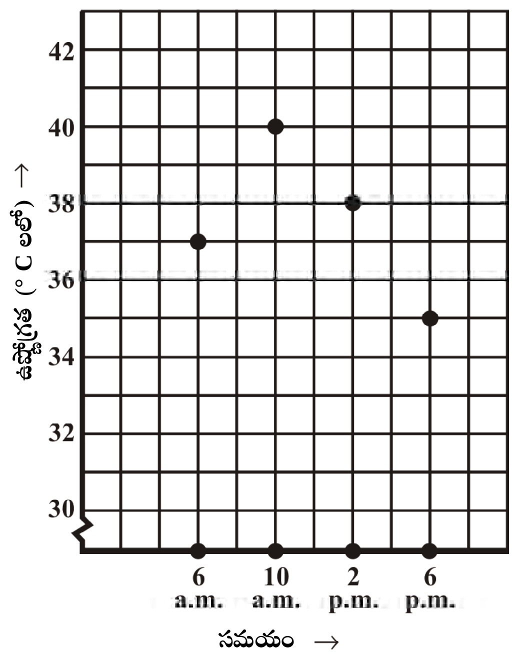
(iii) Were the run scored by them same in any match in 2007? If so, in which match?

(iii) Among the two batsmen, who is steadier? How do you judge it?

Solution:

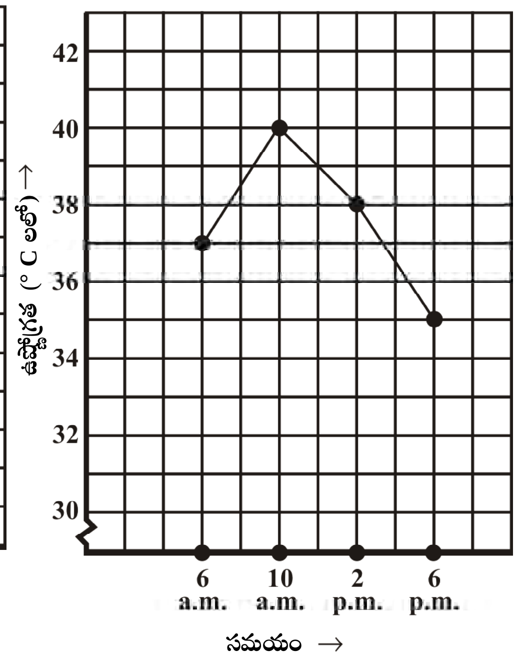
(i) The horizontal axis (or the x-axis) indicates the matches played during the year 2007. The vertical axis (or the y-axis) shows the total runs scored in each match.

(ii) The dotted line shows the runs scored by Batsman A. (This is already indicated at the top of the graph).



పటం 15.5

ప్రతీ దత్తాంశము గళ్ళ కాగితం మీద బిందువుల ద్వారా చూపబడింది.



పటం 15.6

బిందువులు రేఖాఖండములచే కలపబడినది. ఆ ఫలితమే **రేఖాచిత్రం**

ఈ గ్రాఫ్ ఏయే విషయాలు మీకు తెలుపుతుంది? ఉదాహరణకు శరీర ఉష్ణోగ్రతలో మార్పులు చూడగలం. ఉదయం 10గం||కు ఉష్ణోగ్రత అధికంగా ఉంది. (పటం 15.5 చూడుము) మరియు సాయంత్రం 6గం||కు తగ్గుతూ వచ్చింది. ఉదయం 6గం|| నుండి 10గం||ల వరకు ఉష్ణోగ్రతలో 3° C పెరుగుదలను (= 40° C – 37° C) గమనించగలం.

ఉదయం 8 గం||కు ఉష్ణోగ్రత వివరాలు నమోదు చేయకపోయినను గ్రాఫ్ ద్వారా ఆ సమయంలో 37^0 కంటే ఎక్కువగా ఉన్నట్లు చూపబడింది (ఎలా?).

ఉదాహరణ 1: ("ప్రగతి" ని సూచించే గ్రాఫ్)

ఇవ్వబడిన (పటం 15.7) గ్రాఫ్ 2007 సం||లో 10 వేర్వేరు మ్యాచ్‌లలో A మరియు B అనే బ్యాట్స్‌మెన్‌లు చేసిన పరుగుల వివరములు తెలుపుతుంది. గ్రాఫ్‌ను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.

(i) రెండు అక్షముల మీద సూచించబడిన సమాచారము ఏమిటి?

(ii) బ్యాట్స్‌మన్ A చేసిన పరుగులు సూచించు రేఖ ఏది?

(iii) 2007లో జరిగిన ఏ మ్యాచ్‌లోనైన వారు సమాన పరుగులు చేశారా? అయితే ఏ మ్యాచ్‌లో?

(iii) బ్యాట్స్‌మన్‌లు ఇద్దరిలో స్థిరంగా ఉన్నది ఎవరు? నీవు ఎలా నిర్ణయిస్తావు?

సాధన:

(i) క్షితిజ సమాంతర రేఖ (లేదా x-అక్షం) 2007లో ఆడిన మ్యాచ్‌లు సూచిస్తుంది. లంబరేఖ (లేదా y-అక్షం) ప్రతి మ్యాచ్‌లో వారు చేసిన పరుగులను చూపుతుంది.

(ii) బ్యాట్స్‌మన్ A యొక్క పరుగులు చుక్కల రేఖ ద్వారా చూపించబడింది. (ఇది గ్రాఫ్ పై భాగంలో సూచించబడింది).

(iii) During the 4th match, both have scored the same number of 60 runs. (This is indicated by the point at which both graphs meet).

(iv) Batsman A has one great "peak" but many deep "valleys". He does not appear to be consistent. B, on the other hand has never scored below a total of 40 runs, even though his highest score is only 100 in comparison to 115 of A. Also A has scored a zero in two matches and in a total of 5 matches he has scored less than 40 runs. Since A has a lot of ups and downs, B is a more consistent and reliable batsman.

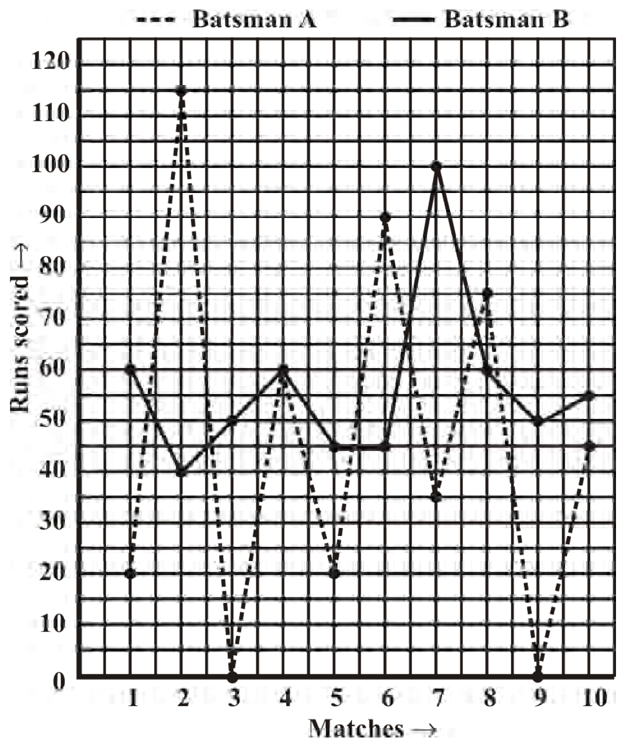


Fig 15.7

Example 2: The given graph (Fig 15.8) describes the distances of a car from a city P at different times when it is travelling from City P to City Q, which are 350 km apart. Study the graph and answer the following:

(i) What information is given on the two axes?

(ii) From where and when did the car begin its journey?

(iii) How far did the car go in the first hour?

(iv) How far did the car go during (i) the 2nd hour? (ii) the 3rd hour?

(v) Was the speed same during the first three hours? How do you know it?

(vi) Did the car stop for some duration at any place? Justify your answer.

(vii) When did the car reach City Q?

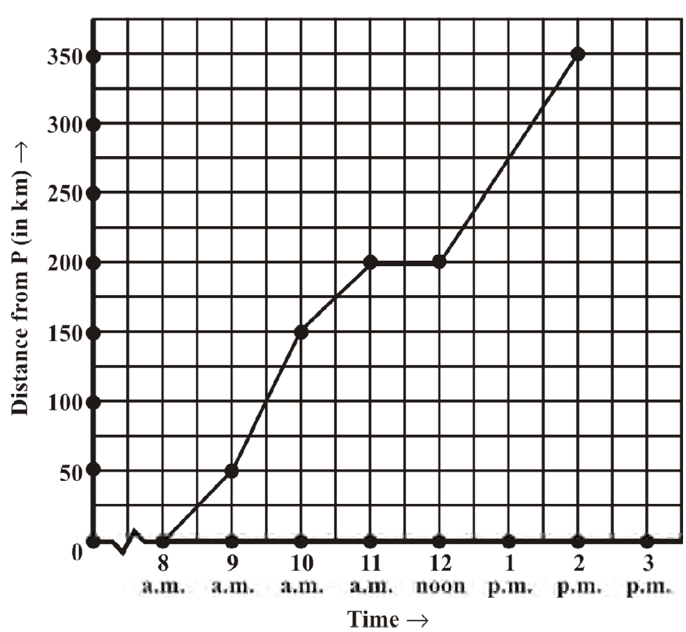
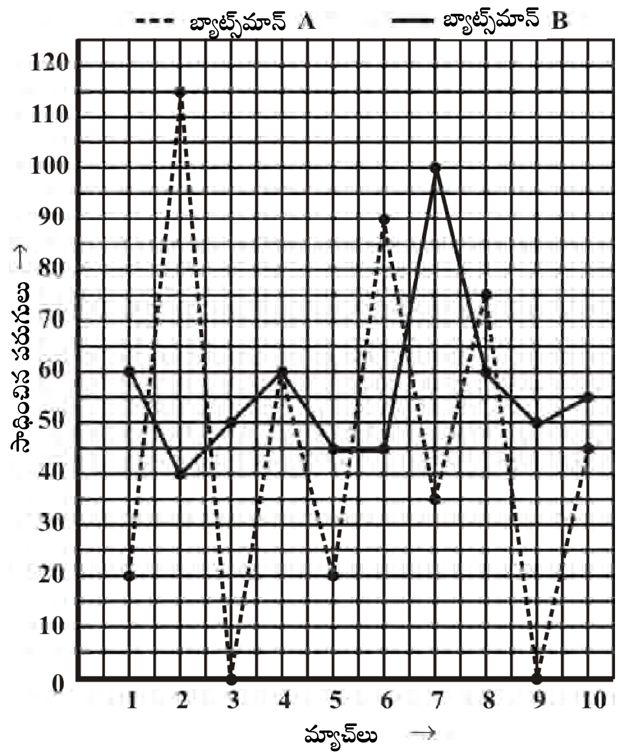


Fig 15.8

(iii) నాల్గవ మ్యాచ్‌లో ఇద్దరు సమానంగా 60 పరుగులు సాధించారు. (గ్రాఫ్‌లో రెండు రేఖలు కలుసుకున్న బిందువు దీన్ని సూచించును).

(iv) బ్యాట్స్‌మాన్ A కు సంబంధించిన గ్రాఫ్‌లో ఒక గొప్ప "శిఖరం", చాలా "లోయలను" కూడా కల్గియున్నది. అందువలన అతని ఆటతీరు స్థిరంగా కనబడుట లేదు. A యొక్క పరుగులు 115తో పోల్చినపుడు B యొక్క అత్యధిక స్కోరు 100 అయినప్పటికీ అతను 40 పరుగుల కంటే తక్కువ ఎప్పుడూ చేయలేదు. A రెండు పోటీలలో సున్న పరుగులు చేసి మరియు మొత్తం 5 మ్యాచ్‌లలోను 40 కంటే తక్కువ పరుగులు చేశాడు. A చాలా హెచ్చుతగ్గులు కల్గి ఉన్నందున A కంటే B స్థిరమైన ఆట తీరు కలిగిన, నమ్మదగిన ఆటగాడు అవుతాడు.



పటం 15.7

ఉదాహరణ 2: క్రింద ఇవ్వబడిన గ్రాఫ్ (పటం 15.8)లో 350కి.మీ. దూరంలో P మరియు Q అనే రెండు నగరాల మధ్య ప్రయాణిస్తున్న కారు వేర్వేరు సమయాల్లో P వద్ద నుండి Q వైపు ప్రయాణించిన దూరములను గూర్చి వివరిస్తుంది. గ్రాఫ్‌ను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబివ్వండి.

(i) రెండు అక్షముల మీద ఇవ్వబడిన సమాచారము ఏమిటి?

(ii) కారు తన ప్రయాణాన్ని ఎక్కడ నుండి, ఎప్పుడు ప్రారంభించింది?

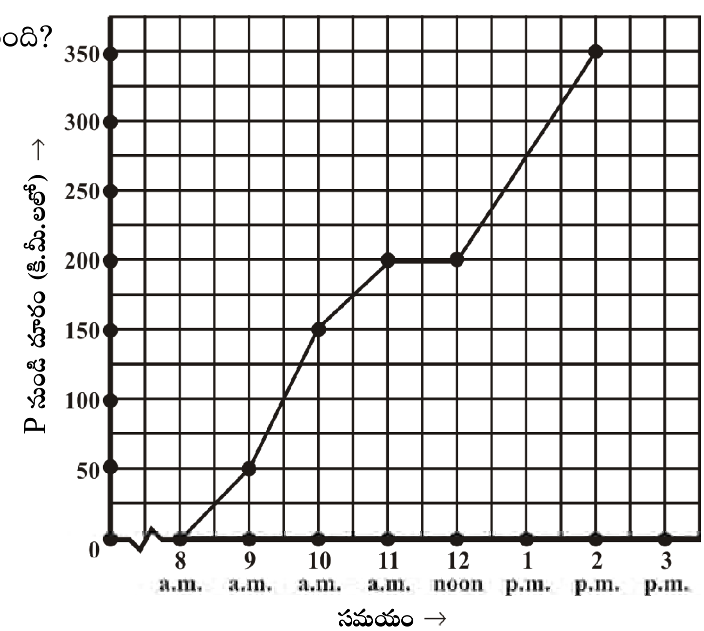
(iii) మొదటి గంట వ్యవధిలో కారు ఎంత దూరం ప్రయాణించింది?

(iv) (i) 2వ గంటలో (ii) 3వ గంటలో కారు ఎంత దూరం ప్రయాణించింది?

(v) మొదటి మూడు గంటలలో వేగం సమానంగా ఉందా? దీనిని మీరు ఎలా తెలుసుకోగలరు?

(vi) కారు ఏదైనా ప్రదేశం లో కొంత సమయం నిలుపబడిందా? మీ జవాబును సమర్థించండి.

(vii) కారు Q నగరానికి ఎప్పుడు చేరింది?



పటం 15.8

Solution:

(i) The horizontal (x) axis shows the time. The vertical (y) axis shows the distance of the car from City P.

(ii) The car started from City P at 8 a.m.

(iii) The car travelled 50 km during the first hour. [This can be seen as follows.
At 8 a.m. it just started from City P. At 9 a.m. it was at the 50th km (seen from graph).
Hence during the one-hour time between 8 a.m. and 9 a.m. the car travelled 50 km].

(iv) The distance covered by the car during

(a) the 2nd hour (i.e., from 9 am to 10 am) is 100 km, (150 – 50).

(b) the 3rd hour (i.e., from 10 am to 11 am) is 50 km (200 – 150).

(v) From the answers to questions (iii) and (iv), we find that the speed of the car was not the same all the time. (In fact the graph illustrates how the speed varied).

(vi) We find that the car was 200 km away from city P when the time was 11 a.m. and also at 12 noon. This shows that the car did not travel during the interval 11 a.m. to 12 noon. The horizontal line segment representing "travel" during this period is illustrative of this fact.

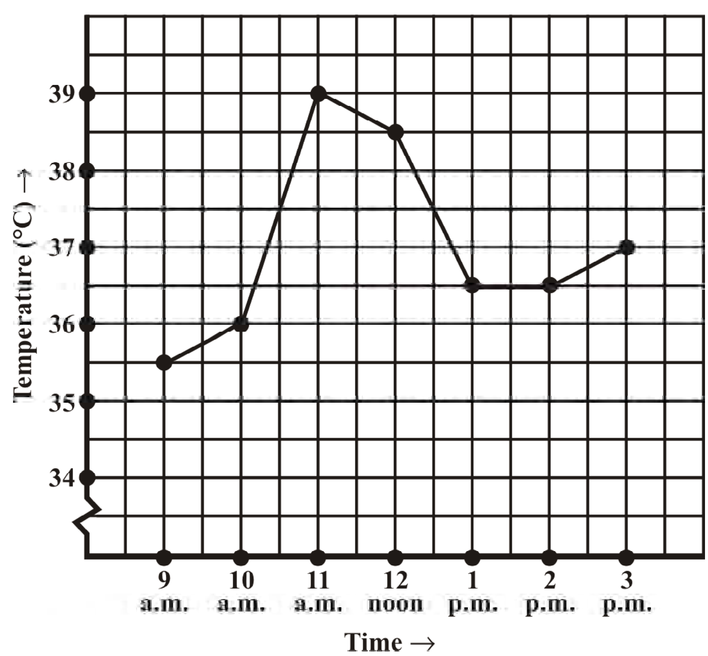
(vii) The car reached City Q at 2 p.m.

EXERCISE 15.1

1. The following graph shows the temperature of a patient in a hospital, recorded every hour.

(a) What was the patient's temperature at 1 p.m. ?

(b) When was the patient's temperature 38.5° C?



సాధన:

(i) x అక్షం సమయాన్ని సూచిస్తున్నది, y−అక్షం (నిలువురేఖ) నగరం P నుండి కారు ఉన్న దూరమును సూచిస్తుంది.

(ii) నగరం P నుండి కారు ఉదయం 8గం॥లకు బయలుదేరింది.

(iii) మొదటి గంటలో కారు 50కి.మీ. దూరం ప్రయాణించింది. [ఇది ఈ క్రింది చూపబడింది. ఉదయం 8గం॥లకు కారు నగరం P వద్ద బయలుదేరినది. ఉదయం 9గం॥లకు అది 50కి.మీ. వద్ద కలదు. (గ్రాఫ్ నుండి) కావున నగరం P నుండి ఉదయం 8గంటల నుండి 9 గంటల మధ్య 1 గంట కాలవ్యవధిలో కారు 50కి.మీ. ప్రయాణించింది].

(iv) (a) కారు రెండవ గంటలో (ఉదయం 9గం॥ నుండి ఉదయం 10గం॥ వరకు) 100కి.మీ. దూరం ప్రయాణించింది. (150−50)

(b) మూడవ గంటలో (ఉదయం 10గం. నుండి ఉదయం 11గం. వరకు) 50 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించింది. (200−150).

(v) (iii) మరియు (iv) జవాబుల ద్వారా అన్ని సమయాల్లో కారు ఒకే వేగంతో ప్రయాణించ లేదని తెలుస్తుంది. (నిజానికి కారు వేగంలో మార్పులను గ్రాఫ్ సూచిస్తుంది).

(vi) కారు ఉదయం 11గంటల సమయంలో నగరం P నుండి 200కి.మీ. దూరంలో ఉంది. మధ్యాహ్నం 12గం.లకు అక్కడే ఉంది. అందువలన ఉదయం 11గం॥ నుండి మధ్యాహ్నం 12గం॥ వరకు కారు ప్రయాణించలేదని తెలుస్తుంది. ఈ వ్యవధిలో కారు ప్రయాణించలేదని x−అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖాఖండం సూచిస్తుంది.

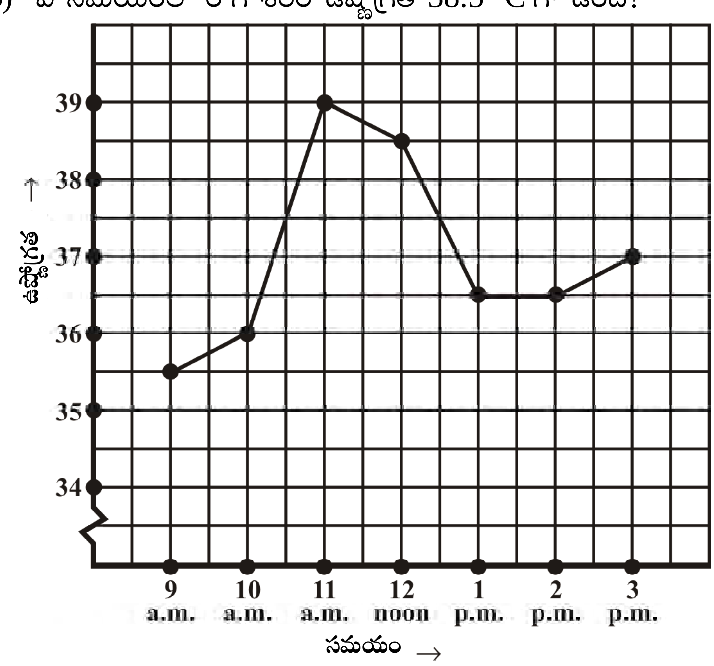
vii) కారు Q నగరానికి మధ్యాహ్నం 2 గం॥లకు చేరింది.

అభ్యాసం 15.1

1. ఇచ్చిన గ్రాఫ్ ఒక రోగికి ఆసుపత్రిలో ప్రతి గంటకు నమోదు చేసిన ఉష్ణోగ్రత వివరాలను సూచిస్తుంది. గ్రాఫ్‌ను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి.

(a) మధ్యాహ్నం ఒంటి గంట సమయంలో రోగి శరీర ఉష్ణోగ్రత ఎంత?

(b) ఏ సమయంలో రోగి శరీర ఉష్ణోగ్రత 38.5° C గా ఉంది?



(c) The patient's temperature was the same two times during the period given. What were these two times?

(d) What was the temperature at 1.30 p.m.? How did you arrive at your answer?

(e) During which periods did the patients' temperature showed an upward trend?

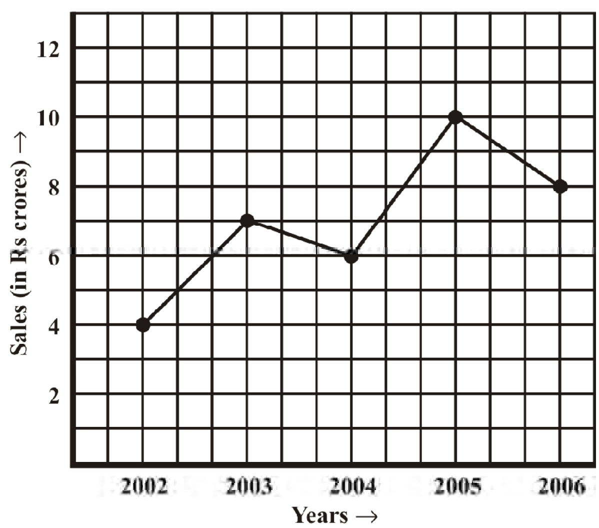
2. The following line graph shows the yearly sales figures for a manufacturing company.

(a) What were the sales in (i) 2002 (ii) 2006?

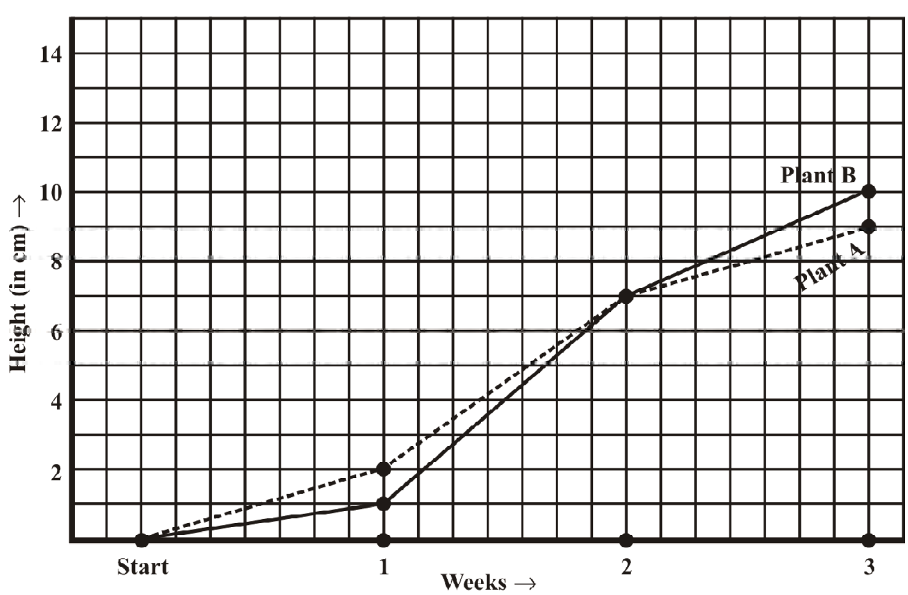
(b) What were the sales in (i) 2003 (ii) 2005?

(c) Compute the difference between the sales in 2002 and 2006.

(d) In which year was there the greatest difference between the sales as compared to its previous year?



3. For an experiment in Botany, two different plants, plant A and plant B were grown under similar laboratory conditions. Their heights were measured at the end of each week for 3 weeks. The results are shown by the following graph.



(c) ఇచ్చిన కాలవ్యవధులలో రోగి శరీర ఉష్ణోగ్రత రెండు సందర్భాలలో సమానంగా ఉంది. ఆ సమయాలు ఏవి?

(d) మధ్యాహ్నం 1.30 సమయానికి ఉష్ణోగ్రత ఎంత? ఈ జవాబు ఎలా వచ్చింది?

(e) ఏయే కాల వ్యవధుల మధ్య రోగి శరీర ఉష్ణోగ్రత పెరిగినట్లు చూపబడింది?

