State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

9th Class MATHEMATICS Semester (సెమిస్టర్) - 1

MATHEMATICS

గణితం శాస్త్రం

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Class 9

Semester (సెమిస్టర్) - 1

0962

सत्यमेव जयते

CONSTITUTION OF INDIA

Preamble

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens:

JUSTICE

Social, economic and political;

LIBERTY

of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY

of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY

assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation;

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY

this twenty-sixth day of November, 1949, do

HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION

భారత రాజ్యాంగం - పౌర విధులు

1. రాజ్యాంగమునకు బద్ధుడై వుండుట, దాని ఆదర్శాలను, సంస్థలను, జాతీయ పతాకమును,జాతీయ గీతమును గౌరవించుట;
2. జాతీయ స్వాతంత్ర్య పోరాటమునకు స్ఫూర్తినిచ్చిన ఉన్నతాదర్శములను మనస్సుయందు ఉంచుకొని వాటిని అనుసరించుట;
3. భారత సార్వభౌమత్వం, ఐక్యత, అఖండతను సమర్థించుట మరియు సంరక్షించుట.
4. దేశమును రక్షించుట మరియు కోరినపుడు జాతికి సేవ చేయుట;
5. భారత ప్రజల మధ్య మత, భాష, ప్రాంతీయ, వర్గ వైవిధ్యములను అధిగమించి, సామరస్యమును, సోదర భావమును పెంపొందించుట, స్త్రీల గౌరవం తగ్గించు ఆచారములను విడనాడుట;
6. మన ఉమ్మడి సంస్కృతినీ, సుసంపన్న సంప్రదాయాలను గౌరవించి రక్షించుట;
7. అడవులు, సరస్సులు, నదులు, అడవి జంతువులతో సహా ప్రాకృతిక పరిసరాలను కాపాడి అభివృద్ధి చేయుట మరియు సమస్త జీవుల యెడల కరుణార్ద్రత కలిగి వుండుట.
8. శాస్త్రీయ దృక్పథాన్ని, మానవతావాదాన్ని, జిజ్ఞాసను, సంస్కరణ తత్వాన్ని పెంపొందించుకొనటం;
9. ప్రజల ఆస్తిని సంరక్షించుట, హింసను విడనాడుట;
10. ప్రయత్నాలు, సాధనల ఉన్నతస్థాయిలను నిరంతరం అందుకొనునట్లుగా వైయక్తిక, సమిష్టి కార్య రంగాలన్నింటిలో శ్రేష్ఠత కోసం, కృషి చేయుట ప్రాథమిక కర్తవ్యమై వుండవలెను.
11. ఆరు నుండి పద్నాలుగు సంవత్సరముల వయస్సు కలిగిన బాలునికి లేదా బాలికకు తల్లి తండ్రి లేదా సంరక్షకునిగావున్న వ్యక్తి తనబిడ్డ లేదా సందర్భానుసారము తన సంరక్షితునికి విద్యార్జనకు అవకాశములు కల్పించవలెను.

(అధికరణం 51 A)

విద్యాహక్కు చట్టం

6 నుండి 14 సంవత్సరముల పిల్లలందరికి ఉచిత నిర్భంద ఎలిమెంటరీ విద్యనందించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇది ఏప్రిల్ 1, 2010 నుండి అమల్లోకి వచ్చింది.

చట్టంలోని ముఖ్యాంశాలు:

- పిల్లలందరికి అందుబాటులో పాఠశాలలను ఏర్పాటుచేయాలి.
- పాఠశాలలకు మౌలిక వసతులను కల్పించాలి.
- పిల్లలందరిని వయస్సుకు తగిన తరగతిలో చేర్పించాలి.
- వయస్సుకు తగ్గ తరగతిలో చేర్చిన తర్వాత తోటి వారితో సమానంగా ఉండటానికి ప్రత్యేకశిక్షణ ఇప్పించాలి.
- ప్రత్యేక అవసరాలు కల్గిన పిల్లలకు సాధారణ పిల్లలతోపాటు విద్యకొనసాగించడానికి తగువసతులు ఏర్పాట్లు చేయాలి.
- బడిలో చేర్చుకోడానికి ఎలాంటి పరీక్షలు నిర్వహించరాదు. ఎటువంటి రుసుము, చార్జీలు వసూలు చేయరాదు.
- బడిలో చేరిన పిల్లల పేరు తీసివేయడం, అదే తరగతిలో కొనసాగించడం చేయరాదు.
- పిల్లల్ని శారీరకంగా, మానసికంగా హింసించరాదు.
- వయస్సు నిర్ధారణ పత్రం, ఇతర ధృవీకరణ పత్రాలు లేవనే కారణం చేత పిల్లలకు బడిలో ప్రవేశాన్ని నిరాకరించరాదు.
- తగిన అర్హతలున్న వారిని మాత్రమే ఉపాధ్యాయులుగా నియమించాలి.
- పిల్లలు నిర్దేశించిన సామర్థ్యాలు సాధించేలా బోధనాభ్యసనం, మూల్యాంకనం ఉండాలి.
- ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పిల్లలకు ఎలాంటి బోర్డు పరీక్షలు నిర్వహించరాదు.
- పద్నాలుగు సంవత్సరాలు పూర్తయినప్పటికినీ, ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పాఠశాలలో పిల్లలు కొనసాగవచ్చును.
- బలహీన వర్గాలకు, ప్రతికూల పరిస్థితులను ఎదుర్కొంటున్న బృందాలకు చెందిన పిల్లలు ఏ విధమైన వివక్షతకు గురికాకుండా చూడాలి.
- రాజ్యాంగంలో పొందుపరిచిన విలువలకు అనుగుణంగా, విద్యార్థులను భయం, ఆందోళనకు గురిచేయని రీతిలో వారి సర్వతోముఖాభివృద్ధికి తోడ్పడే పాఠ్యప్రణాళిక రూపొందించాలి.

MATHEMATICS

Class IX (Semester - 1)

Text Book Development Committee

Sri **Praveen Prakash** IAS
Principal Secretary to Government
Department of School Education, AP

Sri. **S. Suresh Kumar** IAS
Commissioner of School Education , AP

Sri. **B. Srinivasa Rao** IAS
State Project Director, Samagra Shiksha, AP

Sri. **K. Ravindranath Reddy** MA., B.Ed.
Director, Government Textbook Press, AP

Dr. **B. Pratap Reddy** MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP

Programme Co-ordinators

Dr. **G. Kesava Reddy,** MSc, MSc, MEd, MPhil, PhD
Prof. C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri. **K. Satish Babu**
Professor, SCERT, AP

Sri. **S. Satish**
Leturer in Mathematics, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. **Ch.V.S. Ramesh Kumar**
Faculty, SCERT, AP

State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

First Published - 2023
New Impression - 2024

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 220 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Textbook Press
Amaravati
Andhra Pradesh

Translators

Sri G. Bhaskar Reddy, SA (Maths),
ZPHS, Venkatagiri, Tirupati

Sri A. Appanna, Lecturer (D),
Govt. DIET, Srikakulam

Sri P. Ravi Sankar, SA (Maths),
ZPHS, Komaragiri, Kakinada

Smt. Y. Jaya Bharati, SA (Maths),
ZPHS (G), Giddalur, Prakasam

Sri. Sd. Shahinsha, SA (Maths), MPLHS,
Ch.R. Palem, Bhimavaram, West Godavari

Dr. Ch. Ramesh, SA (Maths),
MPUPS, Vallabharaopalem, Guntur

Sri K. Madhusudhan, TGT (Maths),
APMS, Bandi Atmakur, Nandyal

Sri. H. Aruna siva Prasad, SA (Maths),
ZPHS, Mangalapalli, Chittoor

Smt. M. Sandhya Rani, SA (Maths),
KGBV, Gurla, Vizianagaram

Smt. P. Vijaya Kumari, TGT (Maths),
APMS, Dechavaram, Guntur

Sri. N. Prasad Babu, SA (Maths),
ZPHS, Agiripalli, Eluru

Editors for Translation

Dr. **D.S.N. Sastry,** Rtd. Principal,
AJ College of Education, Machilipatnam

Sri. **Kesiraju Srinivas**
Professor, SCERT, A.P

Dr. **P. Satyanarayana Sarma,** Rtd. Lecturer,
Montessori College of Education, Vijayawada

Sri. **M. Somasekhara Brahmanandam**
Faculty, SCERT, A.P

Sri. **S. Mahesh,** PGT,
JNV, Visakhapatnam (CBSE)

Sri. **A.S.V. Prabhakar**
Faculty, SCERT, A.P

Designing & Page Layout : Stock Assortment, Bapatla.

FOREWORD

The National Curriculum Framework (NCF) 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Rationalisation of Content in the Textbooks

In view of the COVID-19 pandemic, it is imperative to reduce content load on students. The National Education Policy 2020, also emphasises reducing the content load and providing opportunities for experiential learning with creative mindset. In this background, the NCERT has undertaken the exercise to rationalise the textbooks across all classes. Learning Outcomes already developed by the NCERT across classes have been taken into consideration in this exercise.

Contents of the textbooks have been rationalised in view of the following:

- Overlapping with similar content included in other subject areas in the same class
- Similar content included in the lower or higher class in the same subject
- Difficulty level
- Content, which is easily accessible to students without much interventions from teachers and can be learned by children through self-learning or peer-learning
- Content, which is irrelevant in the present context

This present edition, is a reformatted version after carrying out the changes given above.

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalaya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)

R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The council acknowledges the valuable inputs for analysing syllabi, textbooks and the content, proposed to be rationalised for this edition by Gupreet Bhatnagar, CBSE Resource Person; Rahul Sofat, CBSE Resource Person; Ashutosh K. Wazalwar, *Professor,* DESM, NCERT and T.P. Sarma, *Professor,* DESM, NCERT.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

NATIONAL ANTHEM

Jana gana mana adhinayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata
Panjaba Sindhu Gujarata Maratha
Dravida Utkala Banga
Vindhya Himachala Yamuna Ganga
uchchala jaladhi taranga
Tava Subha name jage, tave subha asisa mage,
gahe tava jaya gatha.
Jana gana mangala dayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

-Rabindranath Tagore

జాతీయ గీతం

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగా!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

PLEDGE | ప్రతిజ్ఞ

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా
నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధిలే నా ఆనందానికి మూలం.

- పైడిమర్రి వెంకటసుబ్బారావు

MATHEMATICS
గణితం
Class / తరగతి - IX
Semester (సెమిస్టర్) - I
CONTENTS / విషయ సూచిక

P7F9E2
Teacher Corner

R8N1Y9
Student Corner

0962CH01

CHAPTER 1

NUMBER SYSTEMS

1.1 Introduction

In your earlier classes, you have learnt about the number line and how to represent various types of numbers on it (see Fig. 1.1).

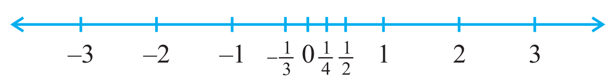


Fig. 1.1 : The number line

Just imagine you start from zero and go on walking along this number line in the positive direction. As far as your eyes can see, there are numbers, numbers and numbers!

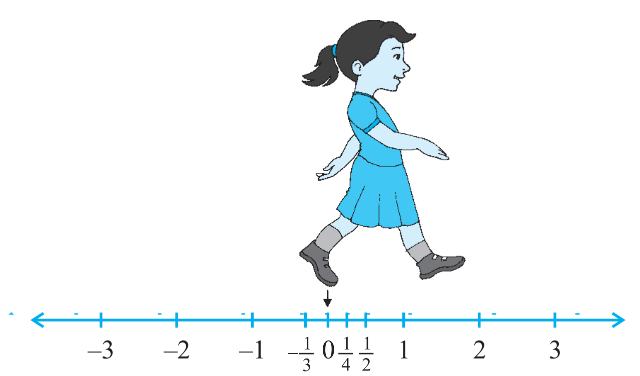


Fig. 1.2

Now suppose you start walking along the number line, and collecting some of the numbers. Get a bag ready to store them!

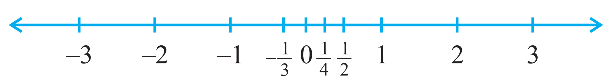
I8C6W6

అధ్యాయం 1

సంఖ్యామానం

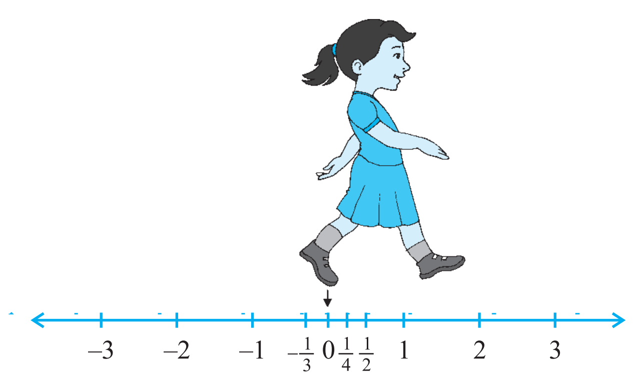
1.1 పరిచయం

మీ క్రింద తరగతులలో, మీరు సంఖ్యారేఖ గురించి మరియు దానిపై వివిధ రకాల సంఖ్యలను ఎలా సూచించాలో నేర్చుకున్నారు (పటం 1.1 చూడండి).



పటం. 1.1 : సంఖ్యారేఖ

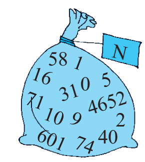
మీరు సున్నా నుండి ప్రారంభించి, సానుకూల దిశలో ఈ సంఖ్యారేఖ వెంటనడవడం కొనసాగించండి. మీ కనుచూపు మేరలో సంఖ్యలు (అనంతమైన సంఖ్యలు) ఉన్నాయి!