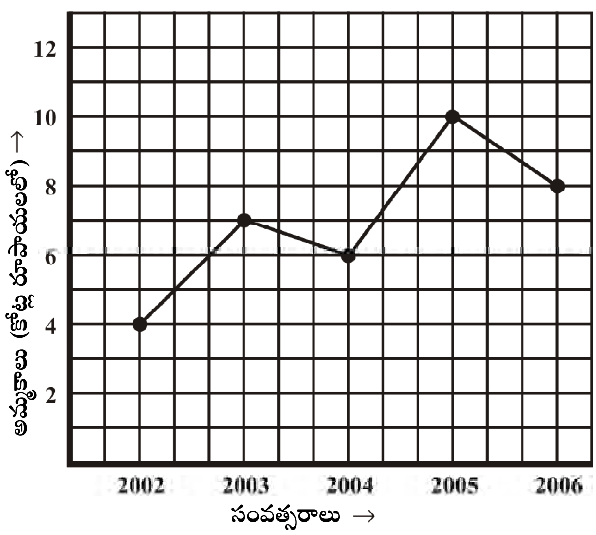
2. క్రింది గ్రాఫ్ సంవత్సరంలో ఒక పరిశ్రమ యొక్క అమ్మకాలను సూచిస్తుంది. అయిన

(a) (i) 2002 (ii) 2006లలో అమ్మకాలు ఎంత?

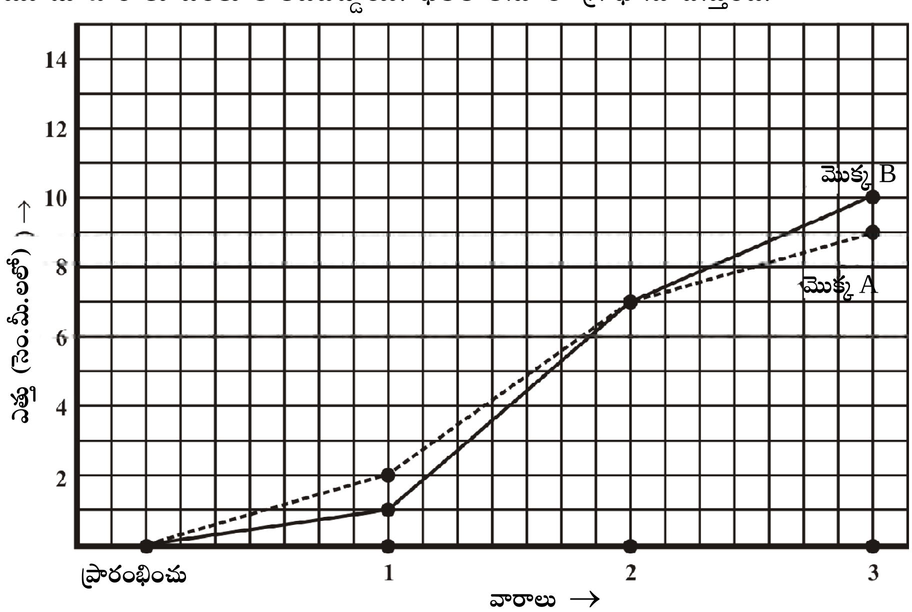
(b) (i) 2003 (ii) 2005లలో అమ్మకాలు ఎంత?

(c) 2002 మరియు 2006లలో అమ్మకాల మధ్య వ్యత్యాసము లెక్కించండి.

(d) గత సంవత్సరముతో పోల్చినపుడు ఏ సంవత్సరంలో అమ్మకాల మధ్య వ్యత్యాసం ఎక్కువగా ఉంది?



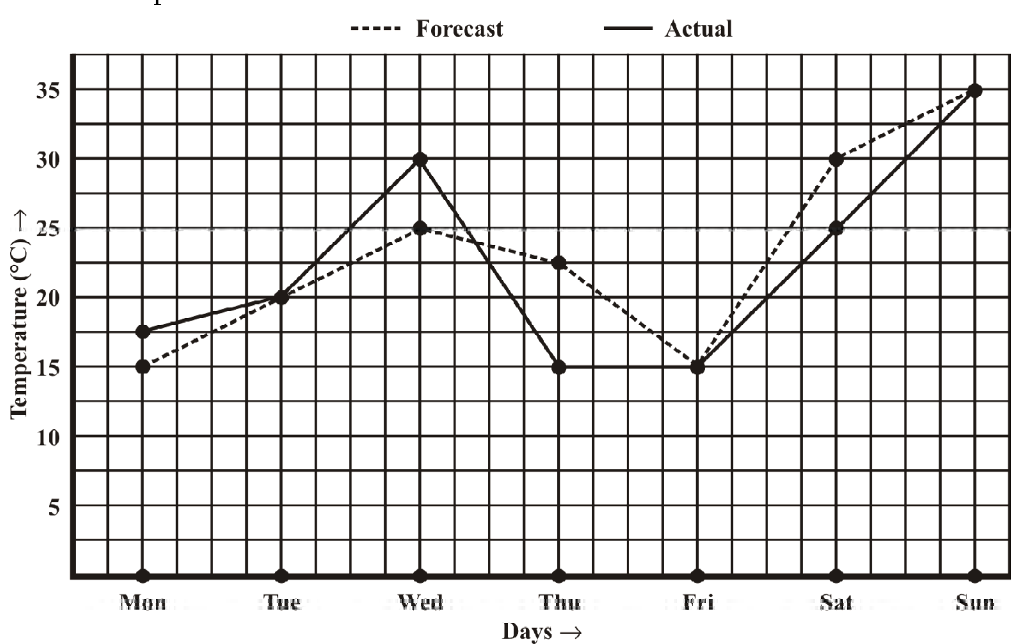
3. వృక్ష శాస్త్రములో ఒక ప్రయోగంకొరకు A మరియు B అనే రెండు విభిన్న మొక్కలు ఒకేవిధమైన ప్రయోగశాల పరిస్థితులలో పెంచబడినవి. ప్రతి వారాంతరానికి ఒకసారి చొప్పున వాటి ఎత్తులు మూడు వారాలు వరకు కొలవబడ్డాయి. ఫలితాలను ఈ గ్రాఫ్ సూచిస్తుంది.



(a) How high was Plant A after (i) 2 weeks (ii) 3 weeks?
(b) How high was Plant B after (i) 2 weeks (ii) 3 weeks?
(c) How much did Plant A grow during the 3rd week?
(d) How much did Plant B grow from the end of the 2nd week to the end of the 3rd week?
(e) During which week did Plant A grow most?
(f) During which week did Plant B grow least?
(g) Were the two plants of the same height during any week shown here? Specify.

4. The following graph shows the temperature forecast and the actual temperature for each day of a week.

(a) On which days was the forecast temperature the same as the actual temperature?
(b) What was the maximum forecast temperature during the week?
(c) What was the minimum actual temperature during the week?
(d) On which day did the actual temperature differ the most from the forecast temperature?



5. Use the tables below to draw linear graphs.

(a) The number of days a hill side city received snow in different years.

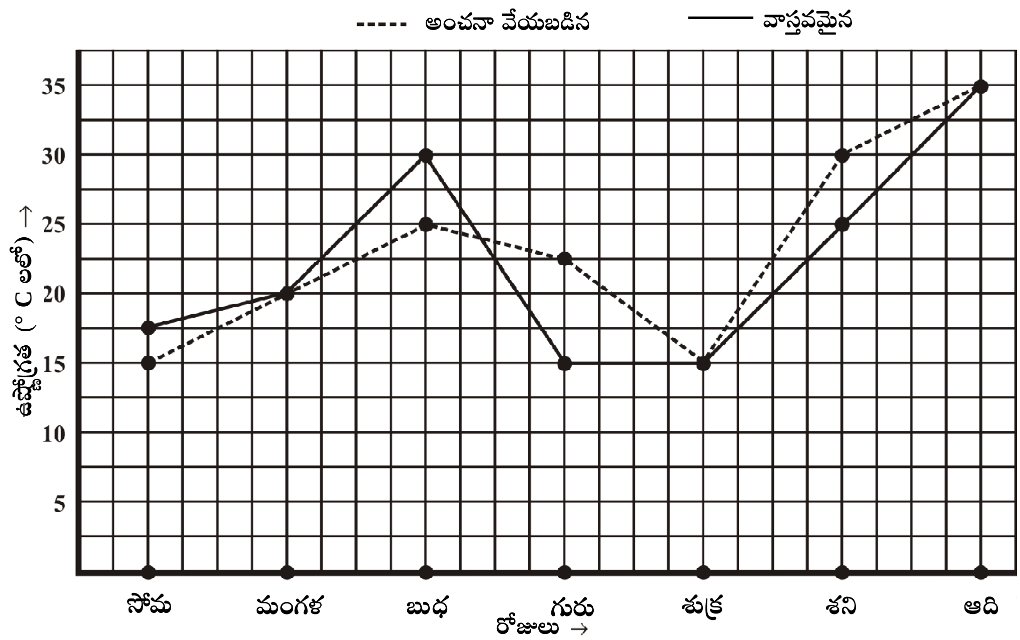
Year	2003	2004	2005	2006
Days	8	10	5	12

(b) Population (in thousands) of men and women in a village in different years.

Year	2003	2004	2005	2006	2007
Number of Men	12	12.5	13	13.2	13.5
Number of Women	11.3	11.9	13	13.6	12.8

(a) (i) 2 వారముల తర్వాత (ii) 3 వారముల తర్వాత మొక్క A ఎత్తు ఎంత?
(b) (i) 2 వారముల తర్వాత (ii) 3 వారముల తర్వాత మొక్క B ఎత్తు ఎంత?
(c) 3వ వారపు వ్యవధిలో మొక్క A ఎంత ఎత్తుకు పెరిగింది?
(d) 2వ వారం చివరి నుండి 3వ వారం చివర వరకు మొక్క B ఎంత ఎత్తు పెరిగింది?
(e) మొక్క A ఏ వారంలో ఎక్కువగా పెరిగింది?
(f) మొక్క B ఏ వారంలో అతి తక్కువ పెరిగింది?
(g) రెండు మొక్కలు ఏ వారంలోనైనా సమాన ఎత్తులు కల్గి ఉండడం సూచించబడిందా?

4. ఇవ్వబడిన గ్రాఫ్ ఒక వారం వ్యవధిలో ప్రతిరోజు అంచనా వేయబడిన ఉష్ణోగ్రత మరియు వాస్తవముగా నమోదు కాబడిన ఉష్ణోగ్రత వివరాలు చూపిస్తుంది.
(a) అంచనా వేయబడిన ఉష్ణోగ్రత మరియు వాస్తవ ఉష్ణోగ్రతలు ఏయే రోజుల్లో సమానంగా ఉన్నాయి?
(b) వారము వ్యవధిలో గరిష్ఠ అంచనా వేయబడిన ఉష్ణోగ్రత ఎంత?
(c) వారము వ్యవధిలో కనిష్ఠ వాస్తవ ఉష్ణోగ్రత ఎంత?
(d) వాస్తవ ఉష్ణోగ్రత – అంచనా వేయబడిన ఉష్ణోగ్రత ఏ రోజులలో అతి ఎక్కువ వ్యత్యాసాన్ని కలిగి ఉన్నాయి?



5. రేఖీయ గ్రాఫ్‌లను గీయడానికి ఈ క్రింది పట్టికలు ఉపయోగించండి?
a) వేర్వేరు సం॥లలో ఒక పర్వతప్రాంత సమీప నగరంలో మంచు పడిన రోజుల సంఖ్య.

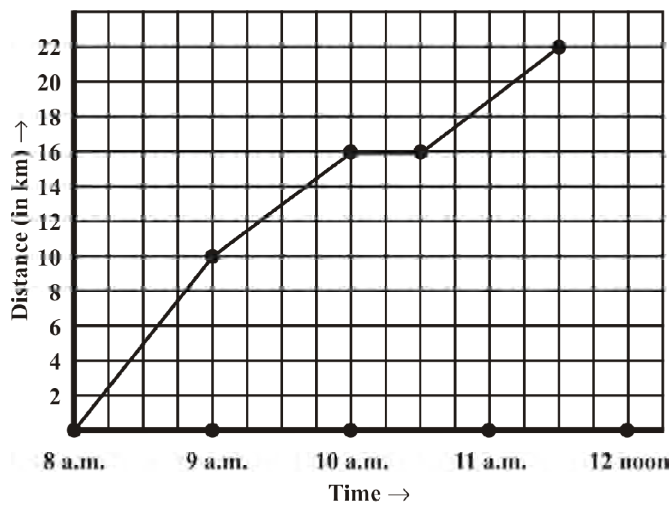
సంవత్సరం	2003	2004	2005	2006
రోజులు	8	10	5	12

(b) వేర్వేరు సం॥లలో ఒక గ్రామంలో పురుషులు మరియు స్త్రీల జనాభా (వేలల్లో)

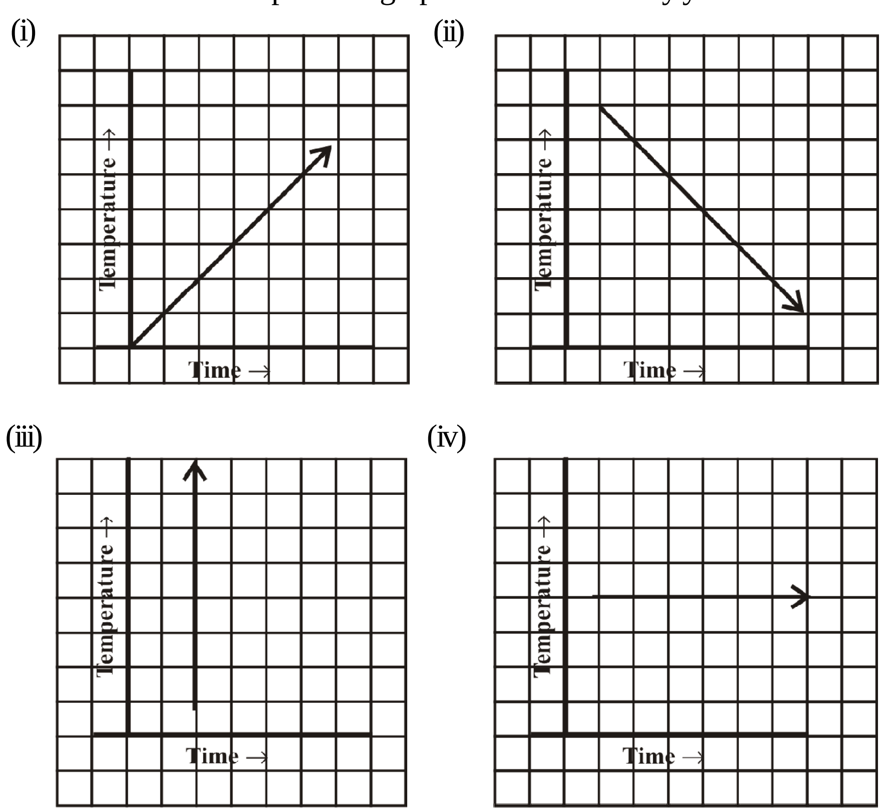
సంవత్సరం	2003	2004	2005	2006	2007
పురుషుల సంఖ్య	12	12.5	13	13.2	13.5
స్త్రీల సంఖ్య	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. A courier-person cycles from a town to a neighbouring suburban area to deliver a parcel to a merchant. His distance from the town at different times is shown by the following graph.

(a) What is the scale taken for the time axis?
(b) How much time did the person take for the travel?
(c) How far is the place of the merchant from the town?
(d) Did the person stop on his way? Explain.
(e) During which period did he ride fastest?

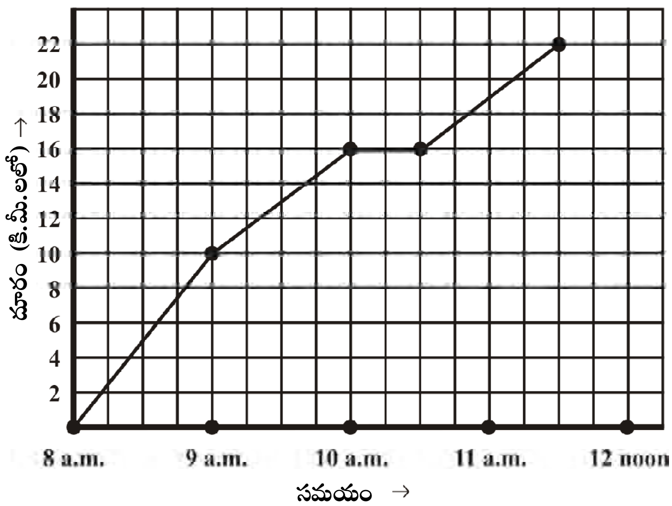


7. Can there be a time-temperature graph as follows? Justify your answer.

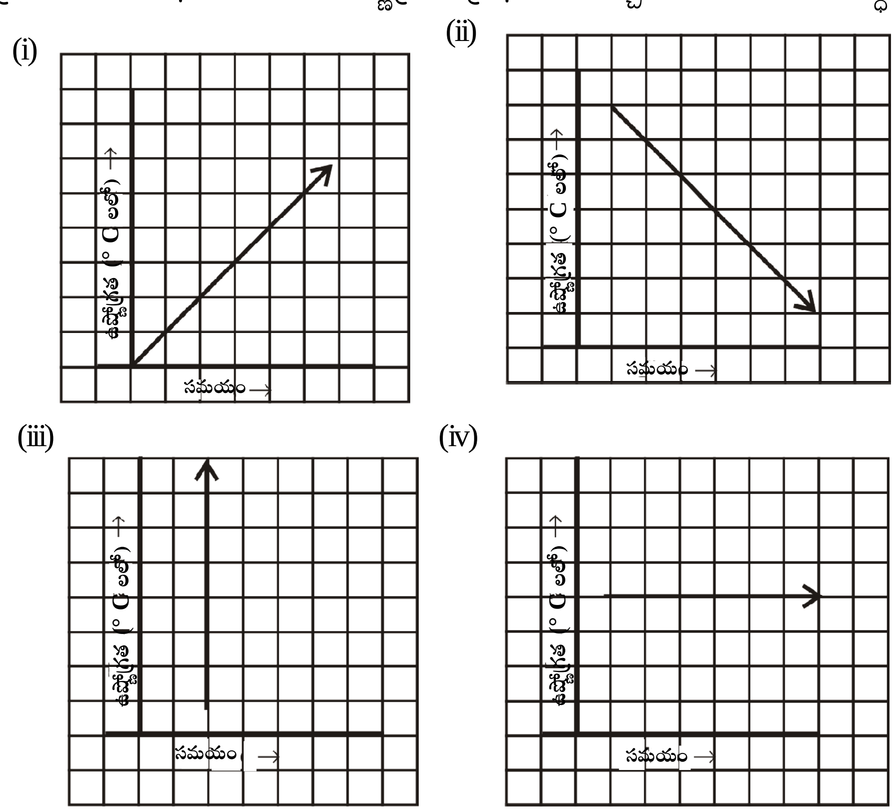


6. ఒక కొరియర్ వ్యక్తి ఒక పట్టణం నుండి ప్రక్కనే గల మరొక చిన్న పట్టణంలో గల ఒక వ్యాపారికి పార్సిల్ ఇవ్వడానికి సైకిల్‌పై వెళ్తున్నాడు. వేర్వేరు సమయాల్లో పట్టణం నుండి అతనికి గల దూరాన్ని ఈ గ్రాఫ్ చూపుతుంది.

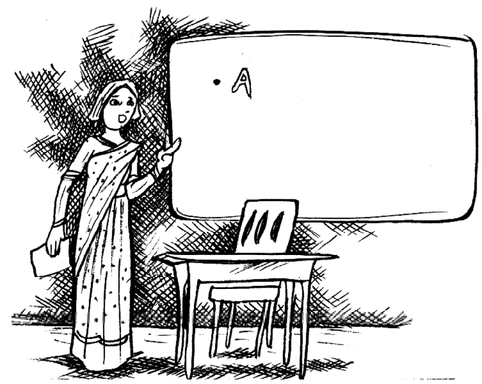
(a) సమయం సూచించిన అక్షంపై తీసుకున్న స్కేలు (ప్రమాణం) ఎంత?
(b) కొరియర్ వ్యక్తి తన ప్రయాణానికి తీసుకున్న మొత్తం సమయం ఎంత?
(c) పట్టణం నుండి వ్యాపారి ఉంటున్న ప్రాంతము ఎంత దూరంలో ఉంది?
(d) కొరియర్ వ్యక్తి ప్రయాణం మధ్యలో ఆగి ఉన్నాడా? వివరించండి.
(e) ఏ కాలవ్యవధిలో కొరియర్ వ్యక్తి అత్యంత వేగంతో సైకిలు తొక్కాడు?



7. క్రింద చూపిన విధముగా కాలం–ఉష్ణోగ్రతల గ్రాఫ్ ఉండవచ్చా? మీ జవాబును సమర్థించండి.



15.2 Linear Graphs



A line graph consists of bits of line segments joined consecutively. Sometimes the graph may be a whole unbroken line. Such a graph is called a **linear graph**. To draw such a line we need to locate some points on the graph sheet. We will now learn how to locate points conveniently on a graph sheet.

15.2.1 Location of a point

The teacher put a dot on the black-board. She asked the students how they would describe its location. There were several responses (Fig 15. 9).

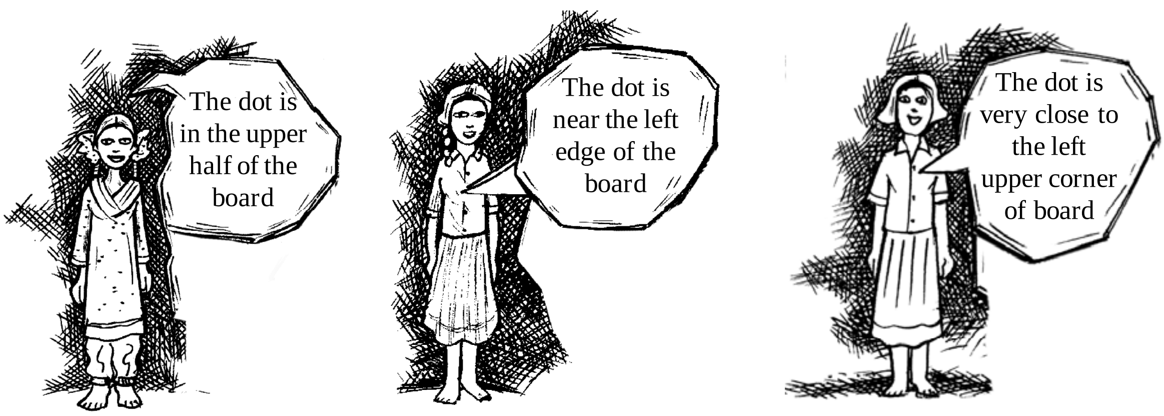


Fig 15.9

Can any one of these statements help fix the position of the dot? No! Why not? Think about it.

John then gave a suggestion. He measured the distance of the dot from the left edge of the board and said, "The dot is 90 cm from the left edge of the board". Do you think John's suggestion is really helpful? (Fig 15.10)

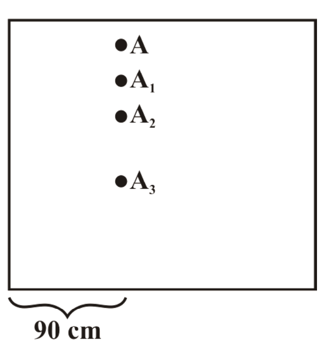


Fig 15.10

A, A_1, A_2, A_3 are all 90 cm away from the left edge.

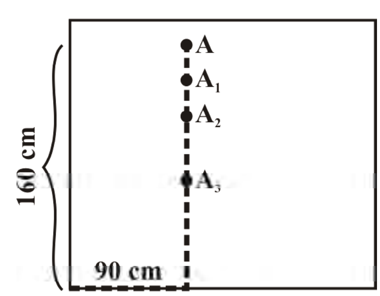
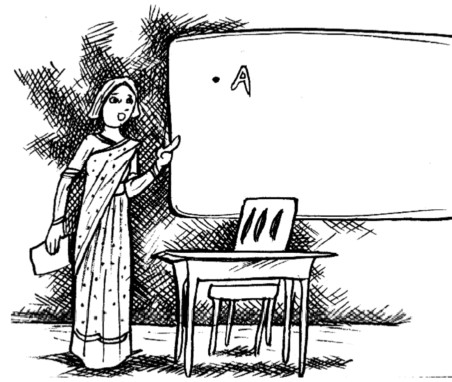


Fig 15.11

A is 90 cm from left edge and 160 cm from the bottom edge.

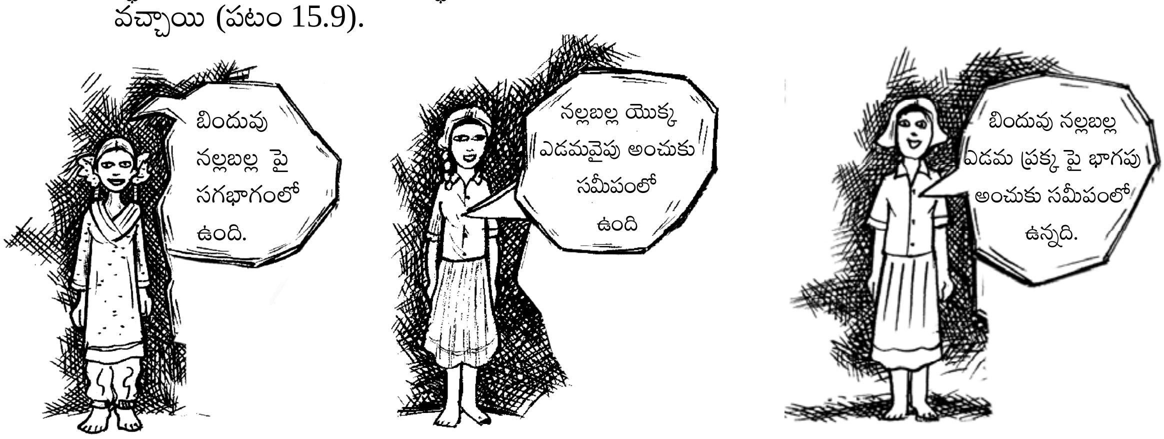
15.2 రేఖీయ చిత్రాలు



రేఖా చిత్రంలో వరుసగా కలుపబడిన రేఖాఖండాల భాగములు ఉంటాయి. కొన్నిసార్లు అది విచ్ఛిన్నం కాని సంపూర్ణమైన రేఖ అవుతుంది. అటువంటి రేఖాచిత్రాన్ని **రేఖీయ చిత్రం** అంటాం. ఈ విధమైన రేఖను గీయడానికి మనం గ్రాఫ్ కాగితంపై కొన్ని బిందువులు గుర్తించాలి. ఒక గ్రాఫ్ కాగితం మీద బిందువులను ఎలా గుర్తించాలో ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం.