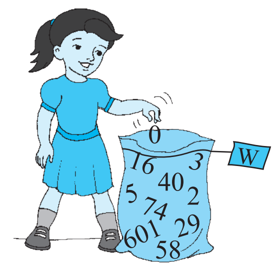
పటం. 1.2

ఇప్పుడు మీరు సంఖ్యారేఖ వెంబడి నడవడం మరియు కొన్ని సంఖ్యలను సేకరించడం ప్రారంభించారని అనుకుందాం. వాటిని సేకరించటానికి ఒక సంచిని సిద్ధం చేసుకోండి!

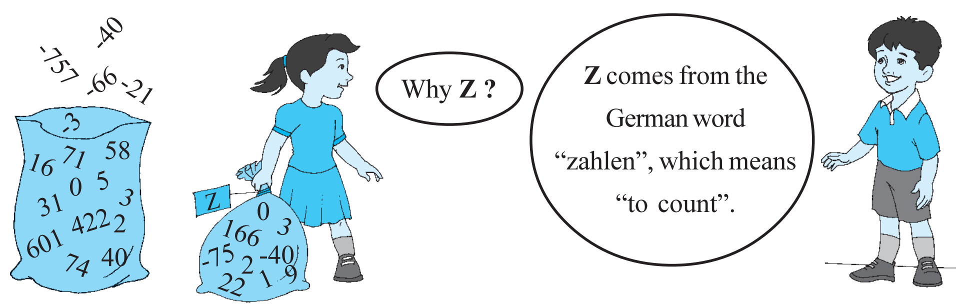
You might begin with picking up only natural numbers like 1, 2, 3, and so on. You know that this list goes on for ever. (Why is this true?) So, now your bag contains infinitely many natural numbers! Recall that we denote this collection by the symbol **N**.



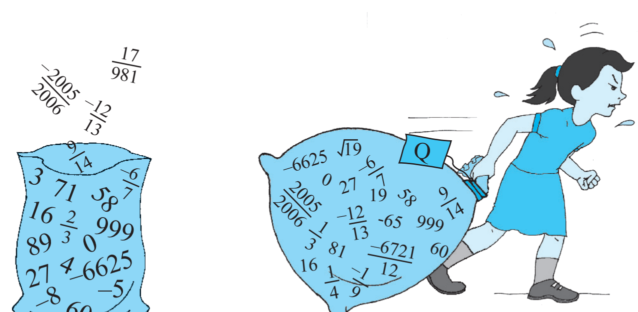
Now turn and walk all the way back, pick up zero and put it into the bag. You now have the collection of *whole numbers* which is denoted by the symbol **W.**



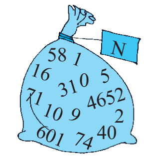
Now, stretching in front of you are many, many negative integers. Put all the negative integers into your bag. What is your new collection? Recall that it is the collection of all *integers*, and it is denoted by the symbol **Z**.



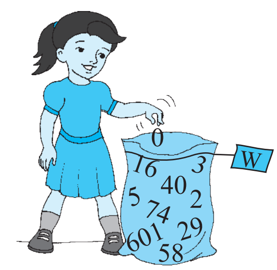
Are there some numbers still left on the line? Of course! There are numbers like $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, or even $\frac{-2005}{2006}$. If you put all such numbers also into the bag, it will now be the collection of *rational numbers.*



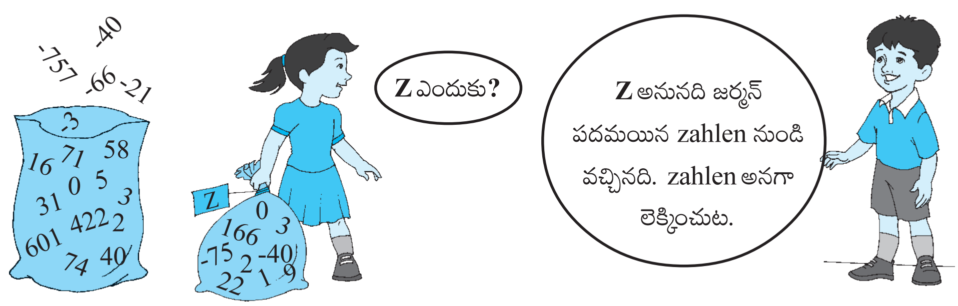
మీరు 1,2,3 వంటి సహజ సంఖ్యలను మాత్రమే ఎంచుకోవడంతో ప్రారంభించవచ్చు. ఈ జాబితా ఎప్పటికీ కొనసాగుతుందని మీరు గమనించగలరు. (ఇది ఎందుకు నిజం?) కాబట్టి, ఇప్పుడు మీ సంచిలో అనంతమైన సహజ సంఖ్యలు ఉన్నాయి. మనం ఈ సేకరణను **N** గుర్తుతో సూచిస్తాం అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.



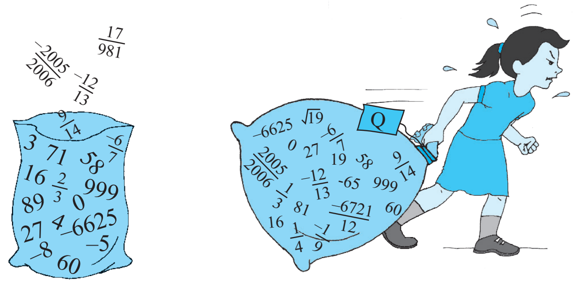
ఇప్పుడు వెనుకకు తిరిగి నడవండి మరియు '0' (సున్నా) ని ఎంచుకొని సంచిలో ఉంచండి. మీరు ఇప్పుడు **W** గుర్తుతో సూచించబడే పూర్ణాంకాల సేకరణను కలిగి ఉన్నారు.



ఇపుడు మీ ముందు చాలా చాలా ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు ఉండటం గమనిస్తారు. అన్ని ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలను మీ సంచిలో ఉంచండి. మీ ఈ కొత్త సేకరణను ఏమంటారో మీకు తెలుసు కదా? మీరు గుర్తుకు తెచ్చుకొన్నట్లయితే ఇవి అన్ని ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సేకరణ అని మరియు వీటిని **Z** గుర్తుతో సూచిస్తామని మీకు అవగతమవుతుంది.



సంఖ్యారేఖ పై ఇంకా కొన్ని సంఖ్యలు మిగిలి ఉన్నాయా? అయితే ఎటువంటి సంఖ్యలు మిగిలి ఉన్నాయి? $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, లేక $\frac{-2005}{2006}$ కూడా. మీరు ఈ సంఖ్యలను కూడా సంచిలో ఉంచినట్లయితే, ఈ కొత్త సంఖ్యల సేకరణను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.



The collection of rational numbers is denoted by **Q**. 'Rational' comes from the word 'ratio', and Q comes from the word 'quotient'.

You may recall the definition of rational numbers:

A number 'r' is called a *rational number,* if it can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. (Why do we insist that $q \neq 0$?)

Notice that all the numbers now in the bag can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. For example, –25 can be written as $\frac{-25}{1}$; here $p = -25$ and $q = 1$. Therefore, the rational numbers also include the natural numbers, whole numbers and integers.

You also know that the rational numbers do not have a unique representation in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. For example, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, and so on. These are *equivalent rational numbers* (*or fractions*). However, when we say that $\frac{p}{q}$ is a rational number, or when we represent $\frac{p}{q}$ on the number line, we assume that $q \neq 0$ and that p and q have no common factors other than 1 (that is, p and q are *co-prime*). So, on the number line, among the infinitely many fractions equivalent to $\frac{1}{2}$, we will choose $\frac{1}{2}$ to represent all of them.

Now, let us solve some examples about the different types of numbers, which you have studied in earlier classes.

Example 1 : Are the following statements true or false? Give reasons for your answers.

(i) Every whole number is a natural number.

(ii) Every integer is a rational number.

(iii) Every rational number is an integer.

Solution : (i) False, because zero is a whole number but not a natural number.

(ii) True, because every integer m can be expressed in the form $\frac{m}{1}$, and so it is a rational number.

(iii) False, because $\frac{3}{5}$ is not an integer.

వీటిని **Q** అనే గుర్తుతో సూచిస్తారు. 'అకరణీయ' అనే పదం 'నిష్పత్తి' అనే పదం నుండి వచ్చింది. మరియు **Q** అనేది 'భాగఫలం' అనే పదం నుండి వచ్చింది.

మీరు అకరణీయ సంఖ్యల నిర్వచనాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోవచ్చు.

'r' అనేది ఒక *అకరణీయ సంఖ్య* అనవలెనన్న 'r' ను $\frac{p}{q}$, రూపంలో రాయగలవలెను. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$. ($q \neq 0$ ఎందువలన?)

ఇప్పుడు గమనించినట్లయితే, సంచిలో ఉన్న అన్ని సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$, రూపంలో రాయగలం. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$. ఉదాహరణకు -25 ను $\frac{-25}{1}$; గా రాయవచ్చును. ఇక్కడ $p = -25$ మరియు $q = 1$ కాబట్టి సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణ సంఖ్యలు అన్నీ కూడా అకరణీయ సంఖ్యలలో చేర్చవచ్చును. అకరణీయ సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో p, q పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయ్యేవిధంగా ఒకటి కంటే ఎక్కువ విధాలుగా మనం రాయగలమని మీకు తెలుసు. ఉదాహరణకు, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, మొదలగునవి. ఇవి *సర్వ సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు (సర్వ సమాన భిన్నాలు).* $\frac{p}{q}$ ను అకరణీయ సంఖ్య అని చెప్పేటప్పుడు లేదా $\frac{p}{q}$ ను సంఖ్యారేఖ పై గుర్తించినపుడు మనం $q \neq 0$ అని p, q లకు 1 తప్ప మరి ఏ ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేవని అనుకొనవలెను (అనగా p మరియు q లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు) కాబట్టి సంఖ్యారేఖ పై $\frac{1}{2}$ కు సమానమైన అనంతమైన భిన్నాలను గుర్తించుటకు మనము $\frac{1}{2}$ ను ఎంచుకొంటాం.

ఇప్పుడు మనం క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న వివిధ రకాల సంఖ్యలకు సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలను క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమా లేక అసత్యమా? మీ సమాధానాలకు కారణాలను తెలియచేయండి.

(i) ప్రతి పూర్ణాంకం ఒక సహజ సంఖ్య అవుతుంది.

(ii) ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

(iii) ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

సాధన : (i) అసత్యం, ఎందువలన అనగా సున్నా అనేది పూర్ణాంకం కాని సహజ సంఖ్య కాదు.

(ii) సత్యం, ఎందువలన అనగా m అను ప్రతి పూర్ణ సంఖ్యను $\frac{m}{1}$ గా రాయవచ్చు. కాబట్టి ఇది అకరణీయ సంఖ్య.

(iii) అసత్యం, ఎందువలన అనగా $\frac{3}{5}$ అనేది పూర్ణ సంఖ్య కాదు.

Example 2 : Find five rational numbers between 1 and 2.

We can approach this problem in at least two ways.

Solution 1 : Recall that to find a rational number between r and s, you can add r and s and divide the sum by 2, that is $\frac{r+s}{2}$ lies between r and s. So, $\frac{3}{2}$ is a number between 1 and 2. You can proceed in this manner to find four more rational numbers between 1 and 2. These four numbers are $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ and $\frac{7}{4}$.

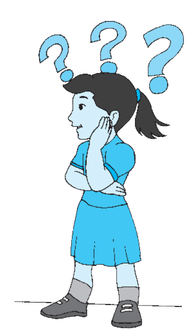
Solution 2 : The other option is to find all the five rational numbers in one step. Since we want five numbers, we write 1 and 2 as rational numbers with denominator 5 + 1, i.e., $1 = \frac{6}{6}$ and $2 = \frac{12}{6}$. Then you can check that $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ and $\frac{11}{6}$ are all rational numbers between 1 and 2. So, the five numbers are $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ and $\frac{11}{6}$.

Remark : Notice that in Example 2, you were asked to find five rational numbers between 1 and 2. But, you must have realised that in fact there are infinitely many rational numbers between 1 and 2. In general, **there are infinitely many rational numbers between any two given rational numbers**.

Let us take a look at the number line again. Have you picked up all the numbers? Not, yet. The fact is that there are infinitely many more numbers left on the number line! There are gaps in between the places of the numbers you picked up, and not just one or two but infinitely many. The amazing thing is that there are infinitely many numbers lying between any two of these gaps too!

So we are left with the following questions:

1. What are the numbers, that are left on the number line, called?
2. How do we recognise them? That is, how do we distinguish them from the rationals (rational numbers)?



These questions will be answered in the next section.

ఉదాహరణ 2 : 1 మరియు 2 ల మధ్య 5 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

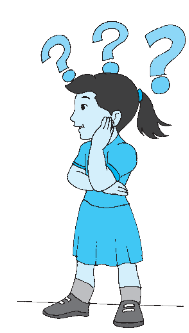
మనం ఈ సమస్యను కనీసం రెండు విధాలుగా సాధించవచ్చు.

సాధన 1: r మరియు s ల మధ్య ఉండు అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనుటకు మనం r మరియు s ల మొత్తాన్ని 2 తో భాగించవలెను, అనగా $\frac{r+s}{2}$ అనునది r మరియు s ల మధ్య ఉంటుంది. కాబట్టి $\frac{3}{2}$ అనే సంఖ్య 1 మరియు 2 ల మధ్య ఉంటుంది. మీరు ఈ పద్ధతిననుసరించి 1 మరియు 2 ల మధ్య మరో నాలుగు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుక్కోవచ్చు. అవి $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ మరియు $\frac{7}{4}$.