15.2.1 బిందువును గుర్తించడం

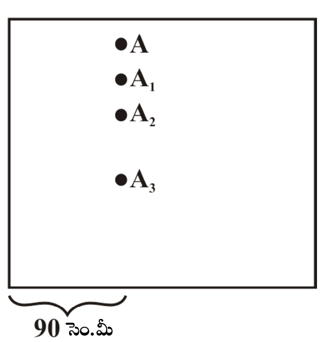
ఉపాధ్యాయురాలు నల్లబల్ల మీద ఒక బిందువును గుర్తించి ఆ బిందువు స్థానమును వివరించమని విద్యార్థులను అడిగారు. అప్పుడు అనేక జవాబులు వచ్చాయి (పటం 15.9).



పటం 15.9

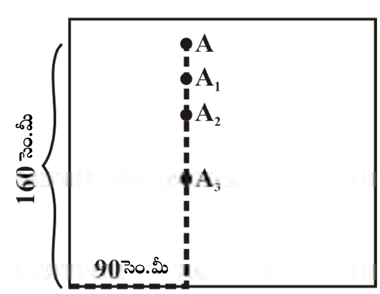
పై వాక్యాలలో ఏదైన వాక్యం బిందువు స్థానమును నిర్ణయించడానికి సహాయపడుతుందా? లేదు! ఎందుకు? దీని గురించి ఆలోచించండి.

తర్వాత జాన్ ఒక సలహా ఇచ్చాడు. అతను నల్లబల్ల ఎడమ (చివర) అంచునుండి బిందువుకు గల దూరాన్ని కొలిచి "ఆ బిందువు నల్లబల్ల ఎడమ అంచునుండి 90 సెం.మీ ల దూరంలో ఉన్నది" అని చెప్పాడు. జాన్ ఇచ్చిన సూచన సహాయపడుతుందని మీరు అనుకుంటున్నారా? (పటం15.10)



పటం 15.10

A, A_1, A_2, A_3 అన్ని నల్లబల్ల ఎడమ అంచునుండి 90 సెం.మీ దూరంలో గల బిందువులు.



పటం 15.11

A బిందువు ఎడమ అంచునుండి 90సెం.మీ మరియు క్రింది అంచు నుండి 160 సెం.మీ ల దూరంలో ఉంది.

Rekha then came up with a modified statement : "The dot is 90 cm from the left edge and 160 cm from the bottom edge". That solved the problem completely! (Fig 15.11) The teacher said, "We describe the position of this dot by writing it as (90, 160)". Will the point (160, 90) be different from (90, 160)? Think about it.

*The 17th century mathematician **Rene Descartes**, it is said, noticed the movement of an insect near a corner of the ceiling and began to think of determining the position of a given point in a plane. His system of fixing a point with the help of two measurements, vertical and horizontal, came to be known as Cartesian system, in his honour.*

Rene Descartes (1596-1650)

15.2.2 Coordinates

Suppose you go to an auditorium and search for your reserved seat. You need to know two numbers, the row number and the seat number. This is the basic method for fixing a point in a plane.

Observe in Fig 15.12 how the point (3, 4) which is 3 units from left edge and 4 units from bottom edge is plotted on a graph sheet. The graph sheet itself is a square grid. We draw the x and y axes conveniently and then fix the required point. 3 is called the ***x*-coordinate** of the point; 4 is the ***y*-coordinate** of the point. We say that the **coordinates** of the point are (3, 4).

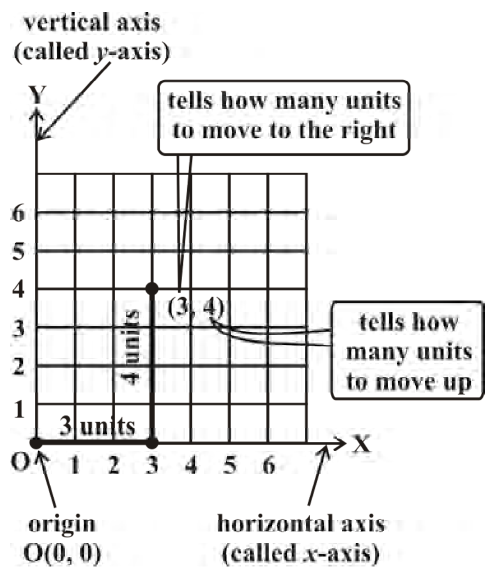


Fig 15.12

Example 3: Plot the point (4, 3) on a graph sheet. Is it the same as the point (3, 4)?

Solution: Locate the x, y axes, (they are actually number lines!). Start at O (0, 0). Move 4 units to the right; then move 3 units up, you reach the point (4, 3). From Fig 15.13, you can see that the points (3, 4) and (4, 3) are two different points.

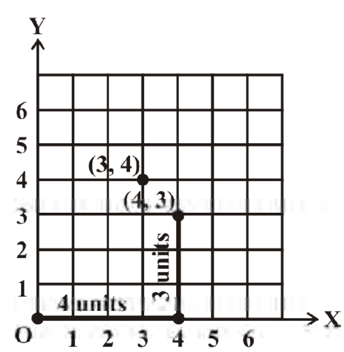


Fig 15.13

Example 4: From Fig 15.14, choose the letter(s) that indicate the location of the points given below:

(i) (2, 1)

(ii) (0, 5)

(iii) (2, 0)

Also write

(iv) The coordinates of A.

(v) The coordinates of F.

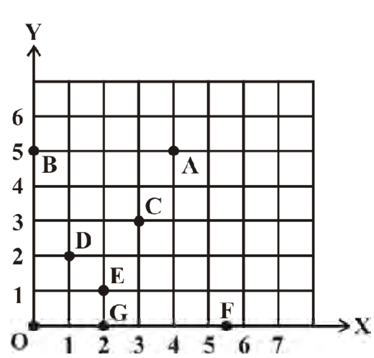
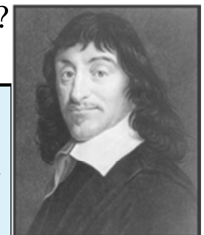


Fig 15.14

తర్వాత రేఖ మరొక మార్చబడిన వాక్యం చెప్పింది: "బిందువు నల్లబల్ల ఎడమ అంచునుండి 90 సెం.మీ. మరియు క్రింది అంచు నుండి 160 సెం.మీ ల దూరంలో ఉంది". ఈ వాక్యం వలన సమస్య పూర్తిగా పరిష్కరించబడింది! (పటం 15.11). "మనం బిందువు స్థానమును (90, 160) అని రాస్తాము" అని ఉపాధ్యాయురాలు చెప్పారు. (160, 90) బిందువు, (90, 160) బిందువుకు భిన్నంగా ఉంటుందా? దీని గురించి ఆలోచించండి.



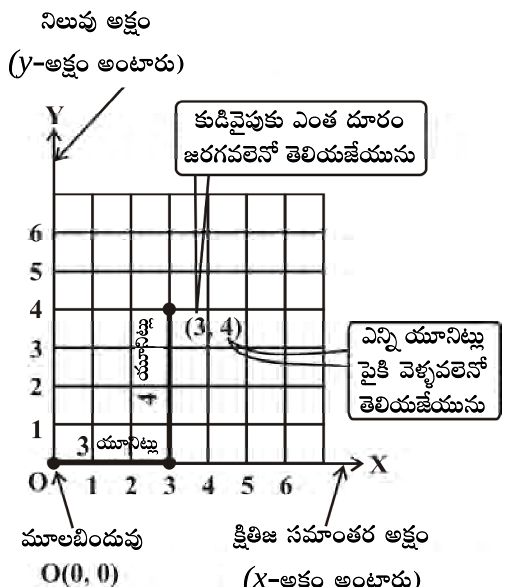
రెనె డెకార్టె
(1596-1650)

17వ శతాబ్దానికి చెందిన ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రవేత్త ***రెనె డెకార్టె*** *ఇంటి పైకప్పు (సీలింగ్) మూలలో ఒక కీటకం కదులుతుండటం గమనించి సమతలంలో ఒక బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించుట గురించి ఆలోచించినారు. ఒక బిందువు స్థానమును రెండు కొలతల సహాయంతో, క్షితిజ సమాంతర రేఖ కొలత మరియు నిలువురేఖ కొలతలతో నిర్ణయించడానికి ఉపయోగించిన అతని పద్ధతిని వారి గౌరవార్థం "కార్టీజియన్ పద్ధతి" అని అంటారు.*

15.2.2 నిరూపకాలు

మీరు ఆడిటోరియంకు వెళ్ళి మీ రిజర్వు సీటు కోసం వెతికారని అనుకుందాం. మీకు రెండు సంఖ్యలు తెలిసి ఉండాలి. మీ సీటు వరుస మరియు సీటు సంఖ్య. సమతలంలో ఒక తలంలో బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించటానికి ఇదే ఆధారం.

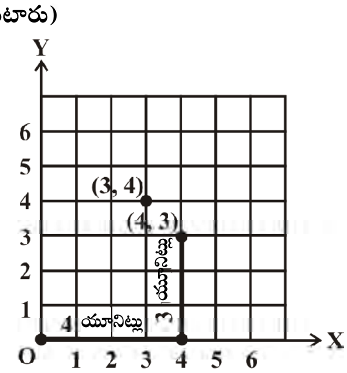
పటం 15.12లో గమనించినపుడు (3,4) అనే బిందువు గ్రాఫ్ కాగితంపై ఎడమ అంచునుండి 3 యూనిట్లు మరియు క్రింది అంచు నుండి 4 యూనిట్లు దూరంలో గుర్తించబడి ఉండుట గమనించండి. గ్రాఫ్ కాగితం ఒక చదరపు గళ్ళ కాగితం. కావలసిన బిందువును గుర్తించుటకు మనకు అనుకూలముగా x మరియు y-అక్షాలను గీచి బిందువును స్థాపిస్తాము. 3ను బిందువు యొక్క **x – నిరూపకం** అని, 4ను బిందువు యొక్క **y – నిరూపకం** అని అంటాం. (3,4)ను **బిందువు నిరూపకాలు** అని అంటాం.



పటం 15.12

ఉదాహరణ 3: (4,3) బిందువును గ్రాఫ్ కాగితం మీద గుర్తించండి. ఇది (3,4) బిందువుకు సమానమా?

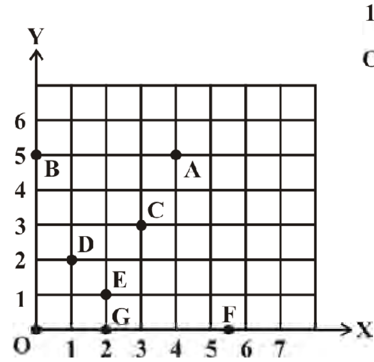
సాధన: x మరియు y-అక్షాలను గీయండి (అవి సంఖ్యా రేఖలే) O (0.0) నుండి ప్రారంభించి కుడివైపునకు 4 యూనిట్లు తర్వాత, అక్కడ నుండి పైకి 3 యూనిట్లు కదిలినపుడు (4, 3) బిందువును చేరుతారు. పటం 15.13లో (3,4) బిందువు మరియు (4,3) బిందువు రెండూ వేర్వేరు బిందువులని గమనిస్తాం.



పటం15.13

ఉదాహరణ 4: పటం 15.14 లో నుండి క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువుల స్థానాన్ని సూచించే అక్షరాలను ఎంపిక చేసుకొని క్రింది వాటిని రాయండి.

(i) (2,1)
(ii) (0,5)
(iii) (2,0)
(iv) బిందువు A నిరుపకాలు
(v) బిందువు F నిరూకాలు



పటం 15.14

Solution:

(i) (2, 1) is the point E (It is not D!).

(ii) (0, 5) is the point B (why? Discuss with your friends!). (iii) (2, 0) is the point G.

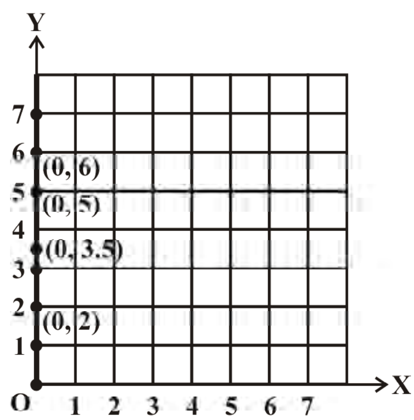
(iv) Point A is (4, 5) (v) F is (5.5, 0)

Example 5: Plot the following points and verify if they lie on a line. If they lie on a line, name it.

(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5) (ii) A (1, 1), B (1, 2), C (1, 3), D (1, 4)

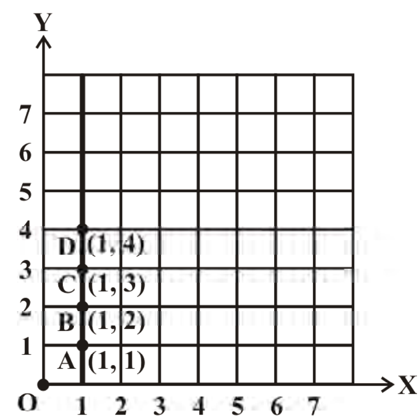
(iii) K (1, 3), L (2, 3), M (3, 3), N (4, 3) (iv) W (2, 6), X (3, 5), Y (5, 3), Z (6, 2)

Solution:



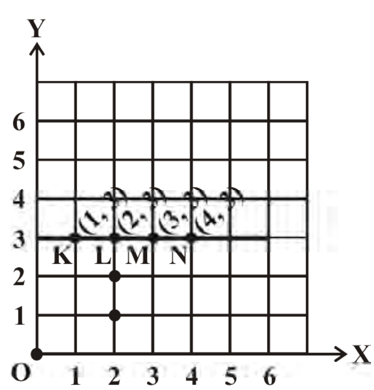
(i)

These lie on a line.
The line is *y*-axis.

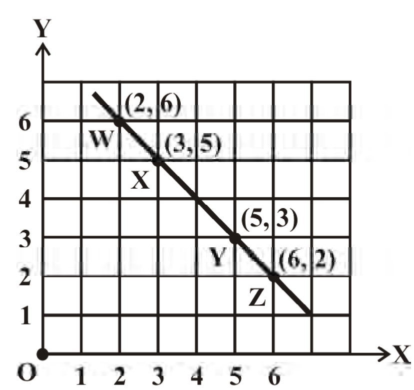


(ii)

These lie on a line. The line is AD.
(You may also use other ways of naming it). It is parallel to the *y*-axis



(iii)



(iv)

Fig 15.15

These lie on a line. We can name it as KL or KM or MN etc. It is parallel to *x*-axis

These lie on a line. We can name it as XY or WY or YZ etc.

Note that in each of the above cases, graph obtained by joining the plotted points is a line. Such graphs are called **linear graphs**.

సాధన:

(i) (2,1) బిందువు E అగును (D కాదు!).

(ii) (0,5) బిందువు B అగును (ఎందుకు? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి!).

(iii) (2.0) బిందువు G అగును.

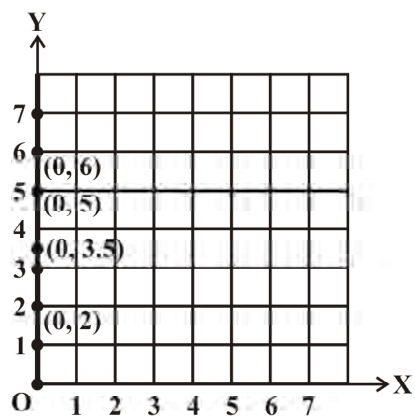
(iv) బిందువు A (4,5) అగును. (v) బిందువు F (5.5,0) అగును

ఉదాహరణ 5: క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులను గ్రాఫ్ పై గుర్తించి అవి ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నాయో లేదో పరీక్షించండి. ఒకే సరళరేఖ మీద ఉంటే, ఆ రేఖలకు పేర్లు పెట్టండి.

(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5) (ii) A (1, 1), B (1, 2), C (1, 3), D (1, 4)

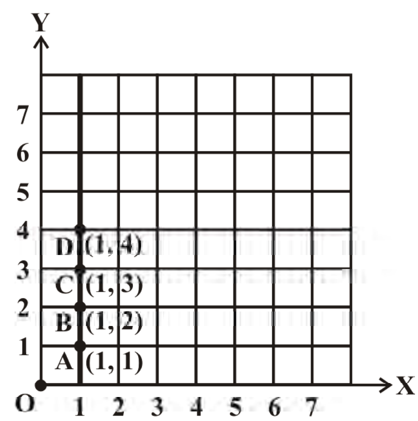
(iii) K (1, 3), L (2, 3), M (3, 3), N (4, 3) (iv) W (2, 6), X (3, 5), Y (5, 3), Z (6, 2)

సాధన:



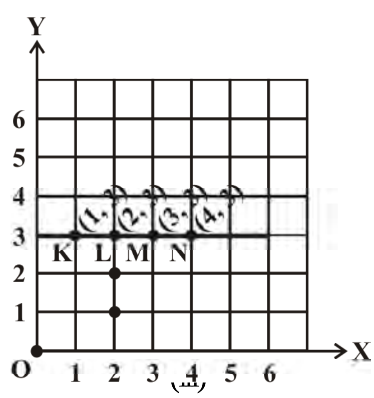
(i)

ఈ బిందువులు ఒకే సరళరేఖ మీద ఉన్నాయి ఆ సరళరేఖ y-అక్షం.

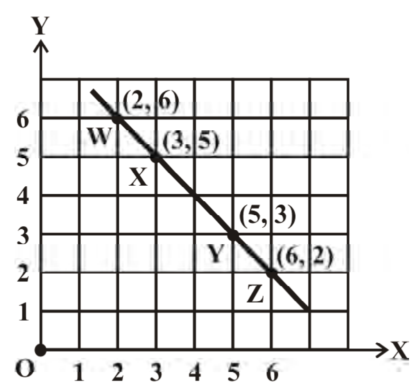


(ii)

ఈ బిందువులు ఒకే సరళరేఖ మీద ఉన్నాయి. ఆ సరళరేఖ AD. (వాటికి వేరేవిధాలుగా కూడా పేర్లు పెట్టవచ్చు) అది y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంది.



ఈ బిందువులు ఒకే సరళరేఖ మీద ఉన్నాయి దీనిని KL లేదా KM లేదా MN మొదలైనవిగా అనవచ్చును.ఇవి x-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్నాయి.



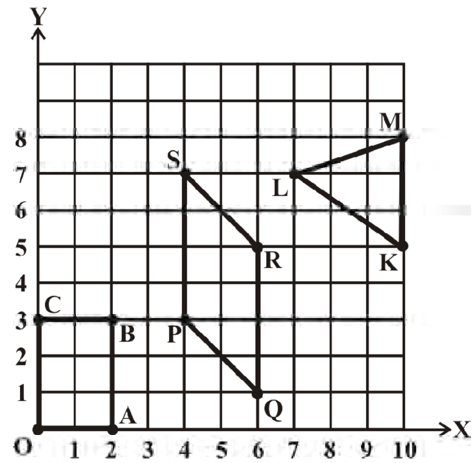
ఈ బిందువులు ఒకే సరళరేఖ మీద ఉన్నాయి. దీనిని XY లేదా WY లేదా YZ మొదలైనవిగా అనవచ్చును.

పటం 15.15

పైన ప్రతి సందర్భంలోనూ, బిందువులను రేఖా చిత్రంపై గుర్తించి కలపడం ద్వారా ఏర్పడినది సరళరేఖ అని గమనించండి. ఇలాంటి గ్రాఫ్‌లను **రేఖీయ చిత్రాలు** అంటారు.

EXERCISE 15.2

1. Plot the following points on a graph sheet. Verify if they lie on a line
   (a) A(4, 0), B(4, 2), C(4, 6), D(4, 2.5)
   (b) P(1, 1), Q(2, 2), R(3, 3), S(4, 4)
   (c) K(2, 3), L(5, 3), M(5, 5), N(2, 5)
2. Draw the line passing through (2, 3) and (3, 2). Find the coordinates of the points at which this line meets the *x*-axis and *y*-axis.
3. Write the coordinates of the vertices of each of these adjoining figures.
4. State whether True or False. Correct that are false.
   (i) A point whose *x* coordinate is zero and *y*-coordinate is non-zero will lie on the *y*-axis.
   (ii) A point whose *y* coordinate is zero and *x*-coordinate is 5 will lie on *y*-axis.
   (iii) The coordinates of the origin are (0, 0).



15.3 Some Applications

In everyday life, you might have observed that the more you use a facility, the more you pay for it. If more electricity is consumed, the bill is bound to be high. If less electricity is used, then the bill will be easily manageable. This is an instance where one quantity affects another. Amount of electric bill depends on the quantity of electricity used. We say that the quantity of electricity is an **independent variable** (or sometimes **control variable**) and the amount of electric bill is **the dependent variable**. The relation between such variables can be shown through a graph.

THINK, DISCUSS AND WRITE

The number of litres of petrol you buy to fill a car's petrol tank will decide the amount you have to pay. Which is the independent variable here? Think about it.

Example 6: **(Quantity and Cost)**

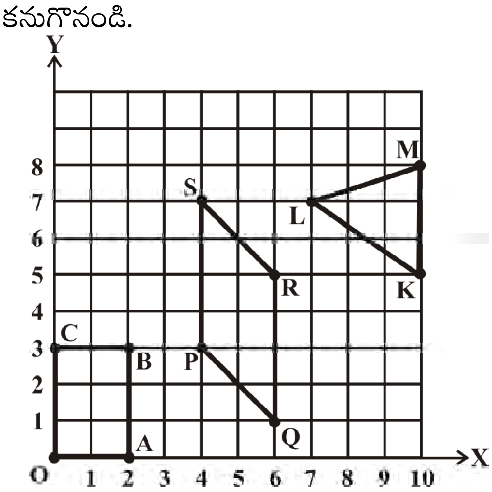
The following table gives the quantity of petrol and its cost.

No. of Litres of petrol	10	15	20	25
Cost of petrol in `	500	750	1000	1250

Plot a graph to show the data.

అభ్యాసం 15.2

1. క్రింది ఇచ్చిన బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితం మీద గుర్తించండి. అవి ఒకే రేఖపై ఉన్నాయా? పరిశీలించండి.
   (a) A(4, 0), B(4, 2), C(4, 6), D(4, 2.5)
   (b) P(1, 1), Q(2, 2), R(3, 3), S(4, 4)
   (c) K(2, 3), L(5, 3), M(5, 5), N(2, 5)
2. (2,3) మరియు (3,2) బిందువుల గుండాపోవు సరళరేఖను గీయండి. ఆ సరళరేఖ x –అక్షాన్ని మరియు y - అక్షాన్ని ఖండించు బిందువుల నిరూపకాలు కనుగొనండి.
3. ప్రక్క ఇవ్వబడిన పటాల శీర్షముల యొక్క నిరూపకాలు రాయండి.
4. క్రింది వాక్యాలు సత్యమో, అసత్యమో తెల్పండి. అసత్యమైన వాటిని సరిచేయండి.
   (i) x-నిరూపకం సున్న మరియు y-నిరూపకం సున్నకాని ఒక బిందువు y-అక్షంపై ఉంటుంది.
   (ii) y-నిరూపకం సున్న మరియు x-నిరూపకం 5గా గల బిందువు y-అక్షంపై ఉంటుంది.
   (iii) మూలబిందువు నిరూపకాలు (0,0) అవుతాయి.



15.3 కొన్ని అనువర్తనాలు

నిత్యజీవితంలో, ఏ సౌకర్యాలను ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తామో వాటికి ఎక్కువ వెల చెల్లించాలని మీకు తెలుసు. ఎక్కువ కరెంటు వాడితే ఎక్కువ బిల్లు చెల్లించాలి. తక్కువ కరెంటు వాడితే బిల్లు తగ్గుతుంది, సులభంగా చెల్లించగలం కూడా. ఒక రాశి మరొక రాశిని ప్రభావితం చేస్తుంది అనుటకు ఇదొక సందర్భం. కరెంటు బిల్లు, ఉపయోగించిన కరెంటు పరిమాణం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. విద్యుచ్ఛక్తి పరిమాణం ఒక **స్వతంత్ర చరరాశి** (లేదా కొన్నిసార్లు **నియంత్రణ చరరాశి**) మరియు కరెంటు బిల్లు మొత్తము **ఆధారిత చరరాశి** అని మనం చెప్పవచ్చు. ఈ చరరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని ఒక గ్రాఫ్ ద్వారా చూపగలం.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.

పెట్రోలు కొనుగోలు చేసినపుడు నీవు చెల్లించాల్సిన బిల్లు మొత్తము, కారు యొక్క పెట్రోలు ట్యాంక్ నింపుటకు అవసరమగు పెట్రోలు పరిమాణం (లీటర్ల సంఖ్య) మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. ఇక్కడ స్వతంత్ర చరరాశి ఏది? దీని గురించి ఆలోచించండి.

ఉదాహరణ 6: (పరిమాణం మరియు వెల)

క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికలో పెట్రోల్ పరిమాణము మరియు దాని వెల ఇవ్వబడింది.

పెట్రోల్ (లీటర్లలో)	10	15	20	25
పెట్రోల్ వెల (`లలో)	500	750	1000	1250

ఈ దత్తాంశమును చూపే గ్రాఫ్ గీయండి.

Solution: (i) Let us take a suitable scale on both the axes (Fig 15.16).

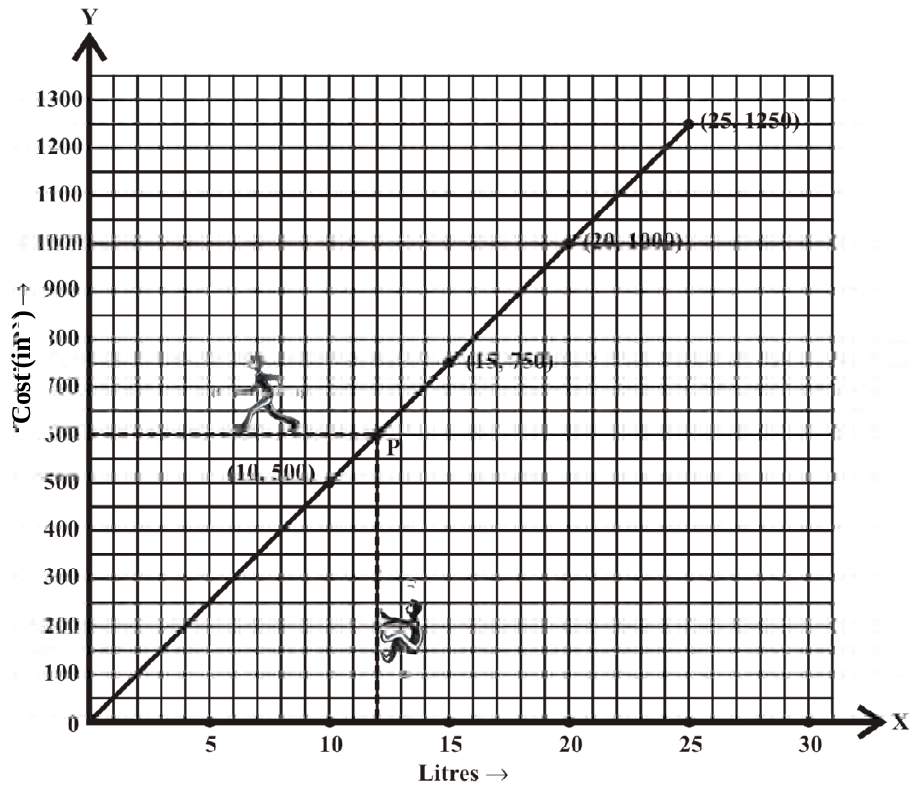


Fig 15.16

(ii) Mark number of litres along the horizontal axis.

(iii) Mark cost of petrol along the vertical axis.

(iv) Plot the points: (10,500), (15,750), (20,1000), (25,1250).

(v) Join the points.

We find that the graph is a line. (It is a linear graph). Why does this graph pass through the origin? Think about it.

This graph can help us to estimate a few things. Suppose we want to find the amount needed to buy 12 litres of petrol. Locate 12 on the horizontal axis.

Follow the vertical line through 12 till you meet the graph at P (say).

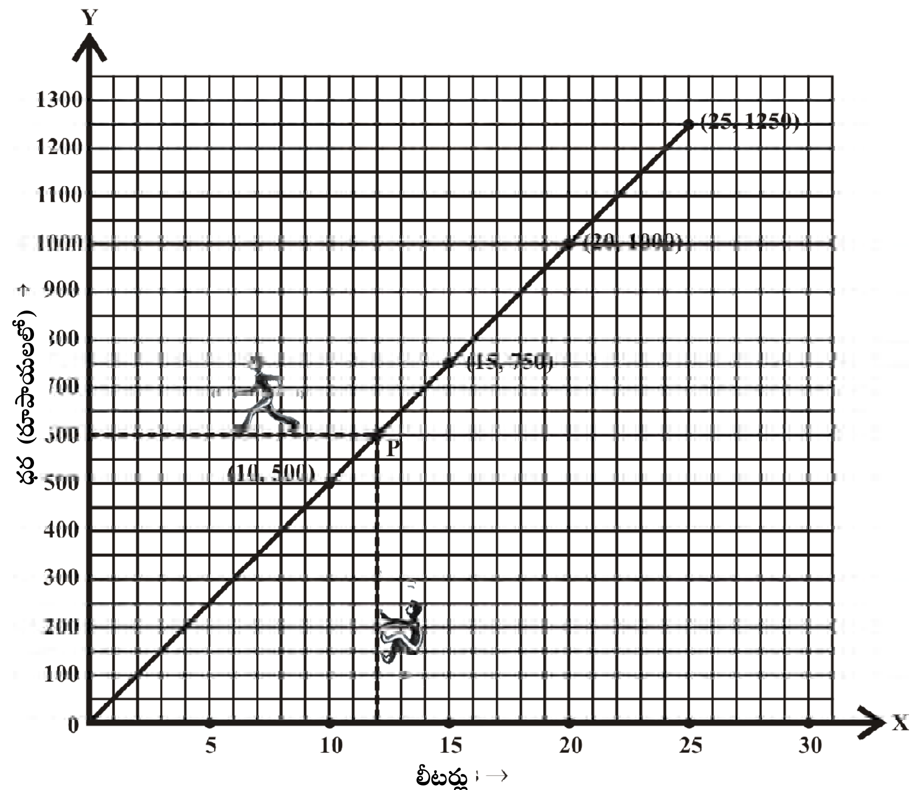
From P you take a horizontal line to meet the vertical axis. This meeting point provides the answer.

This is the graph of a situation in which two quantities, are in direct variation. (How ?). In such situations, the graphs will always be linear.

TRY THESE

In the above example, use the graph to find how much petrol can be purchased for ` 800.

సాధన: (i) రెండు అక్షాలకు సరైన స్కేలు తీసుకుందాం (పటం 15.16).



పటం 15.16

(ii) లీటర్ల సంఖ్యను క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద గుర్తించండి.

(iii) పెట్రోల్ ధరను నిలువు అక్షం మీద గుర్తించండి.

(iv) బిందువులను గుర్తించండి: (10,500), (15,750), (20,1000), (25,1250).

(v) బిందువులను కలపండి.

ఆ గ్రాఫ్ ఒక సరళరేఖ అని మనం కనుగొన్నాము. (ఇది రేఖీయ చిత్రం). ఈ గ్రాఫ్ మూల బిందువు గుండా ఎందుకు పోతుంది? దీని గూర్చి ఆలోచించండి.

ఈ గ్రాఫ్ కొన్ని విషయాలు అంచనావేయడానికి సహాయపడగలదు. 12 లీ॥ పెట్రోలు కొనటానికి చెల్లించవలసిన మొత్తము కనుగొనాలనుకుందాం. x-అక్షంపై 12ను గుర్తించండి.

12 నుండి ఒక నిలువు రేఖను గ్రాఫ్‌ను ఖండించే వరకు గీసి ఖండన బిందువును Pగా గుర్తించండి.

ఈ బిందువు P నుండి ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖను నిలువు అక్షంను ఖండించే వరకు గీయండి. ఈ ఖండన బిందువు జవాబునిస్తుంది.

ఈ గ్రాఫ్ రెండు రాశులు అనులోమానుపాతంలో ఉన్న సందర్భాన్ని సూచించును. (ఎలా?).

ఇటువంటి సందర్భములలో, గ్రాఫ్ ఎల్లప్పుడు రేఖీయం అవుతుంది.

ప్రయత్నించండి

పై ఉదాహరణలో `800కు ఎన్ని లీటర్ల పెట్రోలు కొనగలమో గ్రాఫ్‌ను ఉపయోగించి కనుగొనండి..

Example 7: (Principal and Simple Interest)

A bank gives 10% Simple Interest (S.I.) on deposits by senior citizens. Draw a graph to illustrate the relation between the sum deposited and simple interest earned. Find from your graph

(a) the annual interest obtainable for an investment of ` 250.

(b) the investment one has to make to get an annual simple interest of ` 70.

Solution:

Sum deposited	Simple interest for a year
` 100	$\frac{100 \times 1 \times 10}{100}$ = ` 10
` 200	` $\frac{200 \times 1 \times 10}{100}$ = ` 20
` 300	` $\frac{300 \times 1 \times 10}{100}$ = ` 30
` 500	` $\frac{500 \times 1 \times 10}{100}$ = ` 50
` 1000	` 100

Steps to follow:
1. Find the quantities to be plotted as Deposit and SI.
2. Decide the quantities to be taken on x-axis and on y-axis.
3. Choose a scale.
4. Plot points.
5. Join the points.

We get a table of values.

Deposit (in `)	100	200	300	500	1000
Annual S.I. (in `)	10	20	30	50	100

(i) Scale : 1 unit = ` 100 on horizontal axis; 1 unit = ` 10 on vertical axis.

(ii) Mark Deposits along horizontal axis.

(iii) Mark Simple Interest along vertical axis.

(iv) Plot the points : (100,10), (200, 20), (300, 30), (500,50) etc.

(v) Join the points. We get a graph that is a line (Fig 15.17).

(a) Corresponding to ` 250 on horizontal axis, we get the interest to be ` 25 on vertical axis.

(b) Corresponding to ` 70 on the vertical axis, we get the sum to be ` 700 on the horizontal axis.

TRY THESE

Is Example 7, a case of direct variation?

ఉదాహరణ 7: (అసలు మరియు బారువడ్డీ)

ఒక బ్యాంక్ వయోవృద్ధుల డిపాజిట్లపై 10% బారువడ్డీ (SI) ఇస్తుంది. డిపాజిట్ చేసిన మొత్తము మరియు పొందిన బారువడ్డీల మధ్యగల సంబంధాన్ని చూపే ఒక గ్రాఫ్‌ను గీయండి. ఆ గ్రాఫ్ ద్వారా వీటిని కనుగొనండి.

(a) `250 డిపాజిట్‌కు పొందే వార్షిక వడ్డీ.

(b) ఒక వ్యక్తి `70 వార్షిక బారువడ్డీ పొందడానికి డిపాజిట్ చేయవలసిన మొత్తం.

సాధన:

డిపాజిట్ మొత్తం	ఒక సం॥నికి బారు వడ్డీ
`100	$\frac{100\times1\times10}{100}$ = `10
`200	$\frac{200\times1\times10}{100}$ = `20
`300	$\frac{300\times1\times10}{100}$ = `30
`500	$\frac{500\times1\times10}{100}$ = `50
`1000	`100

అనుసరించాల్సిన సోపానాలు:

1. గ్రాఫ్ మీద గుర్తించవలసిన రాశులైన డిపాజిట్ మరియు బారు వడ్డీలను కనుగొనండి.
2. *x*-అక్షం మరియు *y*-అక్షం మీద తీసుకొను రాశులను గుర్తించండి.
3. సరైన స్కేలు ఎంచుకోండి
4. బిందువులను గుర్తించండి
5. బిందువులను కలపండి.

ఈ విధముగా విలువల పట్టిక పొందుతాం.

డిపాజిట్ (` లలో)	100	200	300	500	1000
సం॥నికి బారువడ్డీ (` లలో)	10	20	30	50	100

(i) స్కేలు : క్షితిజ సమాంతర అక్షంపై 1 యూనిట్ = `100; నిలువు అక్షంపై 1 యూనిట్ = `10

(ii) డిపాజిట్ మొత్తం క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద గుర్తించండి.

(iii) పొందిన బారువడ్డీని నిలువు అక్షం మీద గుర్తించండి.

(iv) బిందువులను గుర్తించండి : (100,10), (200,20), (300,30), (500,50), (1000,100) మొదలగునవి

(v) బిందువులను కలపండి. ఒక సరళరేఖను పొందుతాం (పటం 15.17).

(a) క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద `250కు అనుగుణంగా, నిలువు అక్షం మీద `25 బారువడ్డీని పొందుతాం.

(b) నిలువు అక్షం మీద `70కు అనుగుణంగా, క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద `700 డిపాజిట్ మొత్తాన్ని పొందుతాం.

ప్రయత్నించండి

ఉదాహరణ 7, ఒక అనులోమానుపాతమును చూపే సందర్భం అవుతుందా?

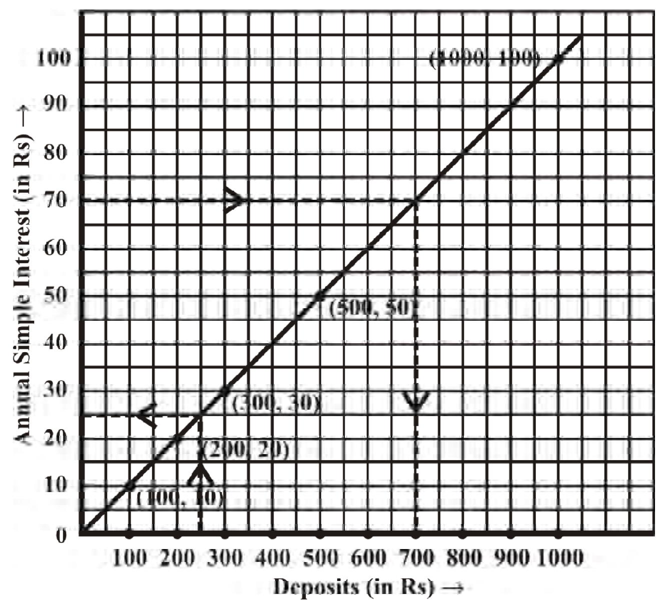


Fig 15.17

Example 8: **(Time and Distance)**

Ajit can ride a scooter constantly at a speed of 30 kms/hour. Draw a time-distance graph for this situation. Use it to find

(i) the time taken by Ajit to ride 75 km. (ii) the distance covered by Ajit in $3\frac{1}{2}$ hours.

Solution:

Hours of ride	Distance covered
1 hour	30 km
2 hours	2 × 30 km = 60 km
3 hours	3 × 30 km = 90 km
4 hours	4 × 30 km = 120 km and so on.

We get a table of values.

Time (in hours)	1	2	3	4
Distance covered (in km)	30	60	90	120

(i) Scale: (Fig 15.18)

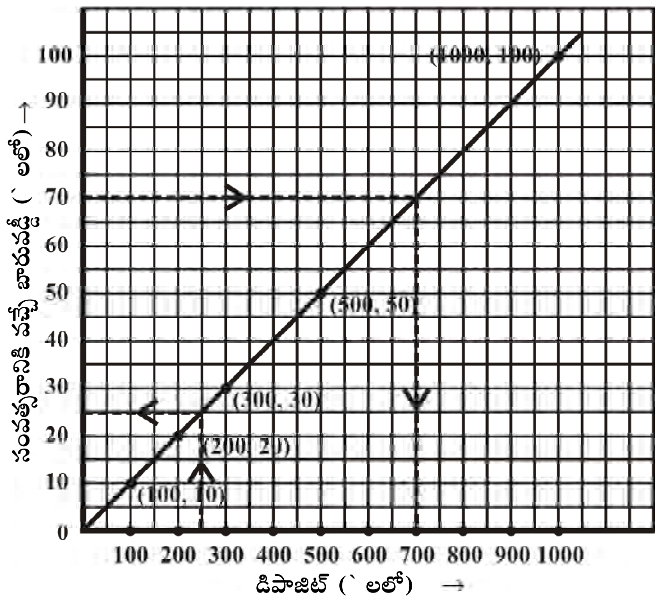
Horizontal: 2 units = 1 hour

Vertical: 1 unit = 10 km

(ii) Mark time on horizontal axis.

(iii) Mark distance on vertical axis.

(iv) Plot the points: (1, 30), (2, 60), (3, 90), (4, 120).



పటం 15.17

ఉదాహరణ 8: (కాలము మరియు దూరము)

అజిత్ స్కూటర్‌ను గంటకు 30 కి.మీ స్థిరవేగంతో నడపగలుగుతాడు. ఈ సందర్భముకు కాలం-దూరం గ్రాఫ్‌ను గీయండి. దీనిని ఉపయోగించి క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

(i) 75కి.మీ ప్రయాణించడానికి అజిత్‌కు పట్టిన సమయం (ii) $3\frac{1}{2}$ గం॥లలో అజిత్ ప్రయాణించిన దూరం.

సాధన:

ప్రయాణించిన గంటలు	ప్రయాణించిన దూరం
1 గంట	30 కి.మీ.
2 గంటలు	2×30 కి.మీ. = 60 కి.మీ.
3 గంటలు	3×30 కి.మీ = 90 కి.మీ
4 గంటలు	4×30 కి.మీ = 120 కి.మీ మొ॥నవి

పట్టికలో విలువలను ఈ విధంగా పొందుతాము.

సమయం (గంటలలో)	1	2	3	4
ప్రయాణించిన దూరం (కి.మీ.)	30	60	90	120

i) స్కేలు : (పటం 15.18)

క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద 2 యూనిట్లు = 1 గంట

నిలువు అక్షం మీద 1 యూనిట్ = 10 కి.మీ

ii) క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద కాలాన్ని గుర్తించండి.

iii) నిలువు అక్షం మీద దూరాన్ని గుర్తించండి.

iv) (1,30), (2,60),(3,90),(4,120) బిందువులను గుర్తించండి.

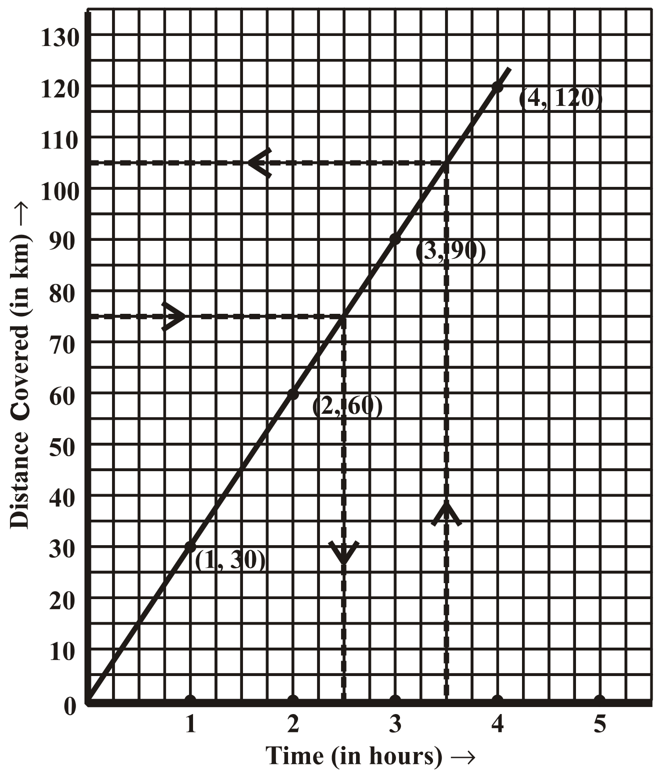


Fig 15.18

(v) Join the points. We get a linear graph.

(a) Corresponding to 75 km on the vertical axis, we get the time to be 2.5 hours on the horizontal axis. Thus 2.5 hours are needed to cover 75 km.

(b) Corresponding to $3\frac{1}{2}$ hours on the horizontal axis, the distance covered is 105 km on the vertical axis.

EXERCISE 15.3

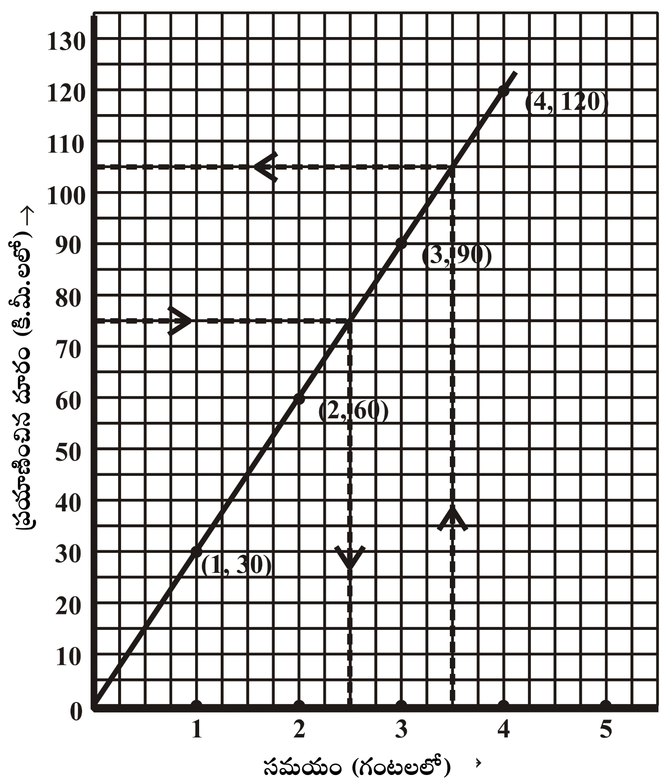
1. Draw the graphs for the following tables of values, with suitable scales on the axes.

(a) Cost of apples

Number of apples	1	2	3	4	5
Cost (in `)	5	10	15	20	25

(b) Distance travelled by a car

Time (in hours)	6 a.m.	7 a.m.	8 a.m.	9 a.m.
Distances (in km)	40	80	120	160



పటం 15.18

(v) బిందువులను కలపండి. మనం ఒక రేఖీయ చిత్రం పొందుతాం.

(a) నిలువు అక్షం మీద 75 కి.మీలకు అనుగుణంగా, క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద 2.5 గంటలు పొందుతాం. కావున 75 కి.మీ దూరం ప్రయాణించటానికి పట్టిన సమయం 2.5 గంటలు.

(b) క్షితిజ సమాంతర అక్షం మీద $3\frac{1}{2}$ గంటలకు అనుగుణంగా, నిలువు అక్షం మీద ప్రయాణించిన దూరం 105 కి.మీ అవుతుంది.

అభ్యాసం 15.3

1. క్రింద ఇచ్చిన పట్టికలో విలువలకు అక్షాల మీద సరైన స్కేలుతో గ్రాఫ్‌లు గీయండి.

(a) ఆపిల్ పండ్ల ధర

ఆపిల్ పండ్ల సంఖ్య	1	2	3	4	5
వెల (` లలో)	5	10	15	20	25

(b) కారు ప్రయాణించిన దూరం

సమయం (గం॥లలో)	6 a.m.	7 a.m.	8 a.m.	9 a.m.
దూరం (కి.మీ.లలో)	40	80	120	160

(i) How much distance did the car cover during the period 7.30 a.m. to 8 a.m?

(ii) What was the time when the car had covered a distance of 100 km since it's start?

(c) Interest on deposits for a year.

Deposit (in `)	1000	2000	3000	4000	5000
Simple Interest (in `)	80	160	240	320	400

(i) Does the graph pass through the origin?

(ii) Use the graph to find the interest on ` 2500 for a year.

(iii) To get an interest of ` 280 per year, how much money should be deposited?

2. Draw a graph for the following.

(i)

Side of square (in cm)	2	3	3.5	5	6
Perimeter (in cm)	8	12	14	20	24

Is it a linear graph?

(ii)

Side of square (in cm)	2	3	4	5	6
Area (in cm^2)	4	9	16	25	36

Is it a linear graph?

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Graphical presentation of data is easier to understand.

2. (i) A **bar graph** is used to show comparison among categories.

(ii) A **pie graph** is used to compare parts of a whole.

(iii) A **Histogram** is a bar graph that shows data in intervals.

3. A **line graph** displays data that changes continuously over periods of time.

4. A line graph which is a whole unbroken line is called a **linear graph**.

5. For fixing a point on the graph sheet we need, ***x*-coordinate** and ***y*-coordinate**.

6. The relation between **dependent variable** and **independent variable** is shown through a graph.

(i) ఉదయం 7.30 గం॥ నుండి ఉదయం 8 గం॥ మధ్య కాలంలో కారు ప్రయాణించిన దూరం ఎంత?

(ii) కారు ప్రయాణం ప్రారంభం అయినప్పటి నుండి 100 కి.మీ దూరం ప్రయాణించుటకు పట్టిన సమయమెంత?

C) డిపాజిట్ల పై సంవత్సర కాలంలో వచ్చు వడ్డీ

డిపాజిట్ (`లలో)	1000	2000	3000	4000	5000
బారువడ్డీ (`లలో)	80	160	240	320	400

(i) గ్రాఫ్ మూలబిందువు గుండా పోతుందా?

(ii) `2500 లకు ఒక సంవత్సరానికి బారు వడ్డీని గ్రాఫ్‌ను ఉపయోగించి కనుగొనండి?

(iii) `280 లకు వార్షిక వడ్డీని పొందటానికి ఎంత డబ్బు డిపాజిట్ చేయాలి?

2. క్రింది వాటికి గ్రాఫ్‌ను గీయండి.

(i)

చతురస్రపు భుజం (సెం.మీ.)	2	3	3.5	5	6
చుట్టుకొలత (సెం.మీ.లలో)	8	12	14	20	24

ఇది రేఖీయ చిత్రమా?

(ii)

చతురస్రపు భుజం (సెం.మీ.)	2	3	4	5	6
వైశాల్యం (చ.సెం.మీ.లో)	4	9	16	25	36

ఇది రేఖీయ చిత్రమా?

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1) సమాచారమును గ్రాఫ్ రూపములో ప్రదర్శించటం వలన సులభంగా అర్థం అగును.

2) i) వివిధ విభాగాల మధ్య పోలికలు చూపటానికి **కమ్మీ రేఖా చిత్రాలను** ఉపయోగిస్తాం.

ii) మొత్తములో భాగాలను పోల్చడానికి **వృత్తరేఖాచిత్రాన్ని** (**పై రేఖాచిత్రం**) ఉపయోగిస్తాం.

iii) అంతరాలలో సమాచారములను సూచించే కమ్మీ రేఖా చిత్రములే **సోపాన రేఖా చిత్రములు.**

3) కాల వ్యవధులకు అనుగుణంగా నిరంతరం మారుతున్న సమాచారాలను సూచించేదే **రేఖీయ చిత్రము.**

4) విభజించబడని పూర్తి సరళరేఖ యొక్క రేఖాచిత్రాన్ని **రేఖీయ చిత్రం** అంటారు.

5) గ్రాఫ్ కాగితం మీద ఒక బిందువును గుర్తించడానికి ***x*-నిరూపకం** మరియు ***y*-నిరూపకం** అవసరం.

6) **ఆధారిత** మరియు **స్వతంత్ర చరరాశుల** మధ్య సంబంధాలను గ్రాఫ్‌ల ద్వారా చూపిస్తాము.

CHAPTER 16

Playing with Numbers

0852CH16

16.1 Introduction

You have studied various types of numbers such as natural numbers, whole numbers, integers and rational numbers. You have also studied a number of interesting properties about them. In Class VI, we explored finding factors and multiples and the relationships among them.