సాధన 2 : ఒకే దశలో మొత్తం ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనటం మరొక పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో మనం 1 మరియు 2 లను అకరణీయ సంఖ్యల రూపంలో 5+1=6 హారం గా గల సంఖ్యలుగా రాస్తాం. అనగా $1 = \frac{6}{6}$ మరియు $2 = \frac{12}{6}$ ఇప్పుడు మీరు గమనించినట్లయితే $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ మరియు $\frac{11}{6}$ అనేవి 1 మరియు 2 ల మధ్య గల అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు. కాబట్టి $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$. మరియు $\frac{11}{6}$ లు 1 మరియు 2 ల మధ్య గల ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలు.

గమనిక: ఉదాహరణ 2 లో, మీరు 1 మరియు 2 మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుక్కోమని అడిగారని గమనించండి. కానీ, వాస్తవానికి 1 మరియు 2 మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలున్నాయని మీరు గ్రహించి ఉండాలి. సాధారణంగా **ఏవైనా రెండు సంఖ్యల మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయి.**

సంఖ్యా రేఖను మరొసారి పరిశీలిద్దాం. మీరు అన్ని సంఖ్యలను తీసుకున్నారా? లేదు, ఇంకా వాస్తవం ఏమిటంటే, సంఖ్యా రేఖపై ఇంకా చాలా సంఖ్యలు మిగిలి ఉన్నాయి! మీరు ఎంచుకున్న సంఖ్యల స్థానాల మధ్య ఖాళీలు ఉన్నాయి మరియు ఒకటి లేదా రెండు మాత్రమే కాదు, అనంతంగా చాలా ఉన్నాయి. ఆశ్చర్యకరమైన విషయం ఏమిటంటే, ఈ రెండు ఖాళీల మధ్య కూడా అనంతమైన అనేక సంఖ్యలు ఉన్నాయి.



మన వద్ద ఇంకా కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలు మిగిలి ఉన్నాయి:

1. సంఖ్యారేఖ పై మిగిలి ఉన్న సంఖ్యలను ఏమని పిలుస్తారు?
2. మనం వాటిని ఎలా గుర్తిస్తాం? అంటే, మనం వాటిని అకరణీయాల నుండి (అకరణీయ సంఖ్యలు) ఎలా వేరు చేయాలి?

ఈ ప్రశ్నలకు తదుపరి విభాగంలో సమాధానాలు ఇవ్వబడతాయి.

EXERCISE 1.1

1. Is zero a rational number? Can you write it in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$?
2. Find six rational numbers between 3 and 4.
3. Find five rational numbers between $\frac{3}{5}$ and $\frac{4}{5}$.
4. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers.

   (i) Every natural number is a whole number.

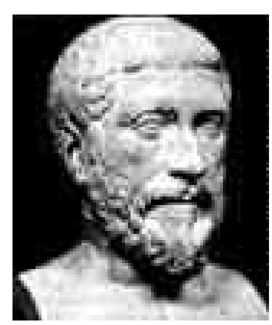
   (ii) Every integer is a whole number.

   (iii) Every rational number is a whole number.

1.2 Irrational Numbers

We saw, in the previous section, that there may be numbers on the number line that are not rationals. In this section, we are going to investigate these numbers. So far, all the numbers you have come across, are of the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$. So, you may ask: are there numbers which are not of this form? There are indeed such numbers.

The Pythagoreans in Greece, followers of the famous mathematician and philosopher Pythagoras, were the first to discover the numbers which were not rationals, around 400 BC. These numbers are called *irrational numbers* (*irrationals*), because they cannot be written in the form of a ratio of integers. There are many myths surrounding the discovery of irrational numbers by the Pythagorean, Hippacus of Croton. In all the myths, Hippacus has an unfortunate end, either for discovering that $\sqrt{2}$ is irrational or for disclosing the secret about $\sqrt{2}$ to people outside the secret Pythagorean sect!



Pythagoras
(569 BCE – 479 BCE)
Fig. 1.3

Let us formally define these numbers.

A number 's' is called *irrational,* if it cannot be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

అభ్యాసం 1.1

1. సున్నా అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుందా? p మరియు q లు పూర్ణసంఖ్యలు, $q \neq 0$ అయినప్పుడు $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలరా?

2. 3 మరియు 4 ల మధ్య ఆరు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

3. $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{5}$ ల మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి..

4. క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమా లేక అసత్యమా? మీ సమాధానాలకు కారణాలను తెలియచేయండి.

(i) ప్రతి సహజ సంఖ్య పూర్ణాంకం

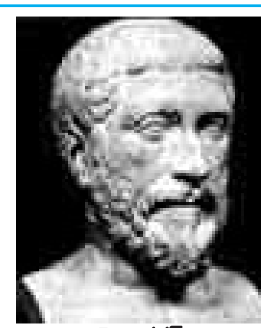
(ii) ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య ఒక పూర్ణాంకం.

(iii) ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్ణాంకం.

1.2 కరణీయ సంఖ్యలు :

ముందు విభాగంలో సంఖ్యా రేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యలు ఉండవచ్చని మనం చూశాం. ఈ విభాగంలో మనం ఈ సంఖ్యల గురించి పరిశోధించబోతున్నాం. ఇప్పటివరకు అన్నీ మీరు చూసిన సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉన్నాయి. ఇక్కడ p మరియు qలు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$. కాబట్టి మీరు అడగవచ్చు, ఈ రూపంలో లేని సంఖ్యలున్నాయా? వాస్తవానికి అలాంటి సంఖ్యలు ఉన్నాయి.

గ్రీస్‌లోని పైథాగరియన్లు ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు మరియు తత్వవేత్త. పైథాగరస్ యొక్క అనుచరులు. 400 బి.సి.లో, అకరణీయం కాని సంఖ్యలను మొదటిసారి కనుగొన్నారు. ఈ సంఖ్యలను *కరణీయ సంఖ్యలు (కరణీయాలు)* అని పిలుస్తారు. ఎందుకంటే అవి పూర్ణసంఖ్యల నిష్పత్తి రూపంలో రాయబడవు. పైథాగరియన్, క్రోటన్‌కు చెందిన హిప్పకస్ చేత కరణీయ సంఖ్యల ఆవిష్కరణ చుట్టూ అనేక కల్పిత గాథలు ఉన్నాయి. ఎందుకంటే $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య అని కనుగొనడం వల్లగాని, లేదా $\sqrt{2}$ గురించి రహస్యాన్ని పైథాగరియన్ శాఖ వెలుపలి వ్యక్తులకు వెల్లడించడం వల్లగాని, అన్ని కల్పిత గాథలలో, హిప్పకస్ ముగింపు ఒక దురదృష్టకర గాథ.



పైథాగరస్
(క్రీ.పూ 569 – క్రీ.పూ 479)
పటం. 1.3

ఈ సంఖ్యలను అధికారికంగా నిర్వచిద్దాం.

's' అను సంఖ్యను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్రాయలేనిచో దానిని *కరణీయ సంఖ్య* అని పిలుస్తాం. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

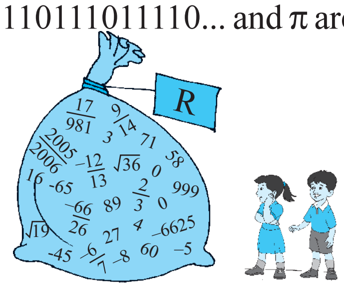
You already know that there are infinitely many rationals. It turns out that there are infinitely many irrational numbers too. Some examples are:

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

Remark : Recall that when we use the symbol $\sqrt{\ }$, we assume that it is the positive square root of the number. So $\sqrt{4} = 2$, though both 2 and –2 are square roots of 4.

Some of the irrational numbers listed above are familiar to you. For example, you have already come across many of the square roots listed above and the number π.

The Pythagoreans proved that $\sqrt{2}$ is irrational. Later in approximately 425 BC, Theodorus of Cyrene showed that $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ and $\sqrt{17}$ are also irrationals. Proofs of irrationality of $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc., shall be discussed in Class X. As to π, it was known to various cultures for thousands of years, it was proved to be irrational by Lambert and Legendre only in the late 1700s. In the next section, we will discuss why 0.10110111011110... and π are irrational.



Let us return to the questions raised at the end of the previous section. Remember the bag of rational numbers. If we now put all irrational numbers into the bag, will there be any number left on the number line? The answer is no! It turns out that the collection of all rational numbers and irrational numbers together make up what we call the collection of *real numbers*, which is denoted by **R**. Therefore, a real number is either rational or irrational. So, we can say that **every real number is represented by a unique point on the number line. Also, every point on the number line represents a unique real number**. This is why we call the number line, the *real number line*.

R. Dedekind (1831-1916)

Fig. 1.4

In the 1870s two German mathematicians, Cantor and Dedekind, showed that : Corresponding to every real number, there is a point on the real number line, and corresponding to every point on the number line, there exists a unique real number.

G. Cantor (1845-1918)

Fig. 1.5

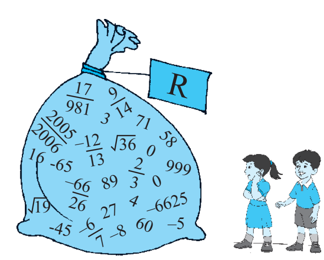
అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నాయని మీకు ఇప్పటికే తెలుసు. అదేవిధముగా అనంతమైన కరణీయ సంఖ్యలు కూడా ఉన్నాయని తెలుస్తుంది. కొన్ని ఉదాహరణలు:

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

సూచన: మనం గుర్తు చేసుకొన్నట్లయితే $\sqrt{\ }$, గుర్తును ఉపయోగించిన సందర్భంలో అది సంఖ్య యొక్క ధన వర్గ మూలం అని భావిస్తాం. $\sqrt{4}=2$ గా రాసినప్పటికీ 2 మరియు −2 లు $\sqrt{4}$ యొక్క వర్గమూలాలు.

పైన ఇవ్వబడిన కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలు మీకు తెలుసు. ఉదాహరణకు పైన పేర్కొనిన చాలా వర్గమూలాలు మరియు π అను సంఖ్య గురించి మీకు తెలుసు.

$\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని పైథాగారన్‌లు నిరూపించారు. తరువాత సుమారు క్రీ.పూ. 425 లలో సైరిన్‌కు చెందిన థియోడోరస్ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ మరియు $\sqrt{17}$ అనునవి కూడా కరణీయ సంఖ్యలుగా చూపించారు. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ మొదలగు వాటి నిరూపణలు 10వ తరగతిలో చర్చించబడతాయి. π విషయానికొస్తే, ఇది అనేక సంస్కృతుల వారికి వేలాది సంవత్సరాలుగా తెలుసు, ఇది 1700ల చివరలో లాంబెర్ట్ మరియు లెజెండ్రే చేత 'కరణీయ సంఖ్య' అని నిరూపించబడింది. తదుపరి విభాగంలో, 0.10110111011110... మరియు π కరణీయ సంఖ్యలు ఎందుకో చర్చిస్తాం.

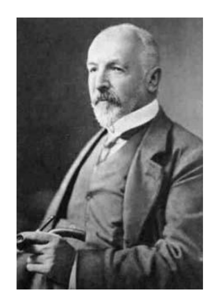


ముందు విభాగం చివరలో లేవనెత్తిన ప్రశ్నలకు తిరిగి వెళ్దాం. అకరణీయ సంఖ్యల సంచిని గుర్తుకుతెచ్చుకోండి. మనం ఇప్పుడు అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను సంచిలో ఉంచినట్లయితే, సంఖ్యారేఖపై ఏదైనా సంఖ్య మిగిలి ఉంటుందా? జవాబుగా, 'లేదు' అని సమాధానం చెబుతాం. అన్ని అకరణీయ సంఖ్యల, మరియు కరణీయ సంఖ్యల సేకరణను కలిపి మనం వాస్తవ సంఖ్యల సేకరణ అని పిలుస్తాం. దీనిని **R** అనే అక్షరం తో సూచిస్తాం. కాబట్టి, వాస్తవ సంఖ్య ఒక కరణీయ లేదా అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కాబట్టి **ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యను సంఖ్యా రేఖపై ఒక ప్రత్యేక బిందువు తో గుర్తించవచ్చని మనం చెప్పగలం. అలాగే, సంఖ్యా రేఖపై ఉన్న ప్రతి బిందువు ప్రత్యేక వాస్తవ సంఖ్యను సూచిస్తుంది.** అందుకే మనం సంఖ్యారేఖను వాస్తవ సంఖ్యా రేఖ అని పిలుస్తాం.

ఆర్. డెడికైండ్ (1831-1916)

పటం 1.4

1870 లలో ఇద్దరు జర్మన్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు కాంటర్ మరియు డెడికైండ్ ఇలా చెప్పారు: " ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు అనుగుణంగా, వాస్తవ సంఖ్య రేఖపై ఒక బిందువు ఉంటుంది మరియు సంఖ్యారేఖలోని ప్రతి బిందువుకు అనుగుణంగా, ఒక ప్రత్యేక వాస్తవ సంఖ్య ఉంటుంది"



జి. కాంటర్ (1845-1918)

పటం 1.5

Let us see how we can locate some of the irrational numbers on the number line.

Example 3 : Locate $\sqrt{2}$ on the number line.

Solution : It is easy to see how the Greeks might have discovered $\sqrt{2}$. Consider a square OABC, with each side 1 unit in length (see Fig. 1.6). Then you can see by the Pythagoras theorem that OB = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. How do we represent $\sqrt{2}$ on the number line? This is easy. Transfer Fig. 1.6 onto the number line making sure that the vertex O coincides with zero (see Fig. 1.7).

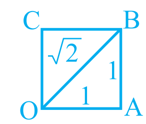


Fig. 1.6

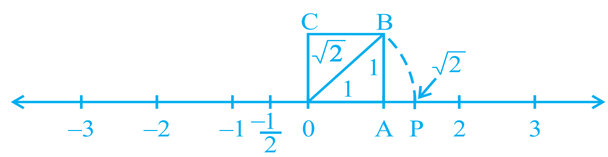


Fig. 1.7

We have just seen that OB = $\sqrt{2}$. Using a compass with centre O and radius OB, draw an arc intersecting the number line at the point P. Then P corresponds to $\sqrt{2}$ on the number line.