In this chapter, we will explore numbers in more detail. These ideas help in justifying tests of divisibility.

16.2 Numbers in General Form

Let us take the number 52 and write it as

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

Similarly, the number 37 can be written as

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

In general, any two digit number *ab* made of digits *a* and *b* can be written as

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$

What about *ba*? $ba = 10 \times b + a = 10b + a$

Let us now take number 351. This is a three digit number. It can also be written as

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

Similarly $497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

In general, a 3-digit number *abc* made up of digits *a*, *b* and *c* is written as

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

In the same way,

$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$ and so on.

అధ్యాయం 16

సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం

P5X2C7

16.1 పరిచయం

మీరు ఇదివరకే వివిధ రకాల సంఖ్యలైన సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యల గురించి నేర్చుకున్నారు. అదేవిధంగా ఈ సంఖ్యల యొక్క మరికొన్ని ఆసక్తికర ధర్మాలు గురించి కూడా తెలుసుకున్నారు. 6వ తరగతిలో, మనం కారణాంకాలు మరియు గుణిజాలు కనుగొనడం ఇంకా వాటి మధ్య సంబంధాల గురించి తెలుసుకున్నాం.

ఈ అధ్యాయంలో, మనం సంఖ్యల గురించి ఇంకా ఎక్కువ వివరంగా తెలుసుకుందాం. భాజనీయతా సూత్రాలను సమర్థించటానికి ఈ విషయాలు మనకు సహాయపడుతాయి.

16.2 సంఖ్యల విస్తరణ రూపం

52 అను సంఖ్యను తీసుకుందాం. దానిని ఈ విధంగా రాయవచ్చు

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

అదేవిధంగా, 37ను ఈ విధంగా రాయవచ్చు

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

సాధారణంగా, a మరియు b అంకెలతో ఏర్పడిన ఏదైనా రెండు అంకెల సంఖ్య ab ను ఈ క్రింది విధంగా రాయవచ్చు,

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$

ba గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? $\quad ba = 10 \times b + a = 10b + a$

ఇప్పుడు మనం మూడంకెల సంఖ్య 351ని తీసుకుందాం. దానిని ఈ విధంగా రాయవచ్చు.

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

అదేవిధంగా, $\quad 497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

సాధారణంగా, a, b మరియు c లతో ఏర్పడిన 3–అంకెల సంఖ్య abc ను ఈ విధంగా రాస్తాము.

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

అదేవిధంగా, $\quad cab = 100c + 10a + b$

$bca = 100b + 10c + a$ మొదలైనవి.

TRY THESE

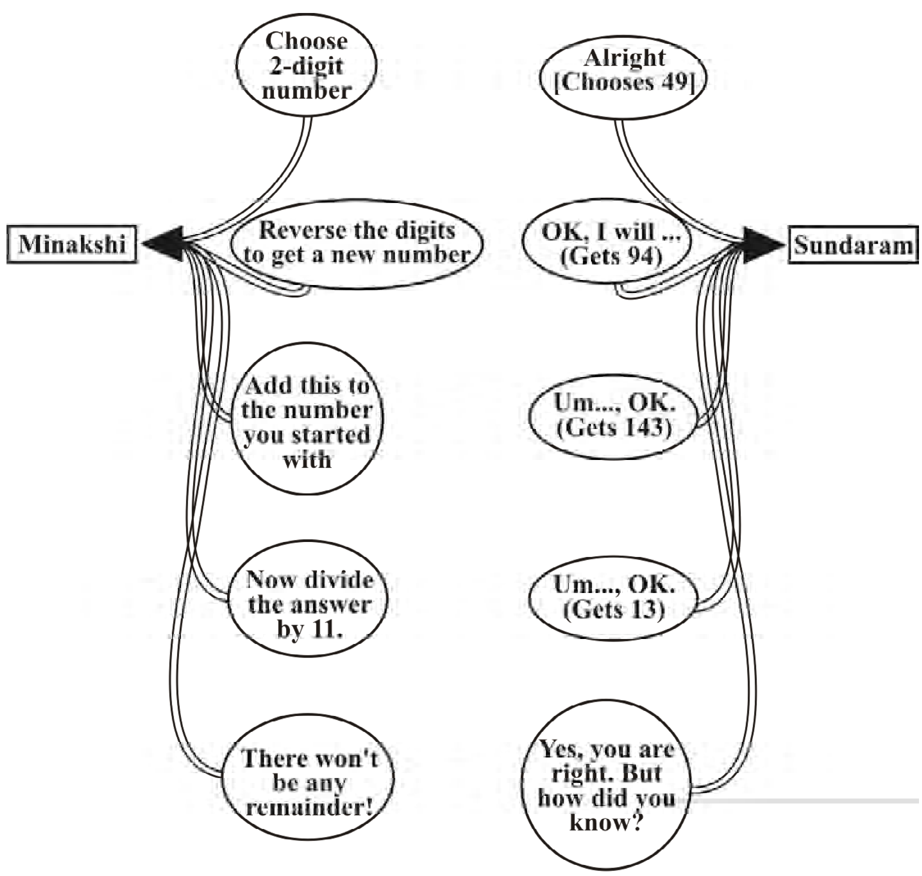
1. Write the following numbers in generalised form.
   (i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302
2. Write the following in the usual form.
   (i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100 \times a + 10 \times c + b$

16.3 Games with Numbers

(i) **Reversing the digits – two digit number**

Minakshi asks Sundaram to think of a 2-digit number, and then to do whatever she asks him to do, to that number. Their conversation is shown in the following figure. **Study the figure carefully before reading on**.

Conversations between Minakshi and Sundaram: First Round ...



It so happens that Sundaram chose the number 49. So, he got the reversed number 94; then he added these two numbers and got $49 + 94 = 143$. Finally he divided this number by 11 and got $143 \div 11 = 13$, with no remainder. This is just what Minakshi had predicted.

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది వాటిని విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

   (i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302

2. క్రింది వాటిని సామాన్య రూపంలో రాయండి.

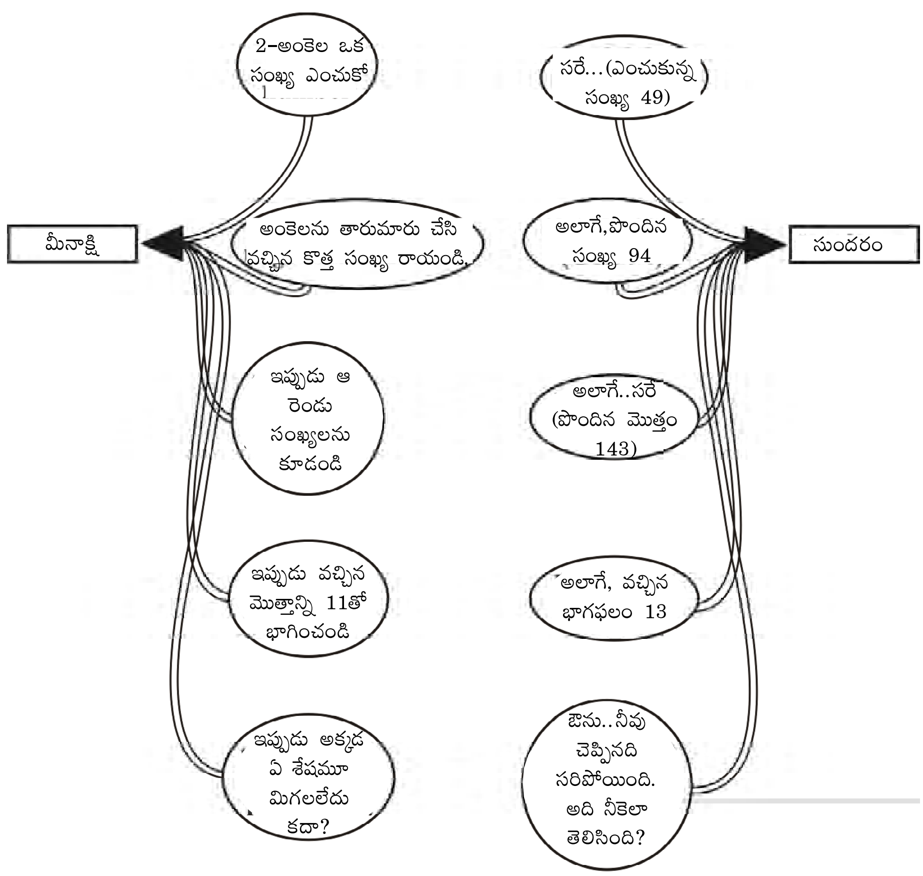
   (i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100 \times a + 10 \times c + b$

16.3 సంఖ్యలతో ఆటలు

(i) రెండంకెల సంఖ్యలో – అంకెలను తారుమారు చేయడం

మీనాక్షి సుందరంను ఒక 2–అంకెల సంఖ్యను మనస్సులో తలచుకోమని చెప్పింది. తర్వాత ఆ సంఖ్యను ఆమె చెప్పినట్లుగా చేయమని చెప్పింది. వారిద్దరి సంభాషణను క్రింది చిత్రంలో ఇవ్వబడింది. **చదవడానికి ముందు చిత్రాన్ని జాగ్రత్తగా గమనించండి.**

మీనాక్షి మరియు సుందరం మధ్య సంభాషణ: (మొదటి రౌండ్)



అదెలా అయిందంటే, సుందరం ఎంచుకొన్న సంఖ్య 49. అంకెలను తారుమారు చేసినప్పుడు లభించిన సంఖ్య 94; వాటిని కూడినప్పుడు లభించిన సంఖ్య $49 + 94 = 143$. చివరకు దీనిని అతడు 11చే భాగించినప్పుడు $143 \div 11 = 13$ మరియు శేషం మిగలలేదు. దీనినే మీనాక్షి ఊహించింది.

TRY THESE

Check what the result would have been if Sundaram had chosen the numbers shown below.

1. 27 2. 39 3. 64 4. 17

Now, let us see if we can **explain** Minakshi's "trick".

Suppose Sundaram chooses the number *ab*, which is a short form for the 2-digit number $10a + b$. On reversing the digits, he gets the number $ba = 10b + a$. When he adds the two numbers he gets:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11\,(a + b).$$

So, the sum is always a multiple of 11, just as Minakshi had claimed.

Observe here that if we divide the sum by 11, the quotient is $a + b$, which is exactly the sum of the digits of chosen number *ab*.

You may check the same by taking any other two digit number.

The game between Minakshi and Sundaram continues!

Minakshi: Think of another 2-digit number, but don't tell me what it is.

Sundaram: Alright.

Minakshi: Now reverse the digits of the number, and *subtract* the smaller number from the larger one.

Sundaram: I have done the subtraction. What next?

Minakshi: Now divide your answer by 9. I claim that there will be no remainder!

Sundaram: Yes, you are right. There is indeed no remainder! But this time I think I know how you are so sure of this!

In fact, Sundaram had thought of 29. So his calculations were: first he got the number 92; then he got 92 – 29 = 63; and finally he did (63 ÷ 9) and got 7 as quotient, with no remainder.

TRY THESE

Check what the result would have been if Sundaram had chosen the numbers shown below.

1. 17 2. 21 3. 96 4. 37

Let us see how Sundaram explains Minakshi's second "trick". (Now he feels confident of doing so!)

Suppose he chooses the 2-digit number $ab = 10a + b$. After reversing the digits, he gets the number $ba = 10b + a$. Now Minakshi tells him to do a subtraction, the smaller number from the larger one.

- If the tens digit is larger than the ones digit (that is, $a > b$), he does:

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b).$$

ప్రయత్నించండి

సుందరం క్రింది సంఖ్యలను ఎంచుకొని ఉన్నచో ఫలితం ఏమయ్యేదో పరీక్షించండి.

1. 27 2. 39 3. 64 4. 17

ఇప్పుడు, మనం మీనాక్షి ఉపయోగించిన "ట్రిక్" ని **వివరిద్దాం.**

సుందరం ఎంచుకొన్న రెండంకెల సంఖ్య ab అనుకోండి. ఇది రెండంకెలసంఖ్య $10a + b$ యొక్క సూక్ష్మ రూపం. దాని అంకెలను తారుమారు చేసినప్పుడు లభించిన సంఖ్య $ba = 10b + a$. అతడు, ఈ రెండు సంఖ్యలను కూడినప్పుడు

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11\ (a + b).$$

ఈ విధంగా, మొత్తం ఎల్లప్పుడూ మీనాక్షి ప్రతిపాదించినట్లుగా 11 యొక్క గుణిజమే అవుతుంది.

ఇక్కడ మరొక అంశాన్ని మనం గమనించవచ్చు. మనం ఈ మొత్తాన్ని 11చే భాగించినచో వచ్చు బాగఫలం $a + b$, ఇది ఖచ్చితంగా మనం ఎంచుకొన్న సంఖ్య ab యొక్క అంకెల మొత్తం.
మీరు దీనిని వేరే ఏదైనా రెండంకెల సంఖ్య తీసుకొని పరీక్షించవచ్చు.
మీనాక్షి మరియు సుందరంల మధ్య ఈ ఆట కొనసాగుతుంది!

మీనాక్షి : ఇప్పుడు మరొక 2 అంకెల సంఖ్య మనస్సులో తలచుకో. అయితే దానిని నాకు చెప్పవద్దు.

సుందరం : సరే... అలాగే

మీనాక్షి : ఇప్పుడు అంకెలను తారుమారు చేసి, పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్నసంఖ్యను తీసివేయుము.

సుందరం : తీసివేశాను. తరువాత ఏమిటి?

మీనాక్షి : ఇప్పుడు నీవు పొందిన జవాబును 9 చే భాగించు. నేను ఖచ్చితంగా చెప్పగలను. అక్కడ ఎటువంటి శేషం మిగలలేదు!

సుందరం : అరే! ఔను. ఎటువంటి శేషం మిగలలేదు! నీవు ఇంత ఖచ్చితంగా ఎలా చెప్పగలిగావు!

నిజంగా, సుందరం ఆలోచించిన సంఖ్య 29. అతని లెక్క ఇలావుంది. మొదటగా అంకెలను తారుమారుచేసినప్పుడు వచ్చిన సంఖ్య 92; తరువాత పొందినది $92 - 29 = 63$; చివరకు అతడు $63 \div 9$ చేసినప్పుడు పొందిన భాగఫలం 7 మరియు శేషం ఏమీ మిగలలేదు.

ప్రయత్నించండి

సుందరం కింది సంఖ్యలను ఎంచుకొనియున్నచో ఫలితం ఏమయ్యేదో సరిచూడండి.

1. 17 2. 21 3. 96 4. 37

ఇప్పుడు సుందరం మీనాక్షి యొక్క రెండవ "ట్రిక్" ని ఎలా వివరిస్తున్నాడో చూద్దాం. (ఇప్పుడు సుందరం దీనిని వివరించేటంత ఆత్మవిశ్వాసం పొందాడు!)

సుందరం ఎందుకొన్న రెండంకెల సంఖ్య ab అయినచో $ab = 10a + b$. అంకె తారుమారు చేసినప్పుడు లభించిన సంఖ్య $ba = 10b + a$. ఇప్పుడు మీనాక్షి అతనిని పెద్ద సంఖ్యనుండి చిన్న సంఖ్య తీసివేయమని చెప్పినప్పుడు,

- పదుల స్థానంలోని అంకె ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె కన్నా పెద్దదయినప్పుడు (అనగా $a > b$)

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b)$$ గా చేశాడు.

- If the ones digit is larger than the tens digit (that is, $b > a$), he does:

  $(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a)$.
- And, of course, if $a = b$, he gets 0.

In each case, the resulting number is divisible by 9. So, the remainder is 0. Observe here that if we divide the resulting number (obtained by subtraction), the quotient is $a - b$ or $b - a$ according as $a > b$ or $a < b$. You may check the same by taking any other two digit numbers.

(ii) **Reversing the digits – three digit number**.

Now it is Sundaram's turn to play some tricks!

Sundaram: Think of a 3-digit number, but don't tell me what it is.

Minakshi: Alright.

Sundaram: Now make a new number by putting the digits in reverse order, and subtract the smaller number from the larger one.

Minakshi: Alright, I have done the subtraction. What next?

Sundaram: Divide your answer by 99. I am sure that there will be no remainder!

In fact, Minakshi chose the 3-digit number 349. So she got:

- Reversed number: 943;
- Difference: $943 - 349 = 594$;
- Division: $594 \div 99 = 6$, with no remainder.

TRY THESE

Check what the result would have been if Minakshi had chosen the numbers shown below. In each case keep a record of the quotient obtained at the end.

1. 132
2. 469
3. 737
4. 901

Let us see how this trick works.

Let the 3-digit number chosen by Minakshi be $abc = 100a + 10b + c$.

After reversing the order of the digits, she gets the number $cba = 100c + 10b + a$. On subtraction:

- If $a > c$, then the difference between the numbers is

  $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$

  $= 99a - 99c = 99(a - c)$.
- If $c > a$, then the difference between the numbers is

  $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a)$.
- And, of course, if $a = c$, the difference is 0.

In each case, the resulting number is divisible by 99. So the remainder is 0. Observe that quotient is $a - c$ or $c - a$. You may check the same by taking other 3-digit numbers.

(iii) **Forming three-digit numbers with given three-digits**.

Now it is Minakshi's turn once more.

- ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె పదుల స్థానంలోని అంకె కంటె పెద్దదిగా ఉన్నప్పుడు (అనగా $b > a$),

$$(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a) \text{ గా చేసాడు.}$$

- $a = b$ అయినప్పుడు అతడు పొందినది 0.

ప్రతీ సందర్భంలో జవాబు 9చే భాగించబడుతుంది. అందువలన శేషం 0. ఫలిత సంఖ్య తీసివేయగా వచ్చిన సంఖ్యను 9చే భాగించినచో $a > b$ లేదా $a < b$ అనే దాని ఆధారంగా భాగఫలం $a - b$ లేదా $b - a$ అవుతుందని గమనించవచ్చు. మీరు ఏవైనా ఇతర రెండంకెల సంఖ్యను తీసుకొని దీనిని పరీక్షించవచ్చును.

(ii) **మూడంకెల సంఖ్య యొక్క అంకెలను తిప్పి (వెనుక నుంచి ముందుకు) సంఖ్య రాయడం:**

ఇప్పుడు సుందరం కొన్ని ట్రిక్కులను ఎలా ఉపయోగించారో చూద్దాం!

సుందరం : 3 అంకెల ఒక సంఖ్యను తలచుకో, అయితే అది ఏ సంఖ్యో నాకు చెప్పవద్దు.

మీనాక్షి : అలాగే.

సుందరం : ఇప్పుడు ఆ సంఖ్య లోని అంకెలను తిప్పి రాసిన మరొక సంఖ్య వస్తుంది. వాటిలో పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసివేయుము.

మీనాక్షి : సరే, తీసేశాను. తరువాత ఏమి చేయాలి?

సుందరం : నీవు పొందిన జవాబును 99 చే భాగించు. ఖచ్చితంగా చెప్పగలను. అక్కడ ఏ శేషమూ మిగలదు! నిజంగా మీనాక్షి ఎంచుకొన్న 3-అంకెల సంఖ్య 349. కనుక ఆమె ఈవిధమైన ఫలితాలను పొందినది.

- సంఖ్యను తిప్పి రాసినప్పుడు లభించిన సంఖ్య 943;
- తీసివేసినప్పుడు లభించిన తేడా $943 - 349 = 594$;
- భాగించినప్పుడు $594 \div 99 = 6$, శేషం మిగలలేదు.

వీటిని ప్రయత్నించండి

మీనాక్షి కింది సంఖ్యలను ఎంచుకొన్నచో ఫలితం ఏమయ్యేదో సరిచూడండి. ప్రతి సందర్భంలో లభించిన భాగఫలాలను నమోదుచేయండి.

1. 132
2. 469
3. 737
4. 901

మనం ఈ ట్రిక్ ఎలా ఉపయోగించాలో చూద్దాం

మీనాక్షి ఎంచుకొన్న 3-అంకెల సంఖ్య abc అయినచో $abc = 100a + 10b + c$.

అంకెలను తిప్పి రాసినప్పుడు ఆమె పొందిన సంఖ్య $cba = 100c + 10b + a$. వీటి మధ్య భేదం కనుగొనిన

- $a > c$ అయినచో అప్పుడు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
$$= 99a - 99c = 99(a - c).$$

- $c > a$ అయినచో అప్పుడు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a).$$

- $a = c$ అయిన, అప్పుడు సంఖ్యల మధ్య వ్యత్యాసం 0.

ప్రతి సందర్భంలో, ఫలిత సంఖ్య 99చే భాగించబడుతుంది. అందువలన శేషం 0 అవుతుంది. ఇక్కడ భాగఫలం $a - c$ లేదా $c - a$ అయివుంటుందని గమనించవచ్చు.

(iii) **ఇచ్చిన మూడంకెలతో 3 అంకెల సంఖ్య రాయడం.**

ఇప్పుడు తిరిగి మరొకసారి మీనాక్షి వంతు.

Minakshi: Think of any 3-digit number.

Sundaram: Alright, I have done so.

Minakshi: Now use this number to form two more 3-digit numbers, like this: if the number you chose is *abc*, then

- 'the first number is *cab* (i.e., with the ones digit shifted to the "left end" of the number);
- the other number is *bca* (i.e., with the hundreds digit shifted to the "right end" of the number).

Now add them up. Divide the resulting number by 37. I claim that there will be no remainder.

Sundaram: Yes. You are right!

In fact, Sundaram had thought of the 3-digit number 237. After doing what Minakshi had asked, he got the numbers 723 and 372. So he did:

$$\begin{array}{rr} & 2\ 3\ 7 \\ + & 7\ 2\ 3 \\ + & 3\ 7\ 2 \\ \hline & 1\ 3\ 3\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Form all possible 3-digit numbers using all the digits 2, 3 and 7 and find their sum. Check whether the sum is divisible by 37! Is it true for the sum of all the numbers formed by the digits *a*, *b* and *c* of the number *abc*?

Then he divided the resulting number 1332 by 37:

$$1332 \div 37 = 36, \quad \text{with no remainder.}$$

TRY THESE

Check what the result would have been if Sundaram had chosen the numbers shown below.

1. 417 2. 632 3. 117 4. 937

Will this trick always work?

Let us see.

$$abc = 100a + 10b + c$$
$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a$$
$$abc + cab + bca = 111(a + b + c)$$
$$= 37 \times 3(a + b + c), \text{ which is divisible by } 37$$

16.4 Letters for Digits

Here we have puzzles in which letters take the place of digits in an arithmetic 'sum', and the problem is to find out which letter represents which digit; so it is like cracking a code. Here we stick to problems of addition and multiplication.

మీనాక్షి : ఏదైనా ఒక 3-అంకెల సంఖ్యను తలచుకో.

సుందరం : అలాగే తలచుకున్నాను.

మీనాక్షి : ఇప్పుడు ఈ 3 అంకెలను ఉపయోగించి మళ్ళీ రెండు మూడంకెల సంఖ్యలు రాయాలి, ఎలాగనగా నీవు ఎంచుకొన్న సంఖ్య *abc* అయినచో, అప్పుడు

- మొదటి సంఖ్య *cab* (అనగా ఒకట్ల స్థానంలో అంకె "ఎడమవైపు చివరన" చేర్చగా)
- మరొక సంఖ్య *bca* (అనగా వందల స్థానంలో అంకె "కుడివైపు చివరన" చేర్చగా)

ఈ మూడు సంఖ్యలను కూడండి.వచ్చిన మొత్తాన్ని 37 చే భాగించండి. అక్కడ ఎటువంటి శేషం మిగలదని నేను ఖచ్చితంగా చెప్పగలను.

సుందరం : ఔను. నీవు చెప్పింది సరిగ్గా ఉంది!

నిజంగా, సుందరం ఎంచుకొన్న 3-అంకెలసంఖ్య 237. మీనాక్షి చెప్పినట్లుగా చేసిన తరువాత అతడు పొందిన సంఖ్యలు 723 మరియు 372. వాటి మొత్తం కూడినపుడు:

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 7 \\ +\ \ 7\ 2\ 3 \\ +\ \ 3\ 7\ 2 \\ \hline 1\ 3\ 3\ 2 \\ \hline \end{array}$$

2, 3 మరియు 7 అంకెలను ఉపయోగించి వీలైన అన్ని మూడంకెలు సంఖ్యలను రాసి, వాటి మొత్తం కనుగొనుము. మొత్తం 37 తో భాగించబడుతుందా సరిచూడండి. సంఖ్య abc లోని అంకెలు a,b మరియు c లను ఉపయోగించి రాసిన అన్ని సంఖ్యల మొత్తానికి ఇది నిజమేనా?

మొత్తం 1332ను అతడు 37చే భాగించినప్పుడు:

$1332 \div 37 = 36$, శేషం మిగలలేదు.

ప్రయత్నించండి

సుందరం క్రింది సంఖ్యలు ఎంచుకొని వున్నచో ఫలితం ఏమయ్యేదో సరిచూడండి.

1. 417 2. 632 3. 117 4. 937

ఈ చిట్కా అన్నివేళలా పనిచేస్తుందా? చూద్దాం

$$abc = 100a + 10b + c$$

$$cab = 100c + 10a + b$$

$$bca = 100b + 10c + a$$

$$abc + cab + bca = 111(a + b + c)$$

$= 37 \times 3(a + b + c)$, ఇది 37చే భాగించబడుతుంది.

16.4 అంకెలకు బదులుగా అక్షరాలు

అంకగణిత 'సంకలన' సమస్యలలో అంకెకు బదులుగా అక్షరాలు వాడినటువంటి పజిల్స్ మరియు ఏ అక్షరం ఏ అంకెను తెలియజేస్తుందో కనుగొనడమే ఇక్కడ సమస్య. కావున ఇది ఒకరకంగా సంకేతం (కోడ్)ను ఛేదించడం వంటిది. ఇచ్చట మనం సంకలనం మరియు గుణకారం సమస్యలకు మాత్రమే పరిమితం అవుతున్నాం.

Here are two rules we follow while doing such puzzles.