Example 4 : Locate $\sqrt{3}$ on the number line.

Solution : Let us return to Fig. 1.7.

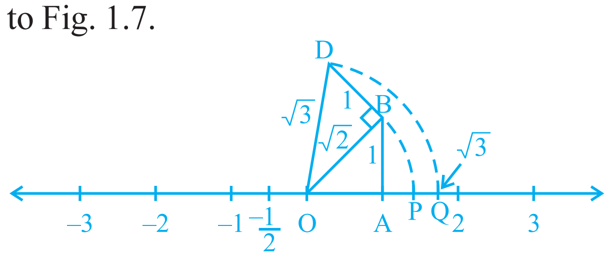


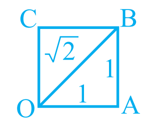
Fig. 1.8

Construct BD of unit length perpendicular to OB (as in Fig. 1.8). Then using the Pythagoras theorem, we see that OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ Using a compass, with centre O and radius OD, draw an arc which intersects the number line at the point Q. Then Q corresponds to $\sqrt{3}$.

సంఖ్యారేఖ పై కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తించవచ్చునో ఇప్పుడు చూద్దాం.

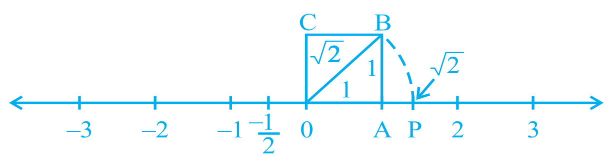
ఉదాహరణ 3 : $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యా రేఖ పై సూచించండి.

సాధన : గ్రీకులు $\sqrt{2}$ ను ఎలా కనుగొన్నారో చూడటం సులభం.



పటం. 1.6

ఒక యూనిట్ భుజంగా గల చతురస్రం OABCని (పటం 1.6 చూడండి) తీసుకోండి. పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని అనుసరించి $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ కాని $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖ పై ఎలా చూపగలం? ఇది చాలా సులభం. పటం 1.6 లోని శీర్షం '0' సంఖ్యారేఖ పై O తో ఏకీభవించినట్లు ఉంచండి (పటం 1.7 చూడండి).

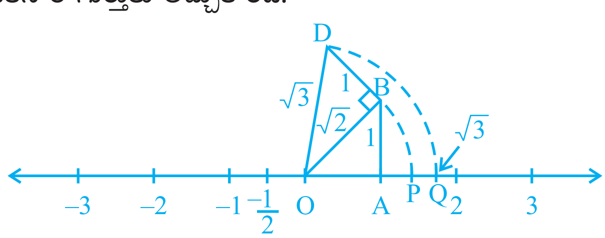


పటం 1.7

$OB = \sqrt{2}$ అని మనకు తెలుసు. ఒక వృత్తలేఖినిని ఉపయోగించి O కేంద్రంగా OB, వ్యాసార్థంలో సంఖ్యను P బిందువు వద్ద ఖండించినట్లు ఒక చాపాన్ని గీయండి. ఇప్పుడు P బిందువు సంఖ్యారేఖ పై $\sqrt{2}$ ను సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 4 : $\sqrt{3}$ ను సంఖ్యారేఖ పై సూచించండి.

సాధన : పటం 1.7 ను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.



పటం 1.8

పటము 1.8లో 1 యూనిట్ పొడవు గల **BD** ని **OB** కి లంబంగా ఉండేవిధంగా గీయండి. ఇప్పుడు పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\mathbf{OD} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ఒక వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి **O** కేంద్రంగా **OD** వ్యాసార్థంలో సంఖ్యారేఖను **Q** బిందువు వద్ద ఖండించునట్లు ఒక చాపాన్ని గీయండి. ఇప్పుడు Q బిందువు సంఖ్యారేఖ పై $\sqrt{3}$ ను సూచిస్తుంది.

In the same way, you can locate $\sqrt{n}$ for any positive integer n, after $\sqrt{n-1}$ has been located.

EXERCISE 1.2

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answers.

   (i) Every irrational number is a real number.

   (ii) Every point on the number line is of the form $\sqrt{m}$, where m is a natural number.

   (iii) Every real number is an irrational number.

2. Are the square roots of all positive integers irrational? If not, give an example of the square root of a number that is a rational number.

3. Show how $\sqrt{5}$ can be represented on the number line.

4. **Classroom activity (Constructing the 'square root spiral') :** Take a large sheet of paper and construct the 'square root spiral' in the following fashion. Start with a point O and draw a line segment OP_1 of unit length. Draw a line segment P_1P_2 perpendicular to OP_1 of unit length (see Fig. 1.9). Now draw a line segment P_2P_3 perpendicular to OP_2. Then draw a line segment P_3P_4 perpendicular to OP_3. Continuing in this manner, you can get the line segment $P_{n-1}P_n$ by drawing a line segment of unit length perpendicular to OP_{n-1}. In this manner, you will have created the points P_2, P_3,...., P_n,... ., and joined them to create a beautiful spiral depicting $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...$

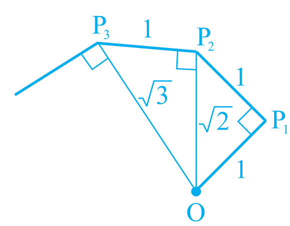


Fig. 1.9 : Constructing square root spiral

1.3 Real Numbers and their Decimal Expansions

In this section, we are going to study rational and irrational numbers from a different point of view. We will look at the decimal expansions of real numbers and see if we can use the expansions to distinguish between rationals and irrationals. We will also explain how to visualise the representation of real numbers on the number line using their decimal expansions. Since rationals are more familiar to us, let us start with them. Let us take three examples : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$.

Pay special attention to the remainders and see if you can find any pattern.

ఇదేవిధముగా ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య nకు, $\sqrt{n-1}$ ను సంఖ్యారేఖ పై సూచించిన తర్వాత, $\sqrt{n}$ ను సూచించవచ్చు.

అభ్యాసం 1.2

1. క్రింది ప్రవచనాలు సత్యమా? అసత్యమా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

(i) ప్రతి కరణీయ సంఖ్య ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

(ii) సంఖ్యారేఖ పై ప్రతి బిందువు $\sqrt{m}$, రూపంలో ఉంటుంది. ఇక్కడ m అనునది ఒక సహజ సంఖ్య.

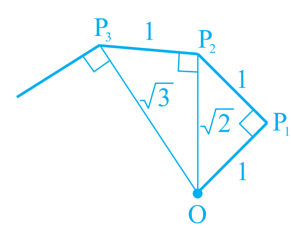
(iii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యా ఒక కరణీయ సంఖ్య.

2. ప్రతి పూర్ణ సంఖ్య యొక్క ధనాత్మక వర్గ మూలము కరణీయమా? కానట్లయితే ఒక పూర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము అకరణీయ సంఖ్య అయ్యే ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

3. $\sqrt{5}$ ను సంఖ్యారేఖ పై ఎలా గుర్తిస్తారో చూపండి.

4. **తరగతి కృత్యం: ("వర్గమూల సర్పిలం" ను నిర్మించుట):**

ఒక పెద్ద సైజు కాగితాన్ని తీసుకొని క్రింద సూచించిన సోపానాలను అనుసరించి వర్గమూల సర్పిలంను నిర్మించండి. O బిందువు నుండి ప్రారంభించి 1 యూనిట్ పొడవు గల రేఖాఖండం OP_1 ని గీయండి. OP_1 కు లంబంగా 1 యూనిట్ పొడవులో రేఖాఖండం గీయండి. $P_1 P_2$ (పటం 1.9 ని చూడండి) ఇప్పుడు OP_2కు లంబంగా రేఖాఖండం P_2P_3ను గీయండి. అదేవిధంగా OP_3కి లంబంగా రేఖాఖండం $P_3 P_4$ను గీయండి. ఈవిధముగా కొనసాగించిన ఒక యూనిట్ కొలతతో OP_{n-1} కు లంబంగా గీచినపుడు మనకు $P_{n-1}P_n$ రేఖా ఖండం వచ్చును. ఈవిధంగా మనం $P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots$, బిందువులను నిర్మించి వాటిని కలిపినప్పుడు అందమయిన సర్పిలం $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ లను సూచిస్తుంది.



పటం 1.9 : వర్గమూల సర్పిలం నిర్మించుట

1.3 వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వాని యొక్క దశాంశ విస్తరణ

ఈ విభాగంలో, మనం భిన్నమైన కోణం నుండి అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలను అధ్యయనం చేయబోతున్నాం. మనం వాస్తవ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణను పరిశీలించడం మరియు అకరణీయ సంఖ్యలను, కరణీయ సంఖ్యలను వేరు చేయటానికి ఈ వాస్తవ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణ ఉపయోగించవచ్చునో లేదో చూద్దాం. వాస్తవ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణను ఉపయోగించి సంఖ్యారేఖ పై వాస్తవ సంఖ్యలను ఎలా గుర్తించాలో దృశ్య రూపంలో వివరిస్తాం. అకరణీయ సంఖ్యలు గురించి మనకు బాగా తెలుసు కాబట్టి వాటితో ప్రారంభిద్దాం. మూడు ఉదాహరణలను తీసుకుందాం. $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$. ఏదైనా క్రమాన్ని గమనించారా!

Example 5 : Find the decimal expansions of $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ and $\frac{1}{7}$.

Solution :

$$\begin{array}{r|l} & 3.333\ldots \\ \hline 3 & 10 \\ & \;9 \\ \hline & 10 \\ & \;9 \\ \hline & 10 \\ & \;9 \\ \hline & \;\;10 \\ & \;\;\;9 \\ \hline & \;\;\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & 64 \\ \hline & \;60 \\ & \;56 \\ \hline & \;\;40 \\ & \;\;40 \\ \hline & \;\;\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.142857\ldots \\ \hline 7 & 1.0 \\ & \;7 \\ \hline & \;30 \\ & \;28 \\ \hline & \;\;20 \\ & \;\;14 \\ \hline & \;\;\;60 \\ & \;\;\;56 \\ \hline & \;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;35 \\ \hline & \;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;49 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;1 \end{array}$$

Remainders : 1, 1, 1, 1, 1...
Divisor : 3

Remainders : 6, 4, 0
Divisor : 8

Remainders : 3, 2, 6, 4, 5, 1,
3, 2, 6, 4, 5, 1,...
Divisor : 7

What have you noticed? You should have noticed at least three things:

(i) The remainders either become 0 after a certain stage, or start repeating themselves.

(ii) The number of entries in the repeating string of remainders is less than the divisor (in $\frac{10}{3}$ one number repeats itself and the divisor is 3, in $\frac{1}{7}$ there are six entries 326451 in the repeating string of remainders and 7 is the divisor).

(iii) If the remainders repeat, then we get a repeating block of digits in the quotient (for $\frac{10}{3}$, 3 repeats in the quotient and for $\frac{1}{7}$, we get the repeating block 142857 in the quotient).

ఉదాహరణ 5 : $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ మరియు $\frac{1}{7}$ల దశాంశ విస్తరణను కనుగొనండి.

సాధన :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.333... \\ \hline
3 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.875 \\ \hline
8 & 7.0 \\
 & \underline{64} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{40} \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.142857... \\ \hline
7 & 1.0 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 1
\end{array}
$$

శేషములు : 1, 1, 1, 1, 1...
విభాజకం : 3

శేషములు : 6, 4, 0
విభాజకం : 8

శేషములు : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1,...
విభాజకం : 7

మీరు ఏం గమనించారు? మీరు కనీసం మూడు విషయాలను గమనించి ఉండాలి.

(i) ఒక నిర్దిష్ట దశ తరువాత శేషం '0' గా మారుతాయి లేదా అవి పునరావృతము అవుతాయి.

(ii) శేషముల పునరావృత వరుసలో ఉన్న సంఖ్యలు విభాజకము కంటే తక్కువగా ఉంటాయి. ($\frac{10}{3}$ లో ఒక సంఖ్య పునరావృతమవుతుంది మరియు విభాజకం 7 అయిన $\frac{1}{7}$ లో శేషాల పునరావృత వరుసలో ఆరు అంకెలు ఉన్నాయి అవి 326451).

(iii) శేషములు పునరావృతమైనట్లయితే భాగాఫలంలో అంకెలు పునరావృతమవుతాయి. ($\frac{10}{3}$ యొక్క భాగఫలంలో 3 పునరావృతమవుతుంది. $\frac{1}{7}$ యొక్క భాగఫలంలో 1,4,2,8,5,7లు పునరావృతం అవుతున్నాయి)

Although we have noticed this pattern using only the examples above, it is true for all rationals of the form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$. On division of p by q, two main things happen – either the remainder becomes zero or never becomes zero and we get a repeating string of remainders. Let us look at each case separately.

Case (i) : The remainder becomes zero

In the example of $\frac{7}{8}$, we found that the remainder becomes zero after some steps and the decimal expansion of $\frac{7}{8} = 0.875$. Other examples are $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$. In all these cases, the decimal expansion terminates or ends after a finite number of steps. We call the decimal expansion of such numbers *terminating*.

Case (ii) : The remainder never becomes zero

In the examples of $\frac{10}{3}$ and $\frac{1}{7}$, we notice that the remainders repeat after a certain stage forcing the decimal expansion to go on for ever. In other words, we have a repeating block of digits in the quotient. We say that this expansion is non-terminating recurring. For example, $\frac{10}{3} = 3.3333...$ and $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$

The usual way of showing that 3 repeats in the quotient of $\frac{10}{3}$ is to write it as $3.\overline{3}$. Similarly, since the block of digits 142857 repeats in the quotient of $\frac{1}{7}$, we write $\frac{1}{7}$ as $0.\overline{142857}$, where the bar above the digits indicates the block of digits that repeats. Also 3.57272... can be written as $3.5\overline{72}$. So, all these examples give us *non-terminating recurring* (*repeating*) decimal expansions.

Thus, we see that the decimal expansion of rational numbers have only two choices: either they are terminating or non-terminating recurring.

Now suppose, on the other hand, on your walk on the number line, you come across a number like 3.142678 whose decimal expansion is terminating or a number like 1.272727... that is, $1.\overline{27}$, whose decimal expansion is non-terminating recurring, can you conclude that it is a rational number? The answer is yes!

పై ఉదాహరణలను మాత్రమే ఉపయోగించి ఈ నమూనాలను మనం గమనించినప్పటికీ, ఇది $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ రూపంలో ఉన్న అకరణీయ సంఖ్యలు అన్నింటికి నిజమవుతుంది లేదా వర్తిస్తుంది. p ని q తో భాగించినప్పుడు రెండు ప్రధాన విషయాలు జరుగుతాయి. శేషం సున్నా అవుతుంది లేదా శేషం సున్నా కాదని పొందుతాం. పునరావృతం అయ్యే శేషాల వరుసను మనం పొందుతాం. ప్రతి విషయాన్ని వివరంగా చూద్దాం.

సందర్భం (i) : శేషము సున్నా అవుతుంది

$\frac{7}{8}$ యొక్క ఉదాహరణలో కొన్ని సోపానాల తర్వాత శేషము సున్నా అవుతుంది మరియు $\frac{7}{8}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణ $\frac{7}{8} = 0.875$. మరికొన్ని ఉదాహరణలు $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$. ఈ సందర్భాలన్నింటిలో దశాంత విస్తరణ పరిమిత సోపానాల తరువాత ముగుస్తుంది. లేక అంతం అవుతుంది. మనం ఇటువంటి దశాంశ విస్తరణను అంతమయ్యే దశాంశాలు అని పిలుస్తాం.

సందర్భం(ii) : శేషము ఎప్పటికి సున్నా కాదు

$\frac{10}{3}$ మరియు $\frac{1}{7}$ యొక్క ఉదాహరణలలో ఒక నిర్దిష్టదశ తరువాత శేషాలు ఎప్పటికీ పునరావృతం అవుతూనే దశాంశ విస్తరణ ఎప్పటికి కొనసాగుతూనే ఉంటుంది. మరోవిధంగా చెప్పాలంటే మనం భాగ ఫలంలో పునరావృతమయ్యే అంకెల సమూహం ఉంది. ఈ దశాంశ విస్తరణలను "అంతంకాని దశాంశాలు" అని మనము చెబుతాం.

ఉదాహరణకు $\frac{10}{3} = 3.3333...$ మరియు $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$

సాధారణంగా $\frac{10}{3}$ యొక్క భాగాఫలాన్ని 3 పునరావృతం అగుటను $3.\overline{3}$ గా రాస్తాం. అదేవిధంగా $\frac{1}{7}$ యొక్క భాగఫలంలో 142857 అనునవి పునరావృతమయ్యే అంకెల సమూహం. దీనిని సూచించుటను మనం $\frac{1}{7}$ ను $0.\overline{142857}$ గా రాస్తాం. అంకెలపై గల గీత పునరావృతమయ్యే అంకెల సమూహాన్ని సూచిస్తుంది. అలాగే 3.57272... ను $3.5\overline{72}$ గా రాయవచ్చును. కాబట్టి ఈ ఉదాహరణలన్నీ కూడా మనకు *అంతం కాని ఆవృతమయ్యే* దశాంశ విస్తరణలు.

ఈవిధంగా అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ విస్తరణలో కేవలం రెండు సందర్భాలు మాత్రమే ఉంటాయి. అవి అంతం అయ్యే దశాంశాలు (లేక) అంతం కాని ఆవృతమయ్యే దశాంశాలు.

ఇప్పుడు మరోవైపు సంఖ్యారేఖ పై మీరు 3.142678 వంటి సంఖ్యను చూసారనుకోండి. దీని దశాంశ విస్తరణ ముగుస్తుంది. లేదా 1.272727... వంటి సంఖ్య అనగా $1.\overline{27}$, దీని దశాంశ విస్తరణ అంతం కాని ఆవృతమయ్యే దశాంశం అవుతుంది. ఇది అకరణీయ సంఖ్య అని మీరు నిర్ధారించగలరా? సమాధానం అవుతుంది.

We will not prove it but illustrate this fact with a few examples. The terminating cases are easy.

Example 6 : Show that 3.142678 is a rational number. In other words, express 3.142678 in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : We have $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$, and hence is a rational number.

Now, let us consider the case when the decimal expansion is non-terminating recurring.

Example 7 : Show that $0.3333... = 0.\overline{3}$ can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : Since we do not know what $0.\overline{3}$ is , let us call it 'x' and so

$$x = 0.3333...$$

Now here is where the trick comes in. Look at

$$10\,x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

Now, $\quad 3.3333... = 3 + x$, since $x = 0.3333...$

Therefore, $\quad 10\,x = 3 + x$

Solving for x, we get

$$9x = 3, \text{ i.e., } x = \frac{1}{3}$$

Example 8 : Show that $1.272727... = 1.\overline{27}$ can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : Let $x = 1.272727...$ Since two digits are repeating, we multiply x by 100 to get

$$100\,x = 127.2727...$$

So, $\quad 100\,x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

Therefore, $\quad 100\,x - x = 126, \text{ i.e., } 99\,x = 126$

i.e., $\quad x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

దానిని మనం నిరూపించలేం. కానీ ఈ వాస్తవాన్ని కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివరిస్తాం. అంతమయ్యే దశాంశాల సందర్భం మనకు సులభం.

ఉదాహరణ 6 : 3.142678 ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని చూపండి. మరొక మాటలలో 3.142678 ని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. ఇక్కడ p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

సాధన : మనకు $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$, కాబట్టి ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

ఇప్పుడు మనం అంతం కాని ఆవృతమయ్యే దశాంశ విస్తరణ యొక్క సందర్భాన్ని తీసుకొందాం.

ఉదాహరణ 7 : p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయితే $0.3333... = 0.\overline{3}$ ను $\frac{p}{q}$, రూపంలో చూపండి.

సాధన : మనకు $0.\overline{3}$ విలువ తెలియదు కాబట్టి దానిని 'x' అనుకోండి. కాబట్టి

$$x = 0.\overline{3} = 0.3333...$$

$$10\,x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

ఇప్పుడు, $3.3333... = 3 + x,\ x = 0.3333...$ కాబట్టి

అదేవిధంగా $10\,x = 3 + x$

$$9x = 3, \text{ కనుక., } x = \frac{1}{3}$$

ఉదాహరణ 8 : p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయితే $1.272727... = 1.\overline{27}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలమని నిరూపించండి.

సాధన : $x = 1.272727...$ అనుకోండి. ఇక్కడ రెండు అంకెలు పునరావృతం అవుతున్నాయి. కాబట్టి x ను పై 100తో గుణించగా, మనకు $100\,x = 127.2727...$

కాబట్టి , $100\,x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

$$100\,x - x = 126, \text{ i.e., } 99\,x = 126$$

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

You can check the reverse that $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$.

Example 9 : Show that 0.2353535... = $0.2\overline{35}$ can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Solution : Let $x = 0.2\overline{35}$. Over here, note that 2 does not repeat, but the block 35 repeats. Since two digits are repeating, we multiply x by 100 to get

$$100\,x = 23.53535...$$

So, $$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

Therefore, $$99\,x = 23.3$$

i.e., $$99\,x = \frac{233}{10}, \text{ which gives } x = \frac{233}{990}$$

You can also check the reverse that $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$.

So, every number with a non-terminating recurring decimal expansion can be expressed in the form $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$), where p and q are integers. Let us summarise our results in the following form

The decimal expansion of a rational number is either terminating or non-terminating recurring. Moreover, a number whose decimal expansion is terminating or non-terminating recurring is rational.

So, now we know what the decimal expansion of a rational number can be. What about the decimal expansion of irrational numbers? Because of the property above, we can conclude that their decimal expansions are *non-terminating non-recurring*.

So, the property for irrational numbers, similar to the property stated above for rational numbers, is

The decimal expansion of an irrational number is non-terminating non-recurring. Moreover,

ఇదేవిధముగా మనం $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ అని సరి చూడవచ్చును.

ఉదాహరణ 9 : p , q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయితే $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో చూపండి.

సాధన : $x = 0.2\overline{35}$ అనుకోండి. ఇక్కడ 2 అనేది ఆవృతం కావటం లేదని గమనించండి. కాని 35 అనేది ఆవృతమవుతున్నది. రెండు అంకెలు అవృతమవుతున్నాయి. కాబట్టి మనం x ను 100చే గుణించిన

$$100\,x = 23.53535...$$

కాబట్టి $$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

అందువలన, $$99\,x = 23.3$$

$$99\,x = \frac{233}{10},\quad x = \frac{233}{990}$$

మనం దీనిని వ్యతిరేక దిశలో $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ అని సరి చూడవచ్చు.

దీనిని బట్టి ప్రతి అంతం గాని ఆవృతమయ్యే దశాంశాలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలం. ఇక్కడ p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$, మనం ఫలితాలను క్రింది రూపంలో సంగ్రహంగా వివరిద్దాం.

ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య దశాంశ విస్తరణ ఒక అంతమయ్యే దశాంశం (లేక) అంతం కాని ఆవృతమయ్యే దశాంశం అవుతుంది. అదేవిధంగా ఒక అంతమయ్యే దశాంశం (లేక) అంతం కాని ఆవృత దశాంశ విస్తరణ అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

కాబట్టి అకరణీయ సంఖ్య దశాంశ విస్తరణ గురించి మనకు తెలుసు. కరణీయ సంఖ్యల దశాంశ నియమం విస్తరణ గురించి మనం తెలుసుకోవాలి. పై ఆధారంగా మనం అంతం కాని మరియు ఆవృతం కాని దశాంశాలను కరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయని నిర్ధారించవచ్చును.

కాబట్టి కరణీయ సంఖ్యల నియమం, పైన చెప్పిన అకరణీయ సంఖ్యల నియమానికి సమానం. ఒక కరణీయ సంఖ్య దశాంశ విస్తరణ రూపం అంతం కాని ఆవృత దశాంశ విస్తరణ. ఇదేవిధంగా అంతం కాని ఆవృతం కాని దశాంశ విస్తరణలు అన్ని కరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయి.

a number whose decimal expansion is non-terminating non-recurring is irrational.

Recall s = 0.10110111011110... from the previous section. Notice that it is non-terminating and non-recurring. Therefore, from the property above, it is irrational. Moreover, notice that you can generate infinitely many irrationals similar to s.

What about the famous irrationals $\sqrt{2}$ and π? Here are their decimal expansions up to a certain stage.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

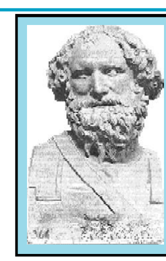
(Note that, we often take $\frac{22}{7}$ as an approximate value for π, but $\pi \neq \frac{22}{7}$.)

Over the years, mathematicians have developed various techniques to produce more and more digits in the decimal expansions of irrational numbers. For example, you might have learnt to find digits in the decimal expansion of $\sqrt{2}$ by the division method. Interestingly, in the Sulbasutras (rules of chord), a mathematical treatise of the Vedic period (800 BC - 500 BC), you find an approximation of $\sqrt{2}$ as follows:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

Notice that it is the same as the one given above for the first five decimal places. The history of the hunt for digits in the decimal expansion of π is very interesting.

The Greek genius Archimedes was the first to compute digits in the decimal expansion of π. He showed $3.140845 < \pi < 3.142857$. Aryabhatta (476 – 550 C.E.), the great Indian mathematician and astronomer, found the value of π correct to four decimal places (3.1416). Using high speed computers and advanced algorithms, π has been computed to over 1.24 trillion decimal places!



Archimedes (287 BCE – 212 BCE)
Fig. 1.10

Now, let us see how to obtain irrational numbers.

Example 10 : Find an irrational number between $\frac{1}{7}$ and $\frac{2}{7}$.

Solution : We saw that $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. So, you can easily calculate $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$.

To find an irrational number between $\frac{1}{7}$ and $\frac{2}{7}$, we find a number which is

మునుపటి విభాగంలో $s = 0.10110111011110...$ ను గుర్తు చేసుకోండి. ఇది అంతం కాని మరియు ఆవృతం కాని దశాంశ విస్తరణ కాబట్టి పైన చెప్పిన నియమం ప్రకారం ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య. అంతేకాకుండా, sకు సమానమైన అనంతమైన కరణీయ సంఖ్యలను మనం ప్రతిపాదించవచ్చును.

మరి ప్రసిద్ధమైన $\sqrt{2}$ మరియు π ల సంగతి ఏమిటి? ఒక నిర్దిష్ట దశలో దాని విస్తరణ రూపాన్ని ఇక్కడ గమనించవచ్చు.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

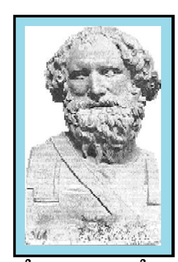
(**గమనిక:** మనము $\frac{22}{7}$ ను π కి సుమారు విలువగా తీసుకొందాం. కాని $\pi \neq \frac{22}{7}$)

అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క దశాంశ విస్తరణలో మరింత ఎక్కువ అంకెలను విస్తరించడానికి గత కొన్ని సంవత్సరాలుగా వివిధ పద్ధతులను గణిత శాస్త్రజ్ఞులు అభివృద్ధి చేసారు. ఉదాహరణకు మనం భాగాహార పద్ధతి ద్వారా $\sqrt{2}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణలో ఉన్న అంకెలను కనుగొనడం నేర్చుకున్నాం. ఆసక్తికరంగా శుల్బ సూత్రాలు (జ్యా యొక్క నియమాలు) అనే వేదకాలంలోని గణిత గ్రంథంలో $\sqrt{2}$ యొక్క సుమారు విలువను వేద గణితం) గణితంలో (క్రీ.పూ. 800 - క్రీ.పూ. 500) కాలంలో ఈ క్రింది విధంగా ఇచ్చారు.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ఇది మొదటి ఐదు దశాంశ స్థానాలకు పైన ఇచ్చిన విధంగానే ఉందని గమనించండి. π యొక్క దశాంశ విస్తరణలో అంకెల వేట యొక్క చరిత్ర చాలా ఆసక్తికరంగా ఉంది.