1. *Each letter in the puzzle must stand for just one digit. Each digit must be represented by just one letter.*
2. *The first digit of a number cannot be zero.* Thus, we write the number "sixty three" as 63, and not as 063, or 0063.

A rule that we would *like* to follow is that the puzzle must have just one answer.

Example 1: Find Q in the addition.

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 1 & Q \\ + & 1 & Q & 3 \\ \hline & 5 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Solution:

There is just one letter Q whose value we have to find.

Study the addition in the ones column: from Q + 3, we get '1', that is, a number whose ones digit is 1.

For this to happen, the digit Q should be 8. So the puzzle can be solved as shown below.

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 1 & 8 \\ + & 1 & 8 & 3 \\ \hline & 5 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

That is, Q = 8

Example 2: Find A and B in the addition.

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ + & & A \\ + & & A \\ \hline & B & A \\ \hline \end{array}$$

Solution: This has *two* letters A and B whose values are to be found.

Study the addition in the ones column: the sum of *three* A's is a number whose ones digit is A. Therefore, the sum of *two* A's must be a number whose ones digit is 0.

This happens only for A = 0 and A = 5.

If A = 0, then the sum is 0 + 0 + 0 = 0, which makes B = 0 too. We do not want this (as it makes A = B, and then the tens digit of BA too becomes 0), so we reject this possibility. So, A = 5.

Therefore, the puzzle is solved as shown below.

$$\begin{array}{ccc} & & 5 \\ + & & 5 \\ + & & 5 \\ \hline & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

That is, A = 5 and B = 1.

ఇటువంటి పజిల్స్ సాధించటానికి రెండు నియమాలు ఇక్కడ ఇవ్వబడినవి.

1. *సమస్య లోని ప్రతి అక్షరం ఒక అంకెను మాత్రమే సూచించాలి మరియు ప్రతి అంకె కూడా ఒక అక్షరంను మాత్రమే సూచించాలి.*
2. *సంఖ్యలోని మొదటి అంకె సున్నా అయి ఉండకూడదు.* అనగా, "అరవైమూడు" అను సంఖ్యను 63 అని రాయాలే తప్ప, 063 లేదా 0063 అని రాయకూడదు.

ప్రతి పజిల్‌కు ఒకే ఒక్క సమాధానం మాత్రమే ఉంటుంది అనే నియమాన్ని పాటిస్తాము.

ఉదాహరణ 1: క్రింది సంకలనంలో Q విలువను కనుగొనుము.

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ Q \\ +\ 1\ Q\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

సాధన:

ఈ సమస్యలో మనం Q అనే ఒకే ఒక అక్షరం విలువను మాత్రమే కనుగొనాల్సి ఉంది. ఈ కూడిక సమస్యలో ఒకట్ల స్థానంలోని వరుసను పరిశీలించండి. Q + 3 విలువ 1కి సమానం కావాలి. అనగా సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 1.

ఇది సాధ్యం కావడానికి, Q విలువ 8 అయివుండాలి. కావున ఈ సమస్య క్రింది విధంగా సాధించబడింది.

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 8 \\ +\ 1\ 8\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

అనగా, Q = 8

ఉదాహరణ 2: క్రింది సంకలనంలో A మరియు B విలువలను కనుగొనండి.

$$\begin{array}{r} A \\ +\ A \\ +\ A \\ \hline B\ \ A \\ \hline \end{array}$$

సాధన: ఇక్కడ A మరియు B అను *రెండు* అక్షరాల విలువలు కనుగొనాల్సి ఉంది.

ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకెల మొత్తాన్ని గమనించండి. మూడు Aల మొత్తం ఒకట్ల స్థానంలో గల A ని ఇస్తుంది. అనగా, రెండు Aల మొత్తం ఒకట్ల స్థానంలో 0 ను ఇవ్వాలి. అది A= 0 అయినప్పుడు మరియు A = 5 అయినప్పుడు మాత్రమే సాధ్యం. A = 0 అయినప్పుడు 0+0+0 = 0. అప్పుడు B కూడా 0 అవుతుంది. మనం దీన్ని కోరుకోము. (ఎందుకనగా A=B అయితే, BA యొక్క పదుల స్థానంలో కూడా సున్న అగును), కావున దీనిని మనం తిరస్కరిస్తాం. కావున, A = 5.

అందువలన, ఈ పజిల్‌ను క్రిందివిధంగా సాధించవచ్చు.

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ +\ 5 \\ \hline 1\ \ 5 \\ \hline \end{array}$$

అనగా, A = 5 మరియు B = 1.

Example 3: Find the digits A and B.

$$\begin{array}{rrr} & \text{B} & \text{A} \\ \times & \text{B} & 3 \\ \hline 5 & 7 & \text{A} \\ \hline \end{array}$$

Solution:

This also has two letters A and B whose values are to be found.
Since the ones digit of $3 \times \text{A}$ is A, it must be that A = 0 or A = 5.

Now look at B. If B = 1, then BA × B3 would *at most* be equal to 19×19; that is, it would at most be equal to 361. But the product here is 57A, which is more than 500. So we cannot have B = 1.

If B = 3, then BA × B3 would be more than 30×30; that is, more than 900. But 57A is less than 600. So, B can not be equal to 3.

Putting these two facts together, we see that B = 2 only. So the multiplication is either 20×23, or 25×23.

The first possibility fails, since $20 \times 23 = 460$. But, the second one works out correctly, since $25 \times 23 = 575$.

So the answer is A = 5, B = 2.

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 5 & 7 & 5 \\ \hline \end{array}$$

DO THIS

Write a 2-digit number *ab* and the number obtained by reversing its digits i.e., *ba*. Find their sum. Let the sum be a 3-digit number *dad*

$$\text{i.e.,} \quad ab + ba = dad$$
$$(10a + b) + (10b + a) = dad$$
$$11(a + b) = dad$$

The sum $a + b$ can not exceed 18 (Why?).

Is *dad* a multiple of 11?

Is *dad* less than 198?

Write all the 3-digit numbers which are multiples of 11 upto 198.

Find the values of *a* and *d*.

EXERCISE 16.1

Find the values of the letters in each of the following and give reasons for the steps involved.

1.
$$\begin{array}{rrr} & 3 & \text{A} \\ + & 2 & 5 \\ \hline & \text{B} & 2 \\ \hline \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rrr} & 4 & \text{A} \\ + & 9 & 8 \\ \hline \text{C} & \text{B} & 3 \\ \hline \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rr} 1 & \text{A} \\ \times & \text{A} \\ \hline 9 & \text{A} \\ \hline \end{array}$$

ఉదాహరణ 3: A మరియు B అంకెల విలువలను కనుగొనండి.

$$\begin{array}{r} B\ A \\ \times\ B\ 3 \\ \hline 5\ 7\ A \\ \hline \end{array}$$

సాధన:

ఇక్కడ కూడా మనం A మరియు B అను రెండు అక్షరాల విలువలను కనుగొనాల్సి ఉంది.
ఇక్కడ ఒకట్లస్థానం $3 \times A$ ల లబ్ధము A, అని ఇవ్వడం వలన A = 0 లేదా A = 5 అయివుండాలి.

ఇప్పుడు Bని గమనిద్దాం. B =1 అయినప్పుడు BA × B3 అనునది గరిష్ఠంగా 19 × 19 కావచ్చు. వీటి లబ్ధం విలువ 361 అవుతుంది. కాని జవాబు 57A కావాలి. అనగా అది 500 కంటె ఎక్కువ. అందువలన B = 1 సాధ్యం కాదు.

B = 3 అయినప్పుడు BA × B3 అనునది 30 × 30 కంటే ఎక్కువ కావచ్చు. అనగా 900 కంటే ఎక్కువ అవుతుంది. ఇది 57A కంటే చాలా ఎక్కువ అనగా B విలువ 3 కాదు.
ఈ రెండు అంశాలను గమనించినప్పుడు B = 2 మాత్రమే కావచ్చు. అపుడు వీటి లబ్ధం 20×23 లేదా 25×23 కావచ్చు.

మొదటిది సాధ్యం కాదు ఎందుకనగా 20×23 = 460. అయితే, రెండవది ఇచ్చిన సమస్యకు సరిపోతుంది. ఎందుకనగా 25×23 = 575

అందువలన జవాబు A= 5, B = 2.

$$\begin{array}{r} 2\ \ 5 \\ \times\ 2\ \ 3 \\ \hline 5\ \ 7\ \ 5 \\ \hline \end{array}$$

ఇవి చేయండి

ఒక రెండంకెల సంఖ్య *ab* రాయండి. వాటి అంకెలను తారుమారు చేసి రాసినప్పుడు వచ్చు సంఖ్య *ba* వీటిని కూడినప్పుడు వచ్చిన మొత్తం 3 అంకెల సంఖ్య *dad* అనుకుందాం.

అనగా $ab + ba = dad$

$$(10a + b) + (10b + a) = dad$$

$$11(a + b) = dad$$

$a + b$ మొత్తం 18 కంటే ఎక్కువగా ఉండకూడదు (ఎందుకు?)

dad అనునది 11 యొక్క గుణిజం అవుతుందా?

dad అనునది 198 కంటే తక్కువగా ఉంటుందా?

198 వరకు గల 11 యొక్క గుణిజాలైన 3 అంకెల సంఖ్యలన్నింటిని రాయండి.

a మరియు *d* ల విలువలను కనుగొనండి.

అభ్యాసం 16.1

కింది వాటిలో ఆంగ్ల అక్షరాలతో సూచించిన ప్రతి అక్షరం విలువ కనుగొనండి. సాధనలో సోపానాలను కారణాలతో సహా వివరించండి.

1. $\begin{array}{r} 3\ \ A \\ +\ 2\ \ 5 \\ \hline B\ \ 2 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 4\ \ A \\ +\ 9\ \ 8 \\ \hline C\ \ B\ \ 3 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 1\ \ A \\ \times\ \ A \\ \hline 9\ \ A \\ \hline \end{array}$

4.
$$\begin{array}{rcc} & A & B \\ + & 3 & 7 \\ \hline & 6 & A \\ \hline \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & \times & 3 \\ \hline C & A & B \\ \hline \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & \times & 5 \\ \hline C & A & B \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & \times & 6 \\ \hline B & B & B \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rcc} & A & 1 \\ + & 1 & B \\ \hline & B & 0 \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rccc} & 2 & A & B \\ + & A & B & 1 \\ \hline & B & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & A \\ + & 6 & A & B \\ \hline & A & 0 & 9 \\ \hline \end{array}$$

16.5 Tests of Divisibility

In Class VI, you learnt how to check divisibility by the following divisors.

10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11.

You would have found the tests easy to do, but you may have wondered at the same time *why* they work. Now, in this chapter, we shall go into the "why" aspect of the above.

16.5.1 Divisibility by 10

This is certainly the easiest test of all! We first look at some multiples of 10.

10, 20, 30, 40, 50, 60, ... ,

and then at some non-multiples of 10.

13, 27, 32, 48, 55, 69,

From these lists we see that if the ones digit of a number is 0, then the number is a multiple of 10; and if the ones digit is *not* 0, then the number is *not* a multiple of 10. So, we get a test of divisibility by 10.

Of course, we must not stop with just stating the test; we must also explain *why* it "works". That is not hard to do; we only need to remember the rules of place value. Take the number. ... cba; this is a short form for

$$\ldots + 100c + 10b + a$$

Here a is the one's digit, b is the ten's digit, c is the hundred's digit, and so on. The dots are there to say that there may be more digits to the left of c.

Since 10, 100, ... are divisible by 10, so are $10b$, $100c$, ... And as for the number a is concerned, it must be a divisible by 10 if the given number is divisible by 10. This is possible only when $a = 0$.

Hence, a number is divisible by 10 when its one's digit is 0.

16.5.2 Divisibility by 5

Look at the multiples of 5.

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50,

4. $\begin{array}{r} A\ B \\ +\ 3\ 7 \\ \hline 6\ A \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ \ 3 \\ \hline C\ A\ B \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ \ 5 \\ \hline C\ A\ B \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ \ 6 \\ \hline B\ B\ B \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} A\ 1 \\ +\ 1\ B \\ \hline B\ 0 \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 2\ A\ B \\ +\ A\ B\ 1 \\ \hline B\ 1\ 8 \\ \hline \end{array}$

10. $\begin{array}{r} 1\ 2\ A \\ +\ 6\ A\ B \\ \hline A\ 0\ 9 \\ \hline \end{array}$

16.5 భాజనీయతా సూత్రాలను పరీక్షించడం

మీరు 6వతరగతిలో 10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11 మొదలగు విభాజకాలతో భాజనీయతను ఎలా పరీక్షించవచ్చో నేర్చుకున్నారు. మీరు సులభంగా భాజనీయతను పరీక్షించడం చేయగలిగినా, ఎందుకు అలా చేస్తున్నాము? అని ఆలోచించే ఉంటారు. మనం ఈ అధ్యాయంలో అలా "ఎందుకు" చేస్తున్నామో తెలుసుకుందాం.

16.5.1 10 భాజనీయతా సూత్రం

ఖచ్చితంగా ఇది అన్ని భాజనీయతా సూత్రాలలో సులభమైనది. ముందుగా 10 యొక్క కొన్ని గుణిజాలను చూడండి.

10, 20, 30, 40, 50, 60, ... ,

10 యొక్క గుణిజాలు కాని కొన్ని సంఖ్యలు చూడండి.

13, 27, 32, 48, 55, 69,

ఈ సంఖ్యల జాబితాలను మనం గమనించినప్పుడు ఒకట్ల స్థానంలో 0ను కల్గియున్న సంఖ్యలు 10 యొక్క గుణిజాలు; మరియు ఒకట్ల స్థానంలో 0ను కల్గి *ఉండని* సంఖ్యలు, 10 యొక్క గుణిజాలు కావు. ఈవిధంగా మనం 10 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం తెలుసుకున్నాం.

మనం దీనిని చెప్పుకొని ఆగిపోకుండా, అదెలా పనిచేస్తుందో వివరిద్దాం. అదేమి కష్టం కాదు. మనకు సంఖ్యల స్థాన విలువల నియమం తెలిసివుంటే చాలు.

... cba అనే సంఖ్యను తీసుకోండి. దీని సాధారణ రూపం ... $+ 100c + 10b + a$

ఇక్కడ a అనునది ఒకట్ల స్థానం, b అనునది పదుల స్థానం, c అనునది వందల స్థానం మొదలగునవి. ఇక్కడ చుక్కలు, c యొక్క ఎడమవైపున ఇంకా ఎక్కువ అంకెలు కూడా ఉండవచ్చు అని సూచిస్తాయి.

10, 100, ... మొదలగు సంఖ్యలు 10చే భాగింపబడుట వలన $10b$, $100c$ లు 10చే భాగించబడుతాయి. ఇప్పుడు ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె a అనునది 10చే భాగించబడితే దత్త సంఖ్య 10చే భాగించబడుతుంది. అది $a = 0$ అయినప్పుడు మాత్రమే సాధ్యపడుతుంది.

అందువల్ల, ఒక సంఖ్యలోని ఒకట్లస్థానంలోని అంకె 0 అయినప్పుడు మాత్రమే అది 10చే భాగించబడుతుంది.

16.5.2 5 భాజనీయతా సూత్రం

5 యొక్క కొన్ని గుణిజాలను గమనిద్దాం

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50,

We see that *the one's digits are alternately* 5 *and* 0, *and no other digit ever appears in this list.*

So, we get our test of divisibility by 5.

If the ones digit of a number is 0 *or* 5, *then it* is *divisible by* 5.

Let us explain this rule. Any number ... *cba* can be written as:

... + 100*c* + 10*b* + *a*

Since 10, 100 are divisible by 10 so are 10*b*, 100*c*, ... which in turn, are divisible by 5 because 10 = 2 × 5. As far as number *a* is concerned it must be divisible by 5 if the number is divisible by 5. So *a* has to be either 0 or 5.

TRY THESE

(The first one has been done for you.)

1. If the division N ÷ 5 leaves a remainder of 3, what might be the ones digit of N? (The one's digit, when divided by 5, must leave a remainder of 3. So the one's digit must be either 3 or 8.)
2. If the division N ÷ 5 leaves a remainder of 1, what might be the one's digit of N?
3. If the division N ÷ 5 leaves a remainder of 4, what might be the one's digit of N?

16.5.3 Divisibility by 2

Here are the even numbers.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ... ,

and here are the odd numbers.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... ,

We see that a natural number is even if its one's digit is

2, 4, 6, 8 or 0

A number is odd if its one's digit is

1, 3, 5, 7 or 9

Recall the test of divisibility by 2 learnt in Class VI, which is as follows.

If the one's digit of a number is 0, 2, 4, 6 or 8 then the number is divisible by 2.

The explanation for this is as follows.

Any number *cba* can be written as 100*c* + 10*b* + *a*

First two terms namely 100*c*, 10*b* are divisible by 2 because 100 and 10 are divisible by 2. So far as *a* is concerned, it must be divisible by 2 if the given number is divisible by 2. This is possible only when *a* = 0, 2, 4, 6 or 8.

TRY THESE

(The first one has been done for you.)

1. If the division N ÷ 2 leaves a remainder of 1, what might be the one's digit of N? (N is odd; so its one's digit is odd. Therefore, the one's digit must be 1, 3, 5, 7 or 9.)

ఈ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానాన్ని గమనించినప్పుడు అక్కడ 5 మరియు 0 లు ఒక దాని తర్వాత ఒకటి వస్తాయి. అవి మినహాయించి ఎటువంటి అంకెలు రావు. ఈవిధంగా 5 యొక్క భాజనీయతను పరీక్షించవచ్చు. *ఒక సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 0 లేదా 5 అయిన ఆ సంఖ్య 5 చే భాగించబడుతుంది.*

మనం ఈ నియమాన్ని వివరిద్దాం.

ఏదైనా సంఖ్య $..cba$ ను ... $+ 100c + 10b + a$ అని రాయవచ్చు.

10, 100 మొదలగు సంఖ్యలు 10చే భాగించబడటం వలన $10b$, $100c$ 10చే భాగించబడుతాయి. అవి 5తో కూడా భాగించబడుతాయి. ఎందుకనగా $10 = 2 \times 5$. ఇంకా ఒకట్ల స్థానంలోని a అనునది 5తో భాగించబడినచో, ఆసంఖ్య 5చే భాగించబడుతుంది. కావున a అనునది 0 లేదా 5 కావలెను.

ప్రయత్నించండి

(మొదటిది మీకోసం చేయబడింది)

1. $N \div 5$ యొక్క భాగహారంలో శేషం 3 అయిన N యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె ఏది? (ఒక్కట్ల స్థానాన్ని 5 తో భాగించినప్పుడు శేషం 3 అయినచో ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 3 లేదా 8 అయి ఉండాలి).
2. $N \div 5$ యొక్క భాగహారంలో శేషం 1 అయినచో N యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె ఏది?
3. $N \div 5$ యొక్క భాగాహారంలో శేషం 4 అయినచో N యొక్క ఒకట్లస్థానంలోని అంకె ఏది?

16.5.3 2 భాజనీయతా సూత్రం

ఇచ్చుట కొన్ని సరిసంఖ్యలు ఉన్నవి

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ... ,

కొన్ని బేసి సంఖ్యలు ఉన్నవి

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... ,

ఒక సహజ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె

2, 4, 6, 8 లేదా 0 అయినచో ఆ సంఖ్య సరిసంఖ్య అని

ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 1, 3, 5, 7 లేదా 9 అయినచో అది బేసి సంఖ్య అని మనకు తెలుసు.

మీరు 6వ తరగతిలో నేర్చుకొన్న 2 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఇది క్రింది విధంగా ఉంది. ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 0, 2, 4, 6 లేదా 8 అయితే, ఆ సంఖ్య 2తో భాగించబడుతుంది.

దాని వివరణ క్రిందివిధంగా ఇవ్వబడింది.

ఏదైనా సంఖ్య cba ని $100c + 10b + a$ అనిరాయవచ్చు

మొదటి రెండు పదాలు $100c$, $10b$ లు 2తో భాగించబడుతాయి. ఎందుకంటే 100 మరియు 10లు 2తో భాగించబడుతాయి. ఇంకా ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకె a అనునది 2 తో భాగించబడినచో ఆ సంఖ్య 2 తో భాగించబడుతుంది. అది $a = 0, 2, 4, 6$ లేదా 8 అయినప్పుడు మాత్రమే సాధ్యమవుతుంది.

ప్రయత్నించండి

(మొదటిది మీకోసం చేయబడింది)

1. $N \div 2$ యొక్క భాగహారంలో శేషం 1 అయినచో N యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె ఏది? (N బేసిసంఖ్య అయితే ఒకట్లస్థానంలోని అంకె బేసి సంఖ్య అగును. అందువలన ఒకట్లస్థానంలో ఉండవలసిన అంకెలు 1, 3, 5, 7 లేదా 9.)

2. If the division N ÷ 2 leaves no remainder (i.e., zero remainder), what might be the one's digit of N?
3. Suppose that the division N ÷ 5 leaves a remainder of 4, and the division N ÷ 2 leaves a remainder of 1. What must be the one's digit of N?

16.5.4 Divisibility by 9 and 3

Look carefully at the three tests of divisibility found till now, for checking division by 10, 5 and 2. We see something common to them: *they use only the one's digit of the given number; they do not bother about the 'rest' of the digits*. Thus, *divisibility is decided just by the one's digit*. 10, 5, 2 are divisors of 10, which is the key number in our place value.

But for checking divisibility by 9, this will not work. Let us take some number say 3573.

Its expanded form is: $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$

This is equal to $3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$

$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \qquad \text{... (1)}$$

We see that the number 3573 will be divisible by 9 or 3 if $(3 + 5 + 7 + 3)$ is divisible by 9 or 3.

We see that $3 + 5 + 7 + 3 = 18$ is divisible by 9 and also by 3. Therefore, the number 3573 is divisible by both 9 and 3.

Now, let us consider the number 3576. As above, we get

$$3576 = 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6) \qquad \text{... (2)}$$

Since $(3 + 5 + 7 + 6)$ i.e., 21 is not divisible by 9 but is divisible by 3, therefore 3576 is not divisible by 9. However 3576 is divisible by 3. Hence,

(i) A number N is divisible by 9 if the sum of its digits is divisible by 9. Otherwise it is not divisible by 9.

(ii) A number N is divisible by 3 if the sum of its digits is divisible by 3. Otherwise it is not divisible by 3.

If the number is '*cba*', then, $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underbrace{9(11c + b)}_{\text{divisible by 3 and 9}} + (a + b + c)$$

Hence, divisibility by 9 (or 3) is possible if $a + b + c$ is divisible by 9 (or 3).

Example 4: Check the divisibility of 21436587 by 9.

Solution: The sum of the digits of 21436587 is $2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36$. This number is divisible by 9 (for $36 \div 9 = 4$). We conclude that 21436587 is divisible by 9.

We can double-check:

$$\frac{21436587}{9} = 2381843 \qquad \text{(the division is exact).}$$

2. N ÷ 2 యొక్క భాగహారం లో శేషం మిగలనిచో (శేషం 0), N యొక్క ఒకట్ల స్థానం లో గల అంకె ఏది?
3. ఒకవేళ N ÷ 5 యొక్క భాగహారంలో శేషం 4 మరియు N ÷ 2 యొక్క భాగహారంలో శేషం 1 అయినచో N యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకె ఏది?

16.5.4 9 మరియు 3 యొక్క భాజనీయత సూత్రాలు

మనం ఇదివరకే నేర్చుకొన్న 10, 5 మరియు 2 యొక్క భాజనీయతా సూత్రాలును జాగ్రత్తగా గమనించండి. వాటిలోని సాధారణ అంశం ఏమనగా *భాజనీయత కేవలం ఒకటస్థానంలోని అంకె పైన మాత్రమే ఆధారపడి ఉంటుంది; ఆసంఖ్యలోని 'మిగిలిన' అంకెలతో సంబంధం ఉండదు. భాజనీయతను కేవలం ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె నిర్ణయిస్తుంది.* 10 యొక్క కారణాంకాలు 10,5,2 స్థాన విలువలలో ముఖ్యమైన అంకెలు.

ఈ మూడు భాగాహార సూత్రాలలో ఒకట్ల స్థానం కీలకపాత్ర పోషిస్తున్నది.

అయితే 9 యొక్క భాజనీయతను పరీక్షించడంలో ఇది పని చేయదు. మనం ఒక సంఖ్య 3573ను తీసుకుందాం.

దాని విస్తరణరూపం : $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$

$$= 3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$$

$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \qquad \text{... (1)}$$

ఇప్పుడు మనం 3573 అను సంఖ్య 9 లేదా 3 చే భాగించబడాలంటే, $(3 + 5 + 7 + 3)$ అనునది 9 లేదా 3 చే భాగించబడాలి అని చెప్పవచ్చు. ఇందులో $3 + 5 + 7 + 3 = 18$ అనునది 9 మరియు 3లచే భాగించబడుతుంది. అందువలన ఇచ్చిన సంఖ్య 9 మరియు 3 రెండింటితోను భాగించబడుతుంది.

ఇప్పుడు మరొకసంఖ్య 3576ను తీసుకుందాం. దీనిని పైవిధంగా విస్తరించినప్పుడు.

$$3576 = 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6) \qquad \text{... (2)}$$

ఇందులో $(3 + 5 + 7 + 6)$ అనునది 9తో భాగించబడదు, కానీ 3తో భాగించబడుతుంది.

3576 అనేది 3చే భాగించబడినప్పటికి 3576 అనేది 9చే భాగించబడదు. అందువలన,

(i) ఒక సంఖ్య N, 9చే భాగించబడాలంటే దాని అంకెలన్నింటి మొత్తం 9చే భాగించబడాలి లేనట్లయితే అది 9చే భాగించబడదు.

(ii) ఒకసంఖ్య N, 3చే భాగించబడాలంటే దానిలోని అంకెలన్నింటి మొత్తం 3చే భాగించబడాలి లేనట్లయితే అది 3చే భాగించబడదు.

ఇచ్చినసంఖ్య '*cba*' అయినచో $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underbrace{9(11c + b)}_{\text{3 మరియు 9లచే భాగించబడుతుంది}} + (a + b + c)$$

అందువలన, 9 (లేదా 3) చే భాగించబడాలంటే $(a + b + c)$ అనునది 9 (లేదా 3) చే భాగించబడాలి.

ఉదాహరణ 4: 9చే 21436587 యొక్క భాజనీయతను పరీక్షించండి.

సాధన: ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెలన్నింటి మొత్తం $2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36$. ఇది 9చే భాగించబడుతుంది. $(36 \div 9 = 4)$. అందువలన 21436587 అను సంఖ్య 9చే భాగించబడుతుంది

మనం దీనిని సరిచూడవచ్చు: $\dfrac{21436587}{9} = 2381843$ (ఖచ్చితంగా భాగించబడింది).

Example 5: Check the divisibility of 152875 by 9.

Solution: The sum of the digits of 152875 is $1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28$. This number is **not** divisible by 9. We conclude that 152875 is not divisible by 9.

TRY THESE

Check the divisibility of the following numbers by 9.

1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

Example 6: If the three digit number $24x$ is divisible by 9, what is the value of x?

Solution: Since $24x$ is divisible by 9, sum of it's digits, i.e., $2 + 4 + x$ should be divisible by 9, i.e., $6 + x$ should be divisible by 9.

This is possible when $6 + x = 9$ or 18, ...
But, since x is a digit, therefore, $6 + x = 9$, i.e., $x = 3$.

THINK, DISCUSS AND WRITE

1. You have seen that a number 450 is divisible by 10. It is also divisible by 2 and 5 which are factors of 10. Similarly, a number 135 is divisible 9. It is also divisible by 3 which is a factor of 9.
   Can you say that if a number is divisible by any number m, then it will also be divisible by each of the factors of m?
2. (i) Write a 3-digit number abc as $100a + 10b + c$
   $$= 99a + 11b + (a - b + c)$$
   $$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$
   If the number abc is divisible by 11, then what can you say about $(a - b + c)$?
   Is it necessary that $(a + c - b)$ should be divisible by 11?

   (ii) Write a 4-digit number $abcd$ as $1000a + 100b + 10c + d$
   $$= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$$
   $$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$
   If the number $abcd$ is divisible by 11, then what can you say about $[(b + d) - (a + c)]$?

   (iii) From (i) and (ii) above, can you say that a number will be divisible by 11 if the difference between the sum of digits at its odd places and that of digits at the even places is divisible by 11?

Example 7: Check the divisibility of 2146587 by 3.

Solution: The sum of the digits of 2146587 is $2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33$. This number is divisible by 3 (for $33 \div 3 = 11$). We conclude that 2146587 is divisible by 3.

ఉదాహరణ 5: 9చే 152875 యొక్క భాజనీయతను పరీక్షించండి.

సాధన: ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెలన్నింటి మొత్తం $1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28$. ఇది 9చే **భాగించబడదు.** అందువలన 152875 అనుసంఖ్య 9చే భాగించబడదని మనం నిర్ధారించవచ్చు.

ప్రయత్నించండి

9చే క్రింది సంఖ్యల భాజనీయతను పరీక్షించండి.

1. 108   2. 616   3. 294   4. 432   5. 927

ఉదాహరణ 6 : ఒక మూడంకెల సంఖ్య $24x$ అనునది 9చే భాగించబడినచో x విలువ కనుగొనండి

సాధన: $24x$ అనునది 9చే భాగించబడుట వలన దీని అంకెల మొత్తం $2 + 4 + x$ కూడా 9 చే భాగించబడాలి. అనగా, $6 + x$ అనునది 9 చే భాగించబడాలి.

అది సాధ్యపడాలంటే $6 + x = 9$ లేదా 18, ... కావాలి
కానీ, x అనునది ఒక అంకె అగుట వలన $6 + x = 9$, అనగా $x = 3$.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

1. 450 అనుసంఖ్య 10చే భాగించబడుతుంది. అదేవిధంగా 10 యొక్క కారణాంకాలైన 2 మరియు 5చే కూడా భాగించబడుతుంది. ఇదేవిధంగా, 135 అనుసంఖ్య 9చే భాగించబడుతుంది. అదేవిధంగా అది 9 యొక్క కారణాంకం 3చే కూడా భాగించబడుతుంది.
   ఏదైనాఒక సంఖ్య m అనే సంఖ్యతో భాగించబడితే, అది m యొక్క ప్రతీ కారణాంకంతో కూడా భాగించబడుతుందని చెప్పగలమా?
2. (i) 3 - అంకెల ఒక సంఖ్య abcను ఇలా రాయవచ్చు.
   $$abc = 100a + 10b + c$$
   $$= 99a + 11b + (a - b + c)$$
   $$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$
   ఒక సంఖ్య abc అనునది 11చే భాగించబడినట్లయితే $(a - b + c)$ గురించి ఏమి చెప్పగలవు?
   $(a + c - b)$ అనునది 11 చే భాగించబడటం అవసరమా?

   (ii) 4−అంకెల సంఖ్య $abcd$ విస్తరించిన $1000a + 100b + 10c + d$
   $$= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$$
   $$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$
   $abcd$ అనునది 11చే భాగించబడినట్లయితే, $[(b + d) - (a + c)]$ గురించి ఏమి చెప్పగలవు?

   (iii) పై రెండు సందర్భాలు (i), (ii) లు గమనించినచో, ఒక సంఖ్యలోని వాటి బేసి స్థానాలలో గల అంకెల మొత్తం, సరిస్థానాలలో గల అంకెల మొత్తాల వ్యత్యాసం 11చే భాగించబడిన, ఆ సంఖ్య 11చే భాగించబడునని నీవు చెప్పగలవా?

ఉదాహరణ 7: 3చే 2146587 భాజనీయతను పరీక్షించండి.

సాధన: 2146587 సంఖ్య యొక్క అంకెలన్నింటి మొత్తం $2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33$. ఇది 3చే భాగించబడుతుంది $(33 \div 3 = 11)$. అందువలన 2146587 అనునది 3చే భాగించబడుతుంది.

Example 8: Check the divisibility of 15287 by 3.

Solution: The sum of the digits of 15287 is 1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23. This number is not divisible by 3. We conclude that 15287 too is not divisible by 3.

TRY THESE

Check the divisibility of the following numbers by 3.

1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

EXERCISE 16.2

1. If 21y5 is a multiple of 9, where y is a digit, what is the value of y?
2. If 31z5 is a multiple of 9, where z is a digit, what is the value of z?
   You will find that there are *two* answers for the last problem. Why is this so?
3. If 24x is a multiple of 3, where x is a digit, what is the value of x?
   (Since 24x is a multiple of 3, its sum of digits 6 + x is a multiple of 3; so 6 + x is one of these numbers: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... But since x is a digit, it can only be that 6 + x = 6 or 9 or 12 or 15. Therefore, x = 0 or 3 or 6 or 9. Thus, x can have any of four different values.)
4. If 31z5 is a multiple of 3, where z is a digit, what might be the values of z?

WHAT HAVE WE DISCUSSED?

1. Numbers can be written in general form. Thus, a two digit number *ab* will be written as $ab = 10a + b$.
2. The general form of numbers are helpful in solving puzzles or number games.
3. The reasons for the divisibility of numbers by 10, 5, 2, 9 or 3 can be given when numbers are written in general form.

ఉదాహరణ 8: 3చే 15287 యొక్క భాజనీయతను పరీక్షించండి.

సాధన: 15287 సంఖ్యలోని అంకెలన్నింటి మొత్తం $1+5+2+8+7=23$. ఇది 3చే భాగించబడదు. అందువలన 15287 కూడా 3చే భాగించబడదు.

ప్రయత్నించండి

3చే కింది సంఖ్యల భాజనీయతను పరీక్షించండి.

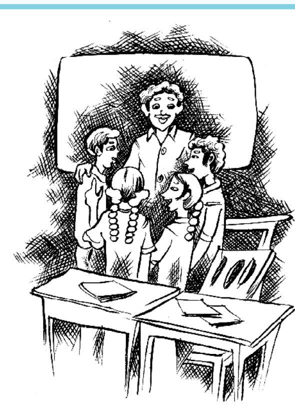
1. 108 2. 616 3. 294 4. 432 5. 927

అభ్యాసం 16.2

1. y ఒక అంకె అయినప్పుడు $21y5$ అనునది 9 యొక్క గుణిజం అయ్యేటట్లు y విలువ కనుగొనండి?
2. z ఒక అంకె అయినప్పుడు 31z5 అనునది 9 యొక్క గుణిజం అయ్యేటట్లు z విలువ కనుగొనండి? చివరి సమస్యకు రెండు సమాధానములు కలవని నీవు కనుగొనగలవు. ఎందువలన?
3. x ఒక అంకె అయినప్పుడు $24x$ అనునది 3 యొక్క గుణిజం అయ్యేటట్లు x విలువ కనుగొనండి?
   ($24x$ అనునది 3 యొక్క గుణిజం, కావున ఈ సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం $6+x$ కూడా 3 యొక్క గుణిజం అగును; కనుక $6+x$ అనునది 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 లలో ఒకటి కావలెను. కాని x అనునది ఒక అంకె అయినందువలన $6+x = 6$ లేదా 9 లేదా 12 లేదా 15 కావచ్చు. అందువల్ల, $x = 0$ లేదా 3 లేదా 6 లేదా 9 అగును. కావున, x కు ఏవైనా నాలుగు విభిన్న విలువలు
   ఉండవచ్చు).
4. z ఒక అంకె అయినప్పుడు 31z5 అనునది 3 యొక్క గుణిజం అయ్యేటట్లు z విలువ ఏమై ఉండవచ్చు?

మనం ఏమి చర్చించుకున్నాం?

1. సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో రాయవచ్చు. రెండు అంకెల సంఖ్య యొక్క విస్తరణ రూపం $ab = 10a + b$.
2. సంఖ్యలతో ఆటలు లేదా పజిల్‌లను సాధించడంలో సంఖ్యల విస్తరణ రూపం సహాయపడుతుంది.
3. సంఖ్యలను విస్తరణరూపంలో రాయడం ద్వారా 10,5,2,9 లేదా 3ల భాజనీయతా సూత్రాలకు కారణాలు తెలుసుకోవచ్చును.



NOTES

ANSWERS

EXERCISE 9.1

1.

	Term	Coefficient
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 –3
(ii)	1 x x^2	1 1 1
(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 – 4 1
(iv)	3 $-pq$ qr $-rp$	3 –1 1 –1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ $-xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ –1
(vi)	$0.3a$ $-0.6ab$ $0.5b$	0.3 – 0.6 0.5

నోట్స్

జవాబులు

అభ్యాసం 9.1

1.

	పదం	గుణకం
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 -3
(ii)	1 x x^2	1 1 1
(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 -4 1
(iv)	3 $-pq$ qr $-rp$	3 -1 1 -1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ $-xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1
(vi)	$0.3a$ $-0.6ab$ $0.5b$	0.3 -0.6 0.5

2. Monomials: 1000, pqr

Binomials: $x + y$, $2y - 3y^2$, $4z - 15z^2$, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

Trinomials : $7 + y + 5x$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$

Polynomials that do not fit in these categories: $x + x^2 + x^3 + x^4$, $ab + bc + cd + da$

3. (i) 0 (ii) $ab + bc + ac$ (iii) $-p^2q^2 + 4pq + 9$

(iv) $2(l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl)$

4. (a) $8a - 2ab + 2b - 15$ (b) $2xy - 7yz + 5zx + 10xyz$

(c) $p^2q - 7pq^2 + 8pq - 18q + 5p + 28$

EXERCISE 9.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0

2. pq; $50\ mn$; $100\ x^2y^2$; $12x^3$; $12mn^2p$

3.

First monomial → / Second monomial ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y^2$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^3$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

EXERCISE 9.3

1. (i) $4pq + 4pr$ (ii) $a^2b - ab^2$ (iii) $7a^3b^2 + 7a^2b^3$

(iv) $4a^3 - 36a$ (v) 0

2. (i) $ab + ac + ad$ (ii) $5x^2y + 5xy^2 - 25xy$

(iii) $6p^3 - 7p^2 + 5p$ (iv) $4p^4q^2 - 4p^2q^4$

(v) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2 - 15x + 3$; (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$

(b) $a^3 + a^2 + a + 5$; (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - pr$ (b) $-2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2yz + 2zx$

(c) $5l^2 + 25ln$ (d) $-3a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 6bc - 7ac$

2. ఏకపదులు: 1000, pqr

ద్విపదులు: $x + y$, $2y - 3y^2$, $4z - 15z^2$, $p^2q + pq^2$, $2p + 2q$

త్రిపదులు :$7 + y + 5x$, $2y - 3y^2 + 4y^3$, $5x - 4y + 3xy$

ఈ వర్గాలలో లేనటువంటి బహుపదులు: $x + x^2 + x^3 + x^4$, $ab + bc + cd + da$

3. (i) 0 (ii) $ab + bc + ac$ (iii) $-p^2q^2 + 4pq + 9$

(iv) $2(l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl)$

4. (a) $8a - 2ab + 2b - 15$ (b) $2xy - 7yz + 5zx + 10xyz$

(c) $p^2q - 7pq^2 + 8pq - 18q + 5p + 28$

అభ్యాసం 9.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0

2. pq; $50\ mn$; $100\ x^2y^2$; $12x^3$; $12mn^2p$

3.

మొదటి ఏకపది → / రెండవ ఏకపది ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y^2$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^3$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

అభ్యాసం 9.3

1. (i) $4pq + 4pr$ (ii) $a^2b - ab^2$ (iii) $7a^3b^2 + 7a^2b^3$

(iv) $4a^3 - 36a$ (v) 0

2. (i) $ab + ac + ad$ (ii) $5x^2y + 5xy^2 - 25xy$

(iii) $6p^3 - 7p^2 + 5p$ (iv) $4p^4q^2 - 4p^2q^4$

(v) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2 - 15x + 3$; (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$

(b) $a^3 + a^2 + a + 5$; (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - pr$ (b) $-2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2yz + 2zx$

(c) $5l^2 + 25ln$ (d) $-3a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 6bc - 7ac$

EXERCISE 9.4

1. (i) $8x^2 + 14x - 15$ (ii) $3y^2 - 28y + 32$ (iii) $6.25l^2 - 0.25m^2$
(iv) $ax + 5a + 3bx + 15b$ (v) $6p^2q^2 + 5pq^3 - 6q^4$ (vi) $3a^4 + 10a^2b^2 - 8b^4$
2. (i) $15 - x - 2x^2$ (ii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ (iii) $a^3 + a^2b^2 + ab + b^3$
(iv) $2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$
3. (i) $x^3 + 5x^2 - 5x$ (ii) $a^2b^3 + 3a^2 + 5b^3 + 20$ (iii) $t^3 - st + s^2t^2 - s^3$
(iv) $4ac$ (v) $3x^2 + 4xy - y^2$ (vi) $x^3 + y^3$
(vii) $2.25x^2 - 16y^2$ (viii) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

EXERCISE 9.5

1. (i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $4y^2 + 20y + 25$ (iii) $4a^2 - 28a + 49$
(iv) $9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$ (v) $1.21m^2 - 0.16$ (vi) $b^4 - a^4$
(vii) $36x^2 - 49$ (viii) $a^2 - 2ac + c^2$ (ix) $\frac{x^2}{4} + \frac{3xy}{4} + \frac{9y^2}{16}$
(x) $49a^2 - 126ab + 81b^2$
2. (i) $x^2 + 10x + 21$ (ii) $16x^2 + 24x + 5$ (iii) $16x^2 - 24x + 5$
(iv) $16x^2 + 16x - 5$ (v) $4x^2 + 16xy + 15y^2$ (vi) $4a^4 + 28a^2 + 45$
(vii) $x^2y^2z^2 - 6xyz + 8$
3. (i) $b^2 - 14b + 49$ (ii) $x^2y^2 + 6xyz + 9z^2$ (iii) $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$
(iv) $\frac{4}{9}m^2 + 2mn + \frac{9}{4}n^2$ (v) $0.16p^2 - 0.4pq + 0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2 + 20xy^2 + 25y^2$
4. (i) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (ii) $40x$ (iii) $98m^2 + 128n^2$
(iv) $41m^2 + 80mn + 41n^2$ (v) $4p^2 - 4q^2$ (vi) $a^2b^2 + b^2c^2$ (vii) $m^4 + n^4m^2$
6. (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404 (iv) 996004
(v) 27.04 (vi) 89991 (vii) 6396 (viii) 79.21
(ix) 99.75
7. (i) 200 (ii) 0.08 (iii) 1800 (iv) 84
8. (i) 10712 (ii) 26.52 (iii) 10094 (iv) 95.06

EXERCISE 10.1

1. (a) → (iii) → (iv) (b) → (i) → (v) (c) → (iv) → (ii)
(d) → (v) → (iii) (e) → (ii) → (i)
2. (a) (i) → Front, (ii) → Side, (iii) → Top (b) (i) → Side, (ii) → Front, (iii) → Top
(c) (i) → Front, (ii) → Side, (iii) → Top (d) (i) → Front, (ii) → Side, (iii) → Top
3. (a) (i) → Top, (ii) → Front, (iii) → Side (b) (i) → Side, (ii) → Front, (iii) → Top
(c) (i) → Top, (ii) → Side, (iii) → Front (d) (i) → Side, (ii) → Front, (iii) → Top
(e) (i) → Front, (ii) → Top, (iii) → Side

అభ్యాసం 9.4

1. (i) $8x^2 + 14x - 15$ (ii) $3y^2 - 28y + 32$ (iii) $6.25l^2 - 0.25m^2$
(iv) $ax + 5a + 3bx + 15b$ (v) $6p^2q^2 + 5pq^3 - 6q^4$ (vi) $3a^4 + 10a^2b^2 - 8b^4$

2. (i) $15 - x - 2x^2$ (ii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ (iii) $a^3 + a^2b^2 + ab + b^3$
(iv) $2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$

3. (i) $x^3 + 5x^2 - 5x$ (ii) $a^2b^3 + 3a^2 + 5b^3 + 20$ (iii) $t^3 - st + s^2t^2 - s^3$
(iv) $4ac$ (v) $3x^2 + 4xy - y^2$ (vi) $x^3 + y^3$
(vii) $2.25x^2 - 16y^2$ (viii) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

అభ్యాసం 9.5

1. (i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $4y^2 + 20y + 25$ (iii) $4a^2 - 28a + 49$
(iv) $9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$ (v) $1.21m^2 - 0.16$ (vi) $b^4 - a^4$
(vii) $36x^2 - 49$ (viii) $a^2 - 2ac + c^2$ (ix) $\frac{x^2}{4} + \frac{3xy}{4} + \frac{9y^2}{16}$
(x) $49a^2 - 126ab + 81b^2$

2. (i) $x^2 + 10x + 21$ (ii) $16x^2 + 24x + 5$ (iii) $16x^2 - 24x + 5$
(iv) $16x^2 + 16x - 5$ (v) $4x^2 + 16xy + 15y^2$ (vi) $4a^4 + 28a^2 + 45$
(vii) $x^2 y^2 z^2 - 6xyz + 8$

3. (i) $b^2 - 14b + 49$ (ii) $x^2 y^2 + 6xyz + 9z^2$ (iii) $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$
(iv) $\frac{4}{9}m^2 + 2mn + \frac{9}{4}n^2$ (v) $0.16p^2 - 0.4pq + 0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2 + 20xy^2 + 25y^2$

4. (i) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (ii) $40x$ (iii) $98m^2 + 128n^2$
(iv) $41m^2 + 80mn + 41n^2$ (v) $4p^2 - 4q^2$ (vi) $a^2b^2 + b^2c^2$ (vii) $m^4 + n^4m^2$

6. (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404 (iv) 996004
(v) 27.04 (vi) 89991 (vii) 6396 (viii) 79.21
(ix) 99.75

7. (i) 200 (ii) 0.08 (iii) 1800 (iv) 84

8. (i) 10712 (ii) 26.52 (iii) 10094 (iv) 95.06

అభ్యాసం 10.1

1. (a) $\rightarrow$ (iii) $\rightarrow$ (iv) (b) $\rightarrow$ (i) $\rightarrow$ (v) (c) $\rightarrow$ (iv) $\rightarrow$ (ii)
(d) $\rightarrow$ (v) $\rightarrow$ (iii) (e) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (i)

2. (a) (i) $\rightarrow$ ముందు, (ii) $\rightarrow$ ప్రక్కన, (iii) $\rightarrow$ పైన (b) (i) $\rightarrow$ ప్రక్కన, (ii) $\rightarrow$ ముందు, (iii) $\rightarrow$ పైన
(c) (i) $\rightarrow$ ముందు, (ii) $\rightarrow$ ప్రక్కన, (iii) $\rightarrow$ పైన (d) (i) $\rightarrow$ ముందు, (ii) $\rightarrow$ ప్రక్కన, (iii) $\rightarrow$ పైన

3. (a) (i) $\rightarrow$ పైన, (ii) $\rightarrow$ ముందు, (iii) $\rightarrow$ ప్రక్కన (b) (i) $\rightarrow$ ప్రక్కన, (ii) $\rightarrow$ ముందు, (iii) $\rightarrow$ పైన
(c) (i) $\rightarrow$ పైన, (ii) $\rightarrow$ ప్రక్కన, (iii) $\rightarrow$ ముందు (d) (i) $\rightarrow$ ప్రక్కన, (ii) $\rightarrow$ ముందు, (iii) $\rightarrow$ పైన
(e) (i) $\rightarrow$ ముందు, (ii) $\rightarrow$ పైన, (iii) $\rightarrow$ ప్రక్కన

EXERCISE 10.3

1. (i) No (ii) Yes (iii) Yes **2.** Possible, only if the number of faces are greater than or equal to 4

3. only (ii) and (iv)

4. (i) A prism becomes a cylinder as the number of sides of its base becomes larger and larger.

(ii) A pyramid becomes a cone as the number of sides of its base becomes larger and larger.

5. No. It can be a cuboid also **7.** Faces $\to$ 8, Vertices $\to$ 6, Edges $\to$ 30

8. No

EXERCISE 11.1

1. (a) **2.** ` 17,875 **3.** Area = 129.5 m^2; Perimeter = 48 m

4. 45000 tiles **5.** (b)

EXERCISE 11.2

1. 0.88 m^2 **2.** 7 cm **3.** 660 m^2 **4.** 252 m^2

5. 45 cm^2 **6.** 24 cm^2, 6 cm **7.** ` 810 **8.** 140 m

9. 119 m^2 **10.** Area using Jyoti's way = $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times (30 + 15)\ m^2 = 337.5\ m^2$,

Area using Kavita's way = $\frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15 = 337.5\ m^2$

11. 80 cm^2, 96 cm^2, 80 cm^2, 96 cm^2

EXERCISE 11.3

1. (a) **2.** 144 m **3.** 10 cm **4.** 11 m^2

5. 5 cans

6. Similarity $\to$ Both have same heights. Difference $\to$ one is a cylinder, the other is a cube. The cube has larger lateral surface area

7. 440 m^2 **8.** 322 cm **9.** 1980 m^2 **10.** 704 cm^2

EXERCISE 11.4

1. (a) Volume (b) Surface area (c) Volume

2. Volume of cylinder B is greater; Surface area of cylinder B is greater.

3. 5 cm **4.** 450 **5.** 1 m **6.** 49500 L

7. (i) 4 times (ii) 8 times **8.** 30 hours

EXERCISE 12.1

1. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

అభ్యాసం 10.3

1. (i) కాదు (ii) అవును (iii) అవును **2.** సాధ్యమే, తలాల సంఖ్య 4 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఉన్నప్పుడు మాత్రమే

3. (ii), (iv) మాత్రమే

4. (i) భూ భుజాల సంఖ్య క్రమేపి పెరిగిన కొద్దీ ఒక పట్టకం స్థూపంగా మారుతుంది.

(ii) భూ భుజాల సంఖ్య క్రమేపి పెరిగిన కొద్దీ ఒక పిరమిడ్ శంఖువుగా మారుతుంది.

5. కాదు, దీర్ఘఘనం కూడా కావచ్చు. **7.** తలాలు $\rightarrow$ 8, శీర్షాలు $\rightarrow$ 6, అంచులు $\rightarrow$ 30

8. కాదు

అభ్యాసం 11.1

1. (a) **2.** ` 17,875 **3.** వైశాల్యం = 129.5 మీ^{2}; చుట్టుకొలత = 48 మీ.

4. 45000 టైల్స్ **5.** (b)

అభ్యాసం 11.2

1. 0.88 మీ^{2} **2.** 7 సెం.మీ. **3.** 660 మీ^{2} **4.** 252 మీ^{2}

5. 45 సెం.మీ^{2} **6.** 24 సెం.మీ^{2}, 6 సెం.మీ. **7.** ` 810 **8.** 140 మీ.

9. 119 మీ^{2} **10.** జ్యోతి చేసిన పద్ధతిలో వైశాల్యం = $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times (30 + 15)$ మీ^{2}= 337.5 మీ^{2}

కవిత చేసిన పద్ధతిలో వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15 = 337.5$ మీ^{2}

11. 80 సెం.మీ^{2}, 96 సెం.మీ^{2}, 80 సెం.మీ^{2}, 96 సెం.మీ^{2}

అభ్యాసం 11.3

1. (a) **2.** 144 మీ. **3.** 10 సెం. మీ. **4.** 11 మీ^{2}

5. 5 డబ్బాలు

6. పోలిక $\rightarrow$ రెండూ సమాన ఎత్తులు కలిగి ఉన్నాయి. తేడా $\rightarrow$ ఒకటి స్థూపము, రెండవది సమఘనం.
సమఘనం ఎక్కువ ప్రక్కతల వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉన్నది.

7. 440 మీ^{2} **8.** 322 సెం.మీ. **9.** 1980 మీ^{2} **10.** 704 సెం.మీ^{2}

అభ్యాసం 11.4

1. (a) ఘనపరిమాణం (b) ఉపరితల వైశాల్యం (c) ఘనపరిమాణం

2. స్థూపం B యొక్క ఘనపరిమాణం ఎక్కువ. స్థూపం B యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఎక్కువ

3. 5 సెం.మీ. **4.** 450 **5.** 1 మీ. **6.** 49500 లీ.