గ్రీకు మేధావి ఆర్కిమెడిస్ π యొక్క దశాంశ విస్తరణలో అంకెలను గణించిన మొదటి వ్యక్తి. అతను $3.140845 < \pi < 3.142857$ అని సూచించారు. ఆర్యభట్ట (క్రీ.శ.476 – 550) గొప్ప భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు మరియు ఖగోళ శాస్త్రవేత్త ఇతను π యొక్క విలువను నాలుగు దశాంశ స్థానాలకు సవరించి (3.1416) అని కనుగొన్నారు. హైస్పీడు కంప్యూటర్లు మరియు అధునాతన అల్గారిథమ్‌లను ఉపయోగించి π యొక్క విలువ 1.24 బిలియన్ల దశాంశ స్థానాల వరకు లెక్కించారు!



ఆర్కిమెడిస్ (క్రీ.పూ. 287 – క్రీ.పూ. 212)

పటం 1.10

ఇప్పుడు కరణీయ సంఖ్యలను ఎలా పొందాలో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 10 : $\frac{1}{7}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్య ఒక కరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన : మనం $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అని చూశాం. కాబట్టి మనం $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ అని సులభంగా లెక్కించవచ్చు. $\frac{1}{7}$ మరియు $\frac{2}{7}$ ల మధ్యగల కరణీయ సంఖ్యను కనుగొనుటకు మనం వాటి మధ్య గల

non-terminating non-recurring lying between them. Of course, you can find infinitely many such numbers.

An example of such a number is 0.150150015000150000...

EXERCISE 1.3

1. Write the following in decimal form and say what kind of decimal expansion each has :

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. You know that $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. Can you predict what the decimal expansions of $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ are, without actually doing the long division? If so, how?

   [**Hint :** Study the remainders while finding the value of $\frac{1}{7}$ carefully.]

3. Express the following in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. Express 0.99999 .... in the form $\frac{p}{q}$. Are you surprised by your answer? With your teacher and classmates discuss why the answer makes sense.

5. What can the maximum number of digits be in the repeating block of digits in the decimal expansion of $\frac{1}{17}$? Perform the division to check your answer.

6. Look at several examples of rational numbers in the form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$, where p and q are integers with no common factors other than 1 and having terminating decimal representations (expansions). Can you guess what property q must satisfy?

7. Write three numbers whose decimal expansions are non-terminating non-recurring.

8. Find three different irrational numbers between the rational numbers $\frac{5}{7}$ and $\frac{9}{11}$.

9. Classify the following numbers as rational or irrational :

   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

   (iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

అంతం కాని మరియు ఆవర్తనం కాని దశాంశాన్ని కనుగొంటాం. వాస్తవానికి మనం అటువంటి అనేక సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు. ఉదాహరణకు 0.150150015000150000...

అభ్యాసం 1.3

1. కింది వాటిని దశాంశ రూపంలో రాసి ఒక్కొక్కటి ఏవిధమైన దశాంశ విస్తరణను కలిగి ఉందో చెప్పండి.

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అని మనకు తెలుసు. దాని నుండి $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ల దశాంశ విస్తరణలను భాగాహార పద్ధతిలో చేయకుండానే అంచనా వేయగలరా? అయితే ఎలా?

(**సూచన :** $\frac{1}{7}$ యొక్క విలువను కనుగొన్నప్పుడు వచ్చు శేషాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి)

3. క్రింది వాటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయితే

(i) $0.\bar{6}$ (ii) $0.4\bar{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999 .... ను $\frac{p}{q}$. రూపంలో రాయండి. మీ సమాధానం చూసి మీరు ఆశ్చర్యపోతున్నారా? అర్థవంతంగా ఉన్నదో లేదో మీ ఉపాధ్యాయులు మరియు సహ విద్యార్థులతో చర్చించండి.

5. $\frac{1}{17}$ యొక్క దశాంశ విస్తరణలో పునరావృతమయ్యే అంకెల సమూహంలో గరిష్టంగా ఎన్ని అంకెలు ఉంటాయి? భాగాహార పద్ధతిని ఉపయోగించి మీ సమాధానాన్ని సరిచూడండి.

6. p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ రూపంలో ఉన్న వివిధ అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క వివిధ ఉదాహరణలను పరిశీలించండి. ఇక్కడ p, q లకు 1 తప్ప మరి ఏ ఇతర కారణాంకాలు లేని మరియు అంతమయ్యే దశాంశ విస్తరణను కలిగిన పూర్ణ సంఖ్యలు, ఏ నియమాన్ని q తప్పనిసరిగా పాటించాలో మీరు ఊహించగలరా?

7. అంతము కాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశ విస్తరణను కలిగిన మూడు సంఖ్యలను రాయండి.

8. $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{9}{11}$ ల మధ్య 3 వేర్వేరు కరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

9. క్రింది వాటిలో అకరణీయ సంఖ్యలను, కరణీయ సంఖ్యలను వర్గీకరించండి.

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 Operations on Real Numbers

You have learnt, in earlier classes, that rational numbers satisfy the commutative, associative and distributive laws for addition and multiplication. Moreover, if we add, subtract, multiply or divide (except by zero) two rational numbers, we still get a rational number (that is, rational numbers are 'closed' with respect to addition, subtraction, multiplication and division). It turns out that irrational numbers also satisfy the commutative, associative and distributive laws for addition and multiplication. However, the sum, difference, quotients and products of irrational numbers are not *always* irrational. For example, $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)$ and $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ are rationals.

Let us look at what happens when we add and multiply a rational number with an irrational number. For example, $\sqrt{3}$ is irrational. What about $2+\sqrt{3}$ and $2\sqrt{3}$? Since $\sqrt{3}$ has a non-terminating non-recurring decimal expansion, the same is true for $2+\sqrt{3}$ and $2\sqrt{3}$. Therefore, both $2+\sqrt{3}$ and $2\sqrt{3}$ are also irrational numbers.

Example 11 : Check whether $7\sqrt{5}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ are irrational numbers or not.

Solution : $\sqrt{5} = 2.236\ldots$, $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, $\pi = 3.1415\ldots$

Then $7\sqrt{5} = 15.652\ldots$, $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304\ldots$

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142\ldots$, $\pi - 2 = 1.1415\ldots$

All these are non-terminating non-recurring decimals. So, all these are irrational numbers.

Now, let us see what generally happens if we add, subtract, multiply, divide, take square roots and even *n*th roots of these irrational numbers, where *n* is any natural number. Let us look at some examples.

Example 12 : Add $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ and $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

Solution : $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$$= (2+1)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

1.4 వాస్తవ సంఖ్యల పై పరిక్రియలు

క్రింది తరగతులలో మనం అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనం మరియు గుణకారం దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మం, సహచర ధర్మం మరియు విభాగ న్యాయాలు పాటిస్తాయని తెలుసుకున్నాం. అంతేకాక రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను కూడినా, తీసివేసినా, గుణించినా, భాగించినా (సున్నాతో కాక) మనం మరలా అకరణీయ సంఖ్యలను పొందుతాం. (అనగా అకరణీయ సంఖ్యలు కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగాహారములలో సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి). ఇదే విధంగా కరణీయ సంఖ్యలు కూడా తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగాహారాలు సంవృత, సహచర, స్థిత్యంతర ధర్మాలను పాటిస్తాయని చెప్పగలమా? కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం, బేధం, లబ్దం మరియు భాగఫలం తిరిగి కరణీయ సంఖ్య కానవసరం లేదు.

ఉదాహరణకు $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)$ మరియు $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు.

మనం గమనించినట్లయితే ఒక అకరణీయ సంఖ్యను మరియొక అకరణీయ సంఖ్యతో కూడిన, తీసివేసిన మరియు గుణించిన ఏం జరుగుతుంది? ఉదాహరణకు $\sqrt{3}$ అనునది కరణీయ సంఖ్య, మరి $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ ల సంగతి ఏమిటి? $\sqrt{3}$ కు అంతం కాని మరియు ఆవర్తనం కాని దశాంశ విస్తరణను కలిగి ఉన్నది కాబట్టి $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ లకు కూడా అదే వర్తిస్తుంది. కనుక $2+\sqrt{3}$ మరియు $2\sqrt{3}$ లు రెండూ కరణీయ సంఖ్యలు.

ఉదాహరణ 11: $7\sqrt{5}$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ లు కరణీయ సంఖ్యలా? కాదా? సరిచూడండి.

సాధన : $\sqrt{5}=2.236\ldots$, $\sqrt{2}=1.4142\ldots$, $\pi=3.1415\ldots$

ఇప్పుడు $7\sqrt{5}=15.652\ldots$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}=3.1304\ldots$

$\sqrt{2}+21=22.4142\ldots$, $\pi-2=1.1415\ldots$

ఇవన్నీ కూడా అంతం కాని ఆవర్తనం కాని దశాంశాలు. కాబట్టి ఇవన్నీ కూడా కరణీయ సంఖ్యలే. ఇప్పుడు n అనేది ఏదైనా సహజ సంఖ్య అయిన కరణీయ సంఖ్యల యొక్క కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగాహారాలు, వర్గమూలాలు మరియు n యొక్క మూలాలను తీసుకుంటే సాధారణంగా ఏమి జరుగుతుందో కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా చూద్దాం.

ఉదాహరణ 12 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ లను కూడండి.

సాధన : $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$$=(2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

Example 13 : Multiply $6\sqrt{5}$ by $2\sqrt{5}$.

Solution : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

Example 14 : Divide $8\sqrt{15}$ by $2\sqrt{3}$.

Solution : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

These examples may lead you to expect the following facts, **which are true**:

(i) The sum or difference of a rational number and an irrational number is irrational.

(ii) The product or quotient of a non-zero rational number with an irrational number is irrational.

(iii) If we add, subtract, multiply or divide two irrationals, the result may be rational or irrational.

We now turn our attention to the operation of taking square roots of real numbers. Recall that, if a is a natural number, then $\sqrt{a} = b$ means $b^2 = a$ and $b > 0$. The same definition can be extended for positive real numbers.

Let $a > 0$ be a real number. Then $\sqrt{a} = b$ means $b^2 = a$ and $b > 0$.

In Section 1.2, we saw how to represent $\sqrt{n}$ for any positive integer n on the number line. We now show how to find $\sqrt{x}$ for any given positive real number x geometrically. For example, let us find it for $x = 3.5$, i.e., we find $\sqrt{3.5}$ geometrically.

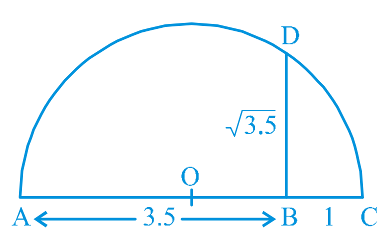


Fig. 1.11

Mark the distance 3.5 units from a fixed point A on a given line to obtain a point B such that AB = 3.5 units (see Fig. 1.11). From B, mark a distance of 1 unit and mark the new point as C. Find the mid-point of AC and mark that point as O. Draw a semicircle with centre O and radius OC. Draw a line perpendicular to AC passing through B and intersecting the semicircle at D. Then, BD = $\sqrt{3.5}$.

ఉదాహరణ 13 : $6\sqrt{5}$ ను $2\sqrt{5}$ తో గుణించండి.

సాధన : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

ఉదాహరణ 14 : $8\sqrt{15}$ ను $2\sqrt{3}$ చే భాగించండి.

సాధన : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ఈ ఉదాహరణలు మనకు ఈ క్రింది వాస్తవాలను ఆశించడానికి దారి తీయవచ్చు. **అది సత్యం**

(i) ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం మరియు భేదం ఒక కరణీయ సంఖ్య.

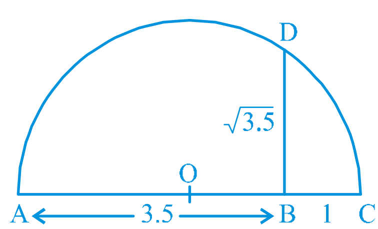
(ii) ఒక సున్నా కాని అకరణీయ సంఖ్య మరియు కరణీయ సంఖ్యల లబ్దం మరియు భాగఫలం కరణీయ సంఖ్య.

(iii) రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం, భేదం, లబ్ధం మరియు భాగఫలాలు అకరణీయసంఖ్య గాని, కరణీయ సంఖ్య గాని అవుతుంది.

మనం ఇప్పుడు వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలాల ప్రక్రియలపై దృష్టిని సారిద్దాం. a ఒక సహజ సంఖ్య అయినపుడు $\sqrt{a} = b$ అయిన $b^2 = a$ మరియు $b > 0$ అవుతుందని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఈ నిర్వచనాన్ని ధన వాస్తవ సంఖ్యలకు కూడా విస్తరించవచ్చు.

$a > 0$ అనునది వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు $\sqrt{a} = b$ అనగా $b^2 = a$ మరియు $b > 0$ అవుతుంది.

విభాగం 1.2 లో, n ఏదేని ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య అయిన $\sqrt{n}$ సంఖ్యా రేఖపై ఏవిధంగా గుర్తించాలో చూశాం. ఇప్పుడు మనం x ఏదైనా ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య అయిన $\sqrt{x}$ విలువను ఏవిధంగా కనుగొనాలో జ్యామితీయంగా చూద్దాం.
ఉదాహరణకు $x = 3.5$ అయిన $\sqrt{3.5}$ ను జ్యామితీయంగా కనుగొందాము.



పటం 1.11

AB = 3.5 యూనిట్లు దూరం అగునట్లు స్థిర బిందువు A నుండి బిందువు B వద్దకు రేఖాఖండాన్ని గీయండి. B నుండి 1 యూనిట్ దూరంలో C అను కొత్త బిందువు గుర్తించండి. AC యొక్క మధ్య బిందువును O గా గుర్తించండి. O కేంద్రంగా OC వ్యాసార్ధంతో ఒక అర్ధవృత్తాన్ని గీయండి. AC కి లంబంగా B గుండా పోవునట్లు మరియు అర్ధవృత్తాన్ని D వద్ద ఖండించినట్లు ఒక లంబాన్ని గీయండి. BD = $\sqrt{3.5}$.

More generally, to find $\sqrt{x}$, for any positive real number x, we mark B so that AB = x units, and, as in Fig. 1.12, mark C so that BC = 1 unit. Then, as we have done for the case $x = 3.5$, we find BD = $\sqrt{x}$ (see Fig. 1.12). We can prove this result using the Pythagoras Theorem.

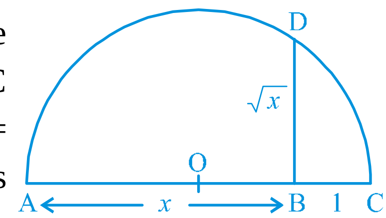


Fig. 1.12

Notice that, in Fig. 1.12, Δ OBD is a right-angled triangle. Also, the radius of the circle is $\frac{x+1}{2}$ units.

Therefore, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ units.

Now, OB = $x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

So, by the Pythagoras Theorem, we have

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x.$$

This shows that BD = $\sqrt{x}$.

This construction gives us a visual, and geometric way of showing that $\sqrt{x}$ exists for all real numbers $x > 0$. If you want to know the position of $\sqrt{x}$ on the number line, then let us treat the line BC as the number line, with B as zero, C as 1, and so on. Draw an arc with centre B and radius BD, which intersects the number line in E (see Fig. 1.13). Then, E represents $\sqrt{x}$.

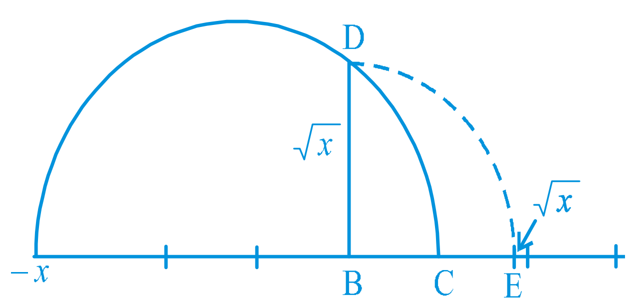
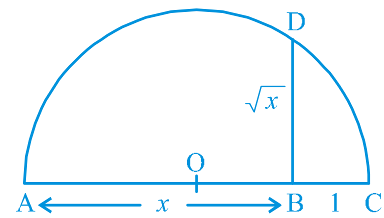


Fig. 1.13

సాధారణంగా ఏదైనా ధన వాస్తవ సంఖ్య x కు $\sqrt{x}$ ను కనుక్కోవాలంటే $AB = x$ యూనిట్లు అయ్యేవిధంగా B బిందువును గుర్తించండి. మరియు పటం 1.12 లో చూపిన విధంగా $BC = 1$ యూనిట్ అయ్యేవిధంగా C బిందువును గుర్తించండి. ఇప్పుడు $x = 3.5$ లో చేసినవిధంగా (పటం 1.16ని చూడండి) మనం $BD = \sqrt{x}$ ను కనుగొంటాం. ఈ విలువను మనం పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ద్వారా నిరూపిస్తాం.



పటం 1.12

పటం 1.12 ని గమనించట్లయితే Δ OBD ఒక లంబకోణ త్రిభుజం మరియు వృత్త వ్యాసార్థం $\frac{x+1}{2}$ యూనిట్లు.

కాబట్టి $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ యూనిట్లు.

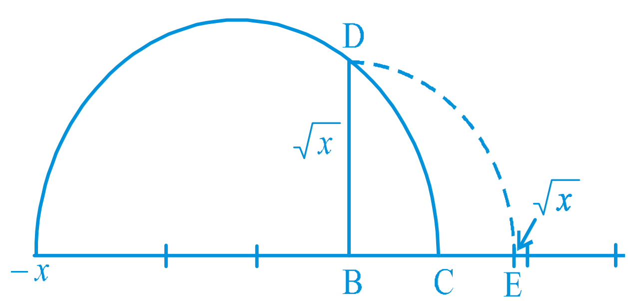
ఇప్పుడు $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

కనుక, పైథాగరాస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, మనకు

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x.$$

ఇది $BD = \sqrt{x}$ అని సూచిస్తుంది.

ఈ నిర్మాణం మనకు $x > 0$ అయిన ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు $\sqrt{x}$ ఉంటుందని జ్యామితీయంగా చూపించు పద్ధతిని తెలియచేస్తుంది. సంఖ్యారేఖ పై $\sqrt{x}$ స్థానాన్ని తెలుసుకోవలెనన్న BC ను సంఖ్యారేఖగా భావించండి B సున్నాగా C ను 1 గా మొదలగునవి. B ను కేంద్రంగా, BD వ్యాసార్థంతో ఒక చాపం గీయండి. ఈ చాపం సంఖ్యారేఖను E బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది. (పటం 1.13చూడండి) ఇప్పుడు E అనేది $\sqrt{x}$ ను సూచిస్తుంది.



పటం 1.13

We would like to now extend the idea of square roots to cube roots, fourth roots, and in general nth roots, where n is a positive integer. Recall your understanding of square roots and cube roots from earlier classes.

What is $\sqrt[3]{8}$? Well, we know it has to be some positive number whose cube is 8, and you must have guessed $\sqrt[3]{8} = 2$. Let us try $\sqrt[5]{243}$. Do you know some number b such that $b^5 = 243$? The answer is 3. Therefore, $\sqrt[5]{243} = 3$.

From these examples, can you define $\sqrt[n]{a}$ for a real number $a > 0$ and a positive integer n?

Let $a > 0$ be a real number and n be a positive integer. Then $\sqrt[n]{a} = b$, if $b^n = a$ and $b > 0$. Note that the symbol '$\sqrt{\ }$' used in $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$, etc. is called the *radical sign*.

We now list some identities relating to square roots, which are useful in various ways. You are already familiar with some of these from your earlier classes. The remaining ones follow from the distributive law of multiplication over addition of real numbers, and from the identity $(x + y)(x – y) = x^2 – y^2$, for any real numbers x and y.

Let a and b be positive real numbers. Then

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

Let us look at some particular cases of these identities.

Example 15 : Simplify the following expressions:

(i) $\left(5 + \sqrt{7}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right)$

(ii) $\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$

(iv) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)$

ఈ వర్గమూలాల విధానాన్ని, ఘన మూలాలుగా మరియు 4వ మూలముగా, అదే విధంగా సాధారణంగా n మూలములను కనుగొనుటకు విస్తరించవచ్చును. ఇచ్చట n ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య. క్రింది తరగతులలో వర్గమూలాలు మరియు ఘన మూలాల పై మీ యొక్క అవగాహనను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

$\sqrt[3]{8}$ అనగా ఏమిటి? 8 అనునది ఒక ధనాత్మక సంఖ్య యొక్క ఘనం అయి ఉంటుందని మనకు తెలుసు. మరియు $\sqrt[3]{8} = 2$ అని మనం ఊహించగలం. $\sqrt[5]{243}$ విలువ కనుగొనుటకు ప్రయత్నించండి. మీకు తెలుసా, ఏదో ఒక సంఖ్య b కు $b^5 = 243$? సమాధానం 3 కాబట్టి $\sqrt[5]{243} = 3$

ఈ ఉదాహరణల ద్వారా ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్య n మరియు $a > 0$ అను వాస్తవ సంఖ్యకు $\sqrt[n]{a}$ ను నిర్వచించగలరా?

$a > 0$ అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు n ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య అనుకోండి. ఇప్పుడు $\sqrt[n]{a} = b$ అయిన $b^n = a$ మరియు $b > 0$ గమనించండి. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ మొదలగు వాటిలో ఉపయోగించిన '$\sqrt{\ }$' గుర్తును రాడికల్ గుర్తు అంటారు.

మనం ఇప్పుడు వర్గమూలాలకు సంబంధించిన కొన్ని సర్వ సమానత్వ నియమాల జాబితాను రాద్దాం. క్రింది తరగతులలో మీరు వీటిలో కొన్నింటి గురించి నేర్చుకుని ఉన్నారు. మిగిలినవి వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క సంకలనంపై గుణకార విభాగ న్యాయము మరియు $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ అనే సర్వ సమానత్వ నియమం ద్వారా రాయవచ్చును. ఇక్కడ x , y లు ఏవైనా వాస్తవ సంఖ్యలు.

a,b లు ఏవేని ధన వాస్తవ సంఖ్యలు, ఐన

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

ఈ సర్వ సమానత్వ నియమాల యొక్క కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 15 : క్రింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\left(5 + \sqrt{7}\right)\left(2 + \sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5 + \sqrt{5}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{7}\right)$

Solution : (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

Remark : Note that 'simplify' in the example above has been used to mean that the expression should be written as the sum of a rational and an irrational number.

We end this section by considering the following problem. Look at $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$ Can you tell where it shows up on the number line? You know that it is irrational. May be it is easier to handle if the denominator is a rational number. Let us see, if we can 'rationalise' the denominator, that is, to make the denominator into a rational number. To do so, we need the identities involving square roots. Let us see how.

Example 16 : Rationalise the denominator of $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

Solution : We want to write $\frac{1}{\sqrt{2}}$ as an equivalent expression in which the denominator is a rational number. We know that $\sqrt{2}\,.\sqrt{2}$ is rational. We also know that multiplying $\frac{1}{\sqrt{2}}$ by $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ will give us an equivalent expression, since $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$. So, we put these two facts together to get

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

In this form, it is easy to locate $\frac{1}{\sqrt{2}}$ on the number line. It is half way between 0 and $\sqrt{2}$.

సాధన : (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

గమనిక : పైన పేర్కొనిన ఉదాహరణలతో సూక్ష్మీకరించడం అనేది ఇచ్చిన సమాసం ఒక అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయాలని అర్థం చేసుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది అని గమనించండి.

ఈ క్రింది సమస్యను పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా మనం ఈ విభాగాన్ని ముగిస్తాం. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను చూడండి. ఇది సంఖ్యారేఖ పై ఎక్కడ గుర్తిస్తారో మీరు చెప్పగలరా? ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని మనకు తెలుసు. దాని యొక్క హారం ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయిన మనం దానిని సులభంగా నిర్వచించవచ్చును. మనం హారాన్ని అకరణీయం చేయగలమా? అనగా హారాన్ని అకరణీయ సంఖ్యగా మార్చడం. దీనిని చేయుటకు మనం వర్గమూలాలకు సంబంధించిన సర్వ సమానత్వ నియమాలను ఉపయోగించాలి. అది ఎలానో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 16 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : ఇప్పుడు మనం $\frac{1}{\sqrt{2}}$ కు సమానమైన హారం అకరణీయ సంఖ్య అయిన సమానాన్ని రాయాలి. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని మనకు తెలుసు. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ చే గుణించిన మనకు $\frac{1}{\sqrt{2}}$ కు సర్వసమానమైన సమాసం వస్తుందని మనకు తెలుసు. ఎందుకంటే $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$. మనం ఈ రెండు సందర్భాలనుపయోగించి

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ఈ రూపంలో $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ను సంఖ్యారేఖ పై గుర్తించుట సులభం. ఇది 0 మరియు $\sqrt{2}$ ల మధ్య ఉంటుంది.

Example 17 : Rationalise the denominator of $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Solution : We use the Identity (iv) given earlier. Multiply and divide $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ by $2-\sqrt{3}$ to get

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}.$$

Example 18 : Rationalise the denominator of $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Solution : Here we use the Identity (iii) given earlier.

So, $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

Example 19 : Rationalise the denominator of $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$.

Solution : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

So, when the denominator of an expression contains a term with a square root (or a number under a radical sign), the process of converting it to an equivalent expression whose denominator is a rational number is called *rationalising the denominator*.

EXERCISE 1.4

1. Classify the following numbers as rational or irrational:

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

ఉదాహరణ 17 : $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : (iv) వ సర్వసమాన నియమాలను ఉపయోగించి $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ ను $2-\sqrt{3}$ చే గుణించి, భాగించిన $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}.$$

ఉదాహరణ 18 : $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : (iii) వ సర్వ సమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించి

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ఉదాహరణ 19 : $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయండి.

సాధన : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

కాబట్టి, ఒక సమాసంలోని హారం వర్గమూలం (లేదా రాడికల్ గుర్తు కింద ఉన్న సంఖ్య) ఒక పదాన్ని కలిగి ఉన్నప్పుడు దానిని అకరణీయ సంఖ్య గల హారంగా మార్చటానికి ఉపయోగించే ప్రక్రియను హారాన్ని ఆకరణీయం చేయటం అంటారు.

అభ్యాసం 1.4

1. క్రింది సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు, కరణీయ సంఖ్యలుగా వర్గీకరించండి.

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. Simplify each of the following expressions:

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. Recall, π is defined as the ratio of the circumference (say c) of a circle to its diameter (say d). That is, $\pi = \frac{c}{d}\cdot$ This seems to contradict the fact that π is irrational. How will you resolve this contradiction?

4. Represent $\sqrt{9.3}$ on the number line.

5. Rationalise the denominators of the following:

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 Laws of Exponents for Real Numbers

Do you remember how to simplify the following?