7. (i) 4 రెట్లు (ii) 8 రెట్లు **8.** 30 గంటలు

అభ్యాసం 12.1

1. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

2. (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{(3)^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

3. (i) 5 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29 (iv) 1 (v) $\frac{81}{16}$

4. (i) 250 (ii) $\frac{1}{60}$ **5.** $m = 2$ **6.** (i) -1 (ii) $\frac{512}{125}$

7. (i) $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

EXERCISE 12.2

1. (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}
(iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}

2. (i) 0.00000302 (ii) 45000 (iii) 0.00000003
(iv) 1000100000 (v) 5800000000000 (vi) 3614920

3. (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}
(iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}

4. 1.0008×10^2

EXERCISE 13.1

1. No

2.

Parts of red pigment	1	4	7	12	20
Parts of base	8	32	56	96	160

3. 24 parts **4.** 700 bottles **5.** 10^{-4} cm; 2 cm **6.** 21 m

7. (i) 2.25×10^7 crystals (ii) 5.4×10^6 crystals **8.** 4 cm

9. (i) 6 m (ii) 8 m 75 cm **10.** 168 km

EXERCISE 13.2

1. (i), (iv), (v) **2.** $4 \to 25{,}000$; $5 \to 20{,}000$; $8 \to 12{,}500$; $10 \to 10{,}000$; $20 \to 5{,}000$
Amount given to a winner is inversely proportional to the number of winners.

3. $8 \to 45°$, $10 \to 36°$, $12 \to 30°$ (i) Yes (ii) 24° (iii) 9

4. 6 **5.** 4 **6.** 3 days **7.** 15 boxes

8. 49 machines **9.** $1\frac{1}{2}$ hours **10.** (i) 6 days (ii) 6 persons **11.** 40 minutes

EXERCISE 14.1

1. (i) 12 (ii) $2y$ (iii) $14pq$ (iv) 1 (v) $6ab$ (vi) $4x$
(vii) 10 (viii) x^2y^2

2. (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{(3)^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

3. (i) 5 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29 (iv) 1 (v) $\frac{81}{16}$

4. (i) 250 (ii) $\frac{1}{60}$ **5.** $m = 2$ **6.** (i) -1 (ii) $\frac{512}{125}$

7. (i) $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

అభ్యాసం 12.2

1. (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}
(iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}

2. (i) 0.00000302 (ii) 45000 (iii) 0.00000003
(iv) 1000100000 (v) 5800000000000 (vi) 3614920

3. (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}
(iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}

4. 1.0008×10^2

అభ్యాసం 13.1

1. కాదు

2.

ఎరుపు రంగు భాగం	1	4	7	12	20
కలుపవలసిన ద్రావకం భాగం	8	32	56	96	160

3. 24 భాగాలు **4.** 700 సీసాలు **5.** 10^{-4} సెం.మీ.; 2 సెం.మీ. **6.** 21మీ.

7. (i)2.25×10^7 స్ఫటికాలు (ii) 5.4×10^6 స్ఫటికాలు **8.** 4 సెం.మీ.

9. (i) 6 మీ. (ii) 8 మీ. 75 సెం.మీ. **10.** 168 కి.మీ.

అభ్యాసం 13.2

1. (i), (iv), (v) **2.** $4 \rightarrow 25{,}000$; $5 \rightarrow 20{,}000$; $8 \rightarrow 12{,}500$; $10 \rightarrow 10{,}000$; $20 \rightarrow 5{,}000$
గెలుపొందిన వ్యక్తికి ఇచ్చిన మొత్తం, గెలుపొందిన వ్యక్తుల సంఖ్యకు విలోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

3. $8 \rightarrow 45°$, $10 \rightarrow 36°$, $12 \rightarrow 30°$ (i) అవును (ii) 24° (iii) 9

4. 6 **5.** 4 **6.** 3 రోజులు **7.** 15 పెట్టెలు

8. 49 యంత్రాలు **9.** $1\frac{1}{2}$ గంటలు **10.** (i) 6 రోజులు (ii) 6 వ్యక్తులు **11.** 40 నిమిషాలు

అభ్యాసం 14.1

1. (i) 12 (ii) $2y$ (iii) $14pq$ (iv) 1 (v) $6ab$ (vi) $4x$
(vii) 10 (viii) x^2y^2

2. (i) $7(x-6)$ (ii) $6(p-2q)$ (iii) $7a(a+2)$ (iv) $4z(-4+5z^2)$
(v) $10\,lm(2l+3a)$ (vi) $5xy(x-3y)$ (vii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$
(viii) $4a(-a+b-c)$ (ix) $xyz(x+y+z)$ (x) $xy(ax+by+cz)$

3. (i) $(x+8)\,(x+y)$ (ii) $(3x+1)\,(5y-2)$ (iii) $(a+b)\,(x-y)$
(iv) $(5p+3)\,(3q+5)$ (v) $(z-7)\,(1-xy)$

EXERCISE 14.2

1. (i) $(a+4)^2$ (ii) $(p-5)^2$ (iii) $(5m+3)^2$ (iv) $(7y+6z)^2$
(v) $4(x-1)^2$ (vi) $(11b-4c)^2$ (vii) $(l-m)^2$ (viii) $(a^2+b^2)^2$

2. (i) $(2p-3q)\,(2p+3q)$ (ii) $7(3a-4b)\,(3a+4b)$ (iii) $(7x-6)\,(7x+6)$
(iv) $16x^3(x-3)\,(x+3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy-4)\,(3xy+4)$
(vii) $(x-y-z)\,(x-y+z)$ (viii) $(5a-2b+7c)\,(5a+2b-7c)$

3. (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2+3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2+n^2)\,(a+b)$ (v) $(l+1)\,(m+1)$ (vi) $(y+9)\,(y+z)$
(vii) $(5y+2z)\,(y-4)$ (viii) $(2a+1)\,(5b+2)$ (ix) $(3x-2)\,(2y-3)$

4. (i) $(a-b)\,(a+b)\,(a^2+b^2)$ (ii) $(p-3)\,(p+3)\,(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)\,(x+y+z)\,[x^2+(y+z)^2]$ (iv) $z(2x-z)\,(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2\,(a+b)^2$

5. (i) $(p+2)\,(p+4)$ (ii) $(q-3)\,(q-7)$ (iii) $(p+8)\,(p-2)$

EXERCISE 14.3

1. (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

2. (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$
(iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) q^3-p^3

3. (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

4. (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$ (iv) $4(y^2+5y+3)$
(v) $(x+2)\,(x+3)$

5. (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$ (v) $\frac{5}{2}q(p-q)$
(vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

EXERCISE 14.4

1. $4(x-5)=4x-20$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2x$ **3.** $2x+3y=2x+3y$
4. $x+2x+3x=6x$ **5.** $5y+2y+y-7y=y$ **6.** $3x+2x=5x$

2. (i) $7(x-6)$ (ii) $6(p-2q)$ (iii) $7a(a+2)$ (iv) $4z(-4+5z^2)$
(v) $10\,lm(2l+3a)$ (vi) $5xy(x-3y)$ (vii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$
(viii) $4a(-a+b-c)$ (ix) $xyz(x+y+z)$ (x) $xy(ax+by+cz)$

3. (i) $(x+8)(x+y)$ (ii) $(3x+1)(5y-2)$ (iii) $(a+b)(x-y)$
(iv) $(5p+3)(3q+5)$ (v) $(z-7)(1-xy)$

అభ్యాసం 14.2

1. (i) $(a+4)^2$ (ii) $(p-5)^2$ (iii) $(5m+3)^2$ (iv) $(7y+6z)^2$
(v) $4(x-1)^2$ (vi) $(11b-4c)^2$ (vii) $(l-m)^2$ (viii) $(a^2+b^2)^2$

2. (i) $(2p-3q)(2p+3q)$ (ii) $7(3a-4b)(3a+4b)$ (iii) $(7x-6)(7x+6)$
(iv) $16x^3(x-3)(x+3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy-4)(3xy+4)$
(vii) $(x-y-z)(x-y+z)$ (viii) $(5a-2b+7c)(5a+2b-7c)$

3. (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2+3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2+n^2)(a+b)$ (v) $(l+1)(m+1)$ (vi) $(y+9)(y+z)$
(vii) $(5y+2z)(y-4)$ (viii) $(2a+1)(5b+2)$ (ix) $(3x-2)(2y-3)$

4. (i) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ (ii) $(p-3)(p+3)(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)(x+y+z)[x^2+(y+z)^2]$ (iv) $z(2x-z)(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2(a+b)^2$

5. (i) $(p+2)(p+4)$ (ii) $(q-3)(q-7)$ (iii) $(p+8)(p-2)$

అభ్యాసం 14.3

1. (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

2. (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$
(iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) q^3-p^3

3. (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

4. (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$ (iv) $4(y^2+5y+3)$
(v) $(x+2)(x+3)$

5. (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$ (v) $\frac{5}{2}q(p-q)$
(vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

అభ్యాసం 14.4

1. $4(x-5)=4x-20$ **2.** $x(3x+2)=3x^2+2x$ **3.** $2x+3y=2x+3y$
4. $x+2x+3x=6x$ **5.** $5y+2y+y-7y=y$ **6.** $3x+2x=5x$

7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 4x^2 + 8x + 7$

8. $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

9. $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

10. (a) $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$ (b) $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$

(c) $(-3)^2 + 5(-3) = 9 - 15 = -6$

11. $(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$

12. $(z + 5)^2 = z^2 + 10z + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 + ab - 3b^2$

14. $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 6a + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 6a + 8$

16. $\frac{3x^2}{3x^2} = 1$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2} = \frac{3x^2}{3x^2} + \frac{1}{3x^2} = 1 + \frac{1}{3x^2}$

18. $\frac{3x}{3x+2} = \frac{3x}{3x+2}$

19. $\frac{3}{4x+3} = \frac{3}{4x+3}$

20. $\frac{4x+5}{4x} = \frac{4x}{4x} + \frac{5}{4x} = 1 + \frac{5}{4x}$

21. $\frac{7x+5}{5} = \frac{7x}{5} + \frac{5}{5} = \frac{7x}{5} + 1$

EXERCISE 15.1

1. (a) 36.5° C (b) 12 noon (c) 1 p.m, 2 p.m.

(d) 36.5° C; The point between 1 p.m. and 2 p.m. on the x-axis is equidistant from the two points showing 1 p.m. and 2 p.m., so it will represent 1.30 p.m. Similarly, the point on the y-axis, between 36° C and 37° C will represent 36.5° C.

(e) 9 a.m. to 10 a.m., 10 a.m. to 11 a.m., 2 p.m. to 3 p.m.

2. (a) (i) ` 4 crore (ii) ` 8 crore

(b) (i) ` 7 crore (ii) ` 8.5 crore (approx.)

(c) ` 4 crore (d) 2005

3. (a) (i) 7 cm (ii) 9 cm

(b) (i) 7 cm (ii) 10 cm

(c) 2 cm (d) 3 cm (e) Second week (f) First week

(g) At the end of the 2nd week

4. (a) Tue, Fri, Sun (b) 35° C (c) 15° C (d) Thurs

6. (a) 4 units = 1 hour (b) $3\frac{1}{2}$ hours (c) 22 km

(d) Yes; This is indicated by the horizontal part of the graph (10 a.m. - 10.30 a.m.)

(e) Between 8 a.m. and 9 a.m.

7. (iii) is not possible

EXERCISE 15.2

1. Points in (a) and (b) lie on a line; Points in (c) do not lie on a line

2. The line will cut x-axis at (5, 0) and y-axis at (0, 5)

7. $(2x)^2 + 4(2x) + 7 = 4x^2 + 8x + 7$ **8.** $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

9. $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

10. (a) $(-3)^2 + 5(-3) + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$ (b) $(-3)^2 - 5(-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$

(c) $(-3)^2 + 5(-3) = 9 - 15 = -6$

11. $(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$ **12.** $(z + 5)^2 = z^2 + 10z + 25$

13. $(2a + 3b)(a - b) = 2a^2 + ab - 3b^2$ **14.** $(a + 4)(a + 2) = a^2 + 6a + 8$

15. $(a - 4)(a - 2) = a^2 - 6a + 8$ **16.** $\frac{3x^2}{3x^2} = 1$

17. $\frac{3x^2+1}{3x^2} = \frac{3x^2}{3x^2} + \frac{1}{3x^2} = 1 + \frac{1}{3x^2}$ **18.** $\frac{3x}{3x+2} = \frac{3x}{3x+2}$

19. $\frac{3}{4x+3} = \frac{3}{4x+3}$ **20.** $\frac{4x+5}{4x} = \frac{4x}{4x} + \frac{5}{4x} = 1 + \frac{5}{4x}$

21. $\frac{7x+5}{5} = \frac{7x}{5} + \frac{5}{5} = \frac{7x}{5} + 1$

అభ్యాసం 15.1

1. (a) 36.5° C (b) మధ్యాహ్నం 12 (c) 1 p.m., 2 p.m.

(d) 36.5° C, x-అక్షం పైన 1 p.m., 2 p.m.లను సూచించే బిందువులకు సమానదూరంలో గల బిందువు 1.30 p.m. ను సూచిస్తుంది. దానికి అనుగుణంగా y- అక్షంపై 36° C, 37° C మధ్య గల బిందువు 36.5°C ను సూచిస్తుంది.

(e) 9 a.m. నుండి 10 a.m., 10 a.m. నుండి 11 a.m., 2 p.m. నుండి 3 p.m.

2. (a) (i) ` 4 కోట్లు (ii) ` 8 కోట్లు

(b) (i) ` 7 కోట్లు (ii) ` 8.5 కోట్లు (సుమారుగా)

(c) ` 4 కోట్లు (d) 2005

3. (a) (i) 7 సెం.మీ. (ii) 9 సెం.మీ.

(b) (i) 7 సెం.మీ. (ii) 10 సెం.మీ.

(c) 2 సెం.మీ. (d) 3 సెం.మీ. (e) రెండవ వారం (f) మొదటి వారం

(g) 2వ వారం చివర

4. (a) మంగళ, శుక్ర, ఆది (b) 35° C (c) 15° C (d) గురువారం

6. (a) 4 యూనిట్లు = 1 గంట (b) $3\frac{1}{2}$ గంటలు (c) 22 కి.మీ.

(d) అవును, ఇది రేఖాచిత్రంలో క్షితిజ సమాంతర భాగంతో చూపబడింది. (10 a.m. - 10.30 a.m.)

(e) 8 a.m., 9 a.m. ల మధ్య

7. (iii) సాధ్యం కాదు.

అభ్యాసం 15.2

1. (a), (b) లలో ఉన్న బిందువులు ఒక రేఖపై ఉన్నాయి.; (c) లో ఉన్న బిందువులు ఒకే రేఖపై లేవు.

2. సరళరేఖ x-అక్షాన్ని (5, 0) బిందువు వద్ద, y- అక్షాన్ని (0, 5) బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

3. O(0, 0), A(2, 0), B(2, 3), C(0, 3), P(4, 3), Q(6, 1), R(6, 5), S(4, 7), K(10, 5), L(7, 7), M(10, 8)

4. (i) True (ii) False (iii) True

EXERCISE 15.3

1. (b) (i) 20 km (ii) 7.30 a.m. (c) (i) Yes (ii) ` 200 (iii) ` 3500

2. (a) Yes (b) No

EXERCISE 16.1

1. A = 7, B = 6	**2.** A = 5, B = 4, C = 1	**3.** A = 6
4. A = 2, B = 5	**5.** A = 5, B = 0, C = 1	**6.** A = 5, B = 0, C = 2
7. A = 7, B = 4	**8.** A = 7, B = 9	**9.** A = 4, B = 7
10. A = 8, B = 1		

EXERCISE 16.2

1. $y = 1$	**2.** $z = 0$ or 9	**3.** $z = 0, 3, 6$ or 9
4. 0, 3, 6 or 9		

JUST FOR FUN

1. More about Pythagorean triplets

We have seen one way of writing pythagorean triplets as $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$.

A pythagorean triplet a, b, c means $a^2 + b^2 = c^2$. If we use two natural numbers m and $n (m > n)$, and take $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, then we can see that $c^2 = a^2 + b^2$.

Thus for different values of m and n with $m > n$ we can generate natural numbers a, b, c such that they form Pythagorean triplets.

For example: Take, $m = 2$, $n = 1$.

Then, $a = m^2 - n^2 = 3$, $b = 2mn = 4$, $c = m^2 + n^2 = 5$, is a Pythagorean triplet. (Check it!)

For, $m = 3$, $n = 2$, we get,

$a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ which is again a Pythagorean triplet.

Take some more values for m and n and generate more such triplets.

2. When water freezes its volume increases by 4%. What volume of water is required to make 221 cm^3 of ice?

3. If price of tea increased by 20%, by what per cent must the consumption be reduced to keep the expense the same?

3. O(0, 0), A(2, 0), B(2, 3), C(0, 3), P(4, 3), Q(6, 1), R(6, 5), S(4, 7), K(10, 5), L(7, 7), M(10, 8)

4. (i) సత్యం (ii) అసత్యం (iii) సత్యం

అభ్యాసం 15.3

1. (b) (i) 20 కి.మీ. (ii) 7.30 a.m. (c) (i) అవును (ii) ` 200 (iii) ` 3500

2. (a) అవును (b) కాదు

అభ్యాసం 16.1

1. A = 7, B = 6 **2.** A = 5, B = 4, C = 1 **3.** A = 6

4. A = 2, B = 5 **5.** A = 5, B = 0, C = 1 **6.** A = 5, B = 0, C = 2

7. A = 7, B = 4 **8.** A = 7, B = 9 **9.** A = 4, B = 7

10. A = 8, B = 1

అభ్యాసం 16.2

1. $y = 1$ **2.** $z = 0$ లేదా 9 **3.** $z = 0, 3, 6$ లేదా 9

4. 0, 3, 6 లేదా 9

వినోదం కోసం

1. పైథాగరియన్ త్రికాల గురించి మరికొంత సమాచారం

పైథాగరియన్ త్రికాలు $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ రూపంలో రాయ గలిగే ఒక విధానాన్ని మనం చూశాము.

a, b, c అనునది పైథాగరియన్ త్రికం అంటే $a^2 + b^2 = c^2$. రెండు సహజ సంఖ్యలు m మరియు n $(m > n)$, తీసుకొని $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, అని అనుకుంటే $c^2 = a^2 + b^2$ అని చూడవచ్చు.

కావున విభిన్న m, n విలువలకు $m > n$ అయినపుడు పైథాగరియన్ త్రికాలు అయ్యేటట్లుగా మనం విభిన్న సహజ సంఖ్యలు a, b, c లను తయారు చేయగలం.

ఉదాహరణకు: $m = 2, n = 1$ ను తీసుకొనండి.

అప్పుడు, $a = m^2 - n^2 = 3$, $b = 2mn = 4$, $c = m^2 + n^2 = 5$, అనునది ఒక పైథాగరియన్ త్రికం (సరిచూడండి!)

$m = 3, n = 2$ అయిన

$a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ మరియొక పైథాగరియన్ త్రికం.

m, n లకు మరికొన్ని విలువలను తీసుకొని మరిన్ని పైథాగరియన్ త్రికాలు తయారు చేయండి.

2. నీరు ఘనీభవించినప్పుడు దాని ఘనపరిమాణం 4% పెరుగుతుంది. 221 ఘ.సెం.మీ. మంచును తయారు చేయడానికి కావలసిన నీటి ఘనపరిమాణం ఎంత?

3. టీ ఖరీదు 20% పెరిగినట్లయితే దానిపై పెట్టే ఖర్చు స్థిరంగా ఉండుటకు టీ వినియోగాన్ని ఎంత శాతం తగ్గించాలి?

4. Ceremony Awards began in 1958. There were 28 categories to win an award. In 1993, there were 81 categories.

(i) The awards given in 1958 is what per cent of the awards given in 1993?

(ii) The awards given in 1993 is what per cent of the awards given in 1958?

5. Out of a swarm of bees, one fifth settled on a blossom of *Kadamba*, one third on a flower of *Silindhiri,* and three times the difference between these two numbers flew to the bloom of *Kutaja*. Only ten bees were then left from the swarm. What was the number of bees in the swarm? (Note, *Kadamba, Silindhiri* and *Kutaja* are flowering trees. The problem is from the ancient Indian text on algebra.)

6. In computing the area of a square, Shekhar used the formula for area of a square, while his friend Maroof used the formula for the perimeter of a square. Interestingly their answers were numerically same. Tell me the number of units of the side of the square they worked on.

7. The area of a square is numerically less than six times its side. List some squares in which this happens.

8. Is it possible to have a right circular cylinder to have volume numerically equal to its curved surface area? If yes state when.

9. Leela invited some friends for tea on her birthday. Her mother placed some plates and some *puris* on a table to be served. If Leela places 4 *puris* in each plate 1 plate would be left empty. But if she places 3 *puris* in each plate 1 *puri* would be left. Find the number of plates and number of *puris* on the table.

10. Is there a number which is equal to its cube but not equal to its square? If yes find it.

11. Arrange the numbers from 1 to 20 in a row such that the sum of any two adjacent numbers is a perfect square.

Answers

2. $212\frac{1}{2}\text{ cm}^3$

3. $16\frac{2}{3}\%$

4. (i) 34.5% (ii) 289%

5. 150

6. 4 units

7. Sides = 1, 2, 3, 4, 5 units

8. Yes, when radius = 2 units

9. Number of *puris* = 16, number of plates = 5

10. – 1

11. One of the ways is, 1, 3, 6, 19, 17, 8 (1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9 etc.). Try some other ways.

4. జెర్మనీ అవార్డులు 1958లో ప్రారంభమైనవి. దీనిలో 28 విభాగాలలో అవార్డులు ఇచ్చేవారు. 1993 నుండి 81 విభాగాలలో అవార్డులు ఇస్తున్నారు.

(i) 1958లో ఇవ్వబడిన అవార్డులు 1993లో ఇచ్చిన అవార్డులలో ఎంత శాతం?

(ii) 1993లో ఇవ్వబడిన అవార్డులు 1958లో ఇచ్చిన అవార్డులలో ఎంత శాతం?

5. ఒక తుమ్మెదల సమూహంలో 5వ వంతు కదంబం పువ్వుల మీద, 3వ వంతు సిలింధిరి పువ్వుల మీద మరియు ఈ రెండు పువ్వుల సంఖ్య మధ్య భేదమునకు మూడు రెట్లు కుటజ (కొండ మల్లె) పువ్వుల మీద వాలినవి. కేవలం 10 తుమ్మెదలు సమూహం నుండి వేరుగా ఉండిపోయినవి. అయితే ఆ సమూహంలో మొత్తం తుమ్మెదల సంఖ్య ఎంత? (గమనిక: కదంబం, సిలింధిరి, కుటజ అనునవి పుష్పించే మొక్కలు. బీజగణితం మీద రాయబడిన ప్రాచీన భారత గణిత పాఠ్యపుస్తకం నుండి ఈ సమస్య తీసుకోబడింది.)

6. చతురస్ర వైశాల్యం కనుగొనుటలో శేఖర్ చతురస్ర వైశాల్యం సూత్రాన్ని ఉపయోగించగా, మరూఫ్ చతురస్ర చుట్టు కొలత సూత్రాన్ని ఉపయోగించాడు. ఆసక్తికరంగా, వారి ఇరువురి సమాధానాలు సంఖ్యాత్మకంగా సమానం అయితే వారిద్దరు ఉపయోగించిన చతురస్ర భుజపు కొలత ఎంత?

7. చతురస్రం యొక్క వైశాల్యము సంఖ్యాత్మకంగా భుజం పొడవుకు 6 రెట్లు కన్నా తక్కువ. ఇలా సాధ్యపడే కొన్ని చతురస్రాల జాబితాను పేర్కొనండి.

8. ఒక క్రమవృత్తాకార స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం సంఖ్యాత్మకంగా దాని వక్రతల వైశాల్యానికి సమానంగా ఉండుట సాధ్యమా? అయితే ఎప్పుడు సాధ్యం?

9. లీలా తన పుట్టిన రోజున తేనేటి విందుకు కొంత మంది స్నేహితులను ఆహ్వానించింది. లీలా తల్లి వారికి వడ్డించడానికి కొన్ని ప్లేట్లను, మరికొన్ని పూరీలను బల్లపై ఉంచారు. లీలా ప్రతి ప్లేటులో 4 పూరీలు ఉంచితే ఒక ప్లేటు ఖాళీగా మిగులుతుంది. కానీ ప్రతి ప్లేటులో 3 పూరీలు ఉంచితే ఒక పూరీ మిగులుతుంది. బల్లపై ఉంచిన ప్లేట్ల సంఖ్యను, పూరీల సంఖ్యను కనుగొనండి.

10. ఏదైనా సంఖ్య దాని ఘనానికి సమానమవుతూ, వర్గానికి సమానం కానిది ఉంటుందా? ఉంటే కనుగొనండి.

11. 1 నుండి 20 వరకు గల సంఖ్యలలో కొన్ని సంఖ్యలను ఉపయోగించి, ఏ రెండు ప్రక్క ప్రక్క సంఖ్యల మొత్తమైన ఒక ఖచ్చిత వర్గం అయ్యేటట్లుగా ఒక వరుసలో అమర్చండి.

జవాబులు

2. $212\frac{1}{2}$ సెం.మీ^{3}

3. $16\frac{2}{3}\%$

4. (i) 34.5% (ii) 289%

5. 150

6. 4 యూనిట్లు

7. భుజాలు = 1, 2, 3, 4, 5 యూనిట్లు

8. అవును, వ్యాసార్ధం = 2 యూనిట్లు అయినప్పుడు

9. పూరీల సంఖ్య = 16, ప్లేట్ల సంఖ్య = 5

10. – 1

11. ఒక పద్ధతి 1, 3, 6, 19, 17, 8 (1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9 etc.). మరికొన్ని ఇతర పద్దతులు ప్రయత్నించండి.

NOTES

NOTES

FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence.

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children. • Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expel from school till the completion of elementary education. • No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time. • Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.