(i) $17^2 \,.\, 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \,.\, 9^3 =$

Did you get these answers? They are as follows:

(i) $17^2 \,.\, 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 \,.\, 9^3 = 63^3$

To get these answers, you would have used the following laws of exponents, which you have learnt in your earlier classes. (Here a, n and m are natural numbers. Remember, a is called the base and m and n are the exponents.)

(i) $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

2. క్రింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. గుర్తు చేసుకోండి. π అనునది ఒక వృత్త పరిధి(c)కి దాని వ్యాసం (d) కి గల నిష్పత్తి. అనగా $\pi = \frac{c}{d}$. ఇది π అనేది కరణీయ సంఖ్య అను భావనకు విరుద్ధంగా ఉంది. ఈ విరుద్ధతను మీరు ఎలా పరిష్కరిస్తావు?

4. $\sqrt{9.3}$ ను సంఖ్యా రేఖ పై సూచించండి.

5. హారాలను అకరణీయం చేయండి.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క ఘాతాంక నియమాలు:

ఈ క్రింది వాటిని ఎలా సూక్ష్మీకరించాలో మీకు తెలుసా?

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

కింది విధంగా ఈ సమాధానాలు మీరు పొందారా?

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

ఈ సమాధానాలను పొందటానికి, మీరు మీ క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న ఈ క్రింది ఘాతాంక నియమాలను ఉపయోగించారు. (ఇక్కడ a, n మరియు m లు సహజ సంఖ్యలని గుర్తుంచుకోండి. 'a' ని భూమి అని m మరియు n లను ఘాతాంకాలు అని అంటారు.)

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

What is $(a)^0$? Yes, it is 1! So you have learnt that $(a)^0 = 1$. So, using (iii), we can get $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. We can now extend the laws to negative exponents too.

So, for example :

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

Suppose we want to do the following computations:

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

How would we go about it? It turns out that we can extend the laws of exponents that we have studied earlier, even when the base is a positive real number and the exponents are rational numbers. (Later you will study that it can further to be extended when the exponents are real numbers.) But before we state these laws, and to even make sense of these laws, we need to first understand what, for example $4^{\frac{3}{2}}$ is. So, we have some work to do!

We define $\sqrt[n]{a}$ for a real number $a > 0$ as follows:

Let $a > 0$ be a real number and n a positive integer. Then $\sqrt[n]{a} = b$, if $b^n = a$ and $b > 0$.

In the language of exponents, we define $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. So, in particular, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$. There are now two ways to look at $4^{\frac{3}{2}}$.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

$(a)^0$ అంటే ఏమిటి?అవును. ఇది $1!$ కాబట్టి మనం $(a)^0 = 1$ అని నేర్చుకున్నాం. కాబట్టి (iii)ను ఉపయోగించి మనం $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.ని పొందగలం. ఇప్పుడు ఈ నియమాలను మనం ఋణ ఘాతాంకాలకు విస్తరించవచ్చు.

కాబట్టి ఉదాహరణకు

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

మనం ఈ క్రింది గణనలను చేయాలనుకుంటున్నాం.

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

మనం దాని గురించి ఎలా వెళ్తాం? భూమి ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య మరియు ఘాతాంకాలు అకరణీయ సంఖ్యలుగా గల ఘాతాంకాలకు ఈ నియమాలను విస్తరించవచ్చు అని మనం క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం (ఘాతాంకాలు వాస్తవ సంఖ్యలైన సందర్భాలలో ఈ నియమాలను విస్తరించడం తరువాత అధ్యయనం చేస్తారు). కాని దానికి ముందు మనం ఈ నియమాలను అర్థం చేసుకోవాలి. మొదట ఏమి అర్థం చేసుకోవాలి?

ఉదాహరణకు $4^{\frac{3}{2}}$ ఇక్కడ మనం కొంత పని చేయాలి. విభాగం 1.4 లో మనం $\sqrt[n]{a}$ నిర్వచించాం. (a ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య)

$a > 0$, a ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య మరియు n ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య. $b > 0$ అప్పుడు $b^n = a$ అయినపుడు $\sqrt[n]{a} = b$ అవుతుంది.

ఘాతాంకాల భాషలో మనం $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ గా నిర్వచిస్తాం. కాబట్టి ప్రత్యేకంగా $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ ఇప్పుడు మనకు $4^{\frac{3}{2}}$ ను చూడటానికి రెండు మార్గాలు ఉన్నాయి.

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

Therefore, we have the following definition:

Let $a > 0$ be a real number. Let m and n be integers such that m and n have no common factors other than 1, and $n > 0$. Then,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

We now have the following extended laws of exponents:

Let $a > 0$ be a real number and p and q be rational numbers. Then, we have

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

You can now use these laws to answer the questions asked earlier.

Example 20 : Simplify (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

Solution :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

EXERCISE 1.5

1. Find : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. Find : (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. Simplify : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

కాబట్టి మనకు క్రింద నిర్వచనాలు ఉన్నాయి.

ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య $a > 0$. m మరియు n లు 1, తప్ప మరి ఏ ఇతర కారణాంకాలు లేని పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $n > 0$ అయిన

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

మనం ఇప్పుడు ఘాతాంకాంక నియమాలను ఈ క్రింది విధంగా విస్తరించవచ్చు.

$a > 0$ అనేది ఒక వాస్తవ సంఖ్య. p మరియు q లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయిన

(i) $a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

ఇప్పుడు మనం ముందు అడిగిన కొన్ని ప్రశ్నల సమాధానాలను ఈ ఘాతాంక నియమాలను ఉపయోగించి చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 20 : సూక్ష్మీకరించండి. (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

సాధన :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

అభ్యాసం 1.5

1. (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$ ల విలువలను కనుగొనండి.

2. (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$ ల విలువలను కనుగొనండి.

3. సూక్ష్మీకరించండి : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A number r is called a rational number, if it can be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.
2. A number s is called a irrational number, if it cannot be written in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.
3. The decimal expansion of a rational number is either terminating or non-terminating recurring. Moreover, a number whose decimal expansion is terminating or non-terminating recurring is rational.
4. The decimal expansion of an irrational number is non-terminating non-recurring. Moreover, a number whose decimal expansion is non-terminating non-recurring is irrational.
5. All the rational and irrational numbers make up the collection of real numbers.
6. If r is rational and s is irrational, then $r + s$ and $r - s$ are irrational numbers, and rs and $\frac{r}{s}$ are irrational numbers, $r \neq 0$.
7. For positive real numbers a and b, the following identities hold:

   (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   (iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

   (v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

8. To rationalise the denominator of $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$, we multiply this by $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$, where a and b are integers.
9. Let $a > 0$ be a real number and p and q be rational numbers. Then

   (i) $a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

   (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

1.6 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మనం ఈ క్రింది అంశాలను చర్చించాం.

1. ఒక సంఖ్య r ను అకరణీయ సంఖ్య అనాలంటే r ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయాలి. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

2. ఒక సంఖ్య s ను కరణీయ సంఖ్య అనాలంటే s ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేం ఇక్కడ p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$

3. ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతమయ్యే లేక అంతం కాని ఆవృతమయ్యే దశాంశం మరియు ఒక సంఖ్య యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతమయిన లేక అంతం కాని ఆవృత దశాంశం అయిన అది కరణీయ సంఖ్య.

4. ఒక కరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ విస్తరణ అంతం కాని మరియు ఆవృతం కాని దశాంశ విస్తరణ, అదేవిధంగా అంతం కాని మరియు ఆవృతం కాని దశాంశ విస్తరణలు అన్ని కరణీయ సంఖ్యలే.

5. అన్ని ఆకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యల సమాహారం వాస్తవ సంఖ్యలవుతాయి.

6. r అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు s అనునది కరణీయ సంఖ్య అయిన, $r+s$ మరియు $r-s$ లు కరణీయ సంఖ్యలు మరియు $r\,s$ మరియు $\frac{r}{s}$ లు కరణీయ సంఖ్యలు $r \neq 0$.

7. a మరియు b లు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు అయిన ఈ క్రింది సర్వసమాన నియమాలు వర్తిస్తాయి.

   (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

   (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

8. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ యొక్క హారాన్ని అకరణీయం చేయుటకు దీనిని మనం $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ గుణిస్తాం. ఇక్కడ a మరియు b లు పూర్ణ సంఖ్యలు.

9. $a > 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు p , q లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే

   (i) $a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

   (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

0962CH02

CHAPTER 2

POLYNOMIALS

2.1 Introduction

You have studied algebraic expressions, their addition, subtraction, multiplication and division in earlier classes. You also have studied how to factorise some algebraic expressions. You may recall the algebraic identities :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

and $$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

and their use in factorisation. In this chapter, we shall start our study with a particular type of algebraic expression, called *polynomial,* and the terminology related to it. We shall also study the *Remainder Theorem* and *Factor Theorem* and their use in the factorisation of polynomials. In addition to the above, we shall study some more algebraic identities and their use in factorisation and in evaluating some given expressions.

2.2 Polynomials in One Variable

Let us begin by recalling that a variable is denoted by a symbol that can take any real value. We use the letters x, y, z, etc. to denote variables. Notice that $2x$, $3x$, $-x$, $-\frac{1}{2}x$ are algebraic expressions. All these expressions are of the form (a constant) $\times$ x. Now suppose we want to write an expression which is (a constant) $\times$ (a variable) and we do not know what the constant is. In such cases, we write the constant as a, b, c, etc. So the expression will be ax, say.

However, there is a difference between a letter denoting a constant and a letter denoting a variable. The values of the constants remain the same throughout a particular situation, that is, the values of the constants do not change in a given problem, but the value of a variable can keep changing.

V4Y1LZ

అధ్యాయం 2

బహుపదులు

2.1 పరిచయం

మీరు క్రింద తరగతులలో బీజీయ సమాసాల గూర్చి వాటి సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగాహారాల గూర్చి చదివారు. కొన్ని బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజన కూడా నేర్చుకున్నారు. కొన్ని బీజీయ సర్వసమీకరణాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోవచ్చు.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

మరియు $$x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$$

మరియు వాటి ఉపయోగాలను కారణాంక విభజనలో తెలుసుకున్నాం. ఈ అధ్యాయంలో మనం ఒక ప్రత్యేకమైన బీజీయ సమాసమైన *బహుపది*, వాటికి సంబంధించిన పదకోశం గూర్చి చర్చిస్తాం. అదేవిధంగా *శేష సిద్ధాంతం*, *కారణాంక సిద్ధాంతాలను* మరియు వాటినుపయోగించి బహుపదుల కారణాంక విభజన గురించి నేర్చుకుంటాం. వీటితోపాటుగా, మరికొన్ని బీజీయ సర్వసమీకరణాలు, కారణాంక విభజనలో వాటి ఉపయోగాలు గురించి కూడా నేర్చుకుందాం.

2.2 ఏకచరరాశిలో బహుపదులు

ఏ వాస్తవ సంఖ్య అయిన కాగల ఒక సంకేతాన్ని చరరాశి అంటారని మనం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. చరరాశిని సాధారణంగా x, y, z మొదలైన అక్షరాలతో సూచిస్తారు. $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ వంటివి బీజీయ సమాసాలని గుర్తించండి. ఇవన్నీ కూడా ఒక (స్థిరరాశి) $\times\, x$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇప్పుడు మనమేదైనా సమాసాన్ని రాయాలంటే (స్థిరరాశి) $\times$ (చరరాశిగా) రాస్తాం. అయితే ఇక్కడ స్థిరరాశి తెలియదు కనుక, స్థిరరాశులను a, b, c మొదలైనవిగా రాస్తాం మరియు చరరాశిని x, y, z లు రాస్తాం. అప్పుడు ఆ సమాసం ax అనుకోండి.

అయితే, స్థిరరాశి, చరరాశులను సూచించే అక్షరాల మధ్య తేడా ఉంటుంది. ఒక స్థిరరాశి విలువ ఒక సందర్భమంతటకీ స్థిరంగా ఉంటుంది. అనగా దాని విలువ ఆ సమస్యలో మార్పు చెందదు, కానీ చరరాశి విలువ మాత్రం మారుతూ ఉంటుంది.

Now, consider a square of side 3 units (see Fig. 2.1). What is its perimeter? You know that the perimeter of a square is the sum of the lengths of its four sides. Here, each side is 3 units. So, its perimeter is 4×3, i.e., 12 units. What will be the perimeter if each side of the square is 10 units? The perimeter is 4×10, i.e., 40 units. In case the length of each side is x units (see Fig. 2.2), the perimeter is given by $4x$ units. So, as the length of the side varies, the perimeter varies.

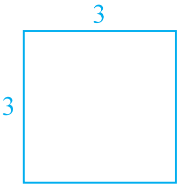


Fig. 2.1

Can you find the area of the square PQRS? It is $x \times x = x^2$ square units. x^2 is an algebraic expression. You are also familiar with other algebraic expressions like $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$. Note that, all the algebraic expressions we have considered so far have only whole numbers as the exponents of the variable. Expressions of this form are called *polynomials in one variable*. In the examples above, the variable is x. For instance, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ is a polynomial in x. Similarly, $3y^2 + 5y$ is a polynomial in the variable y and $t^2 + 4$ is a polynomial in the variable t.

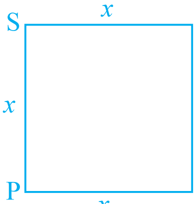


Fig. 2.2

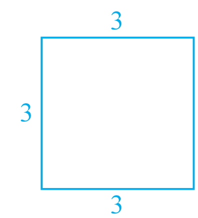
In the polynomial $x^2 + 2x$, the expressions x^2 and $2x$ are called the **terms** of the polynomial. Similarly, the polynomial $3y^2 + 5y + 7$ has three terms, namely, $3y^2$, $5y$ and 7. Can you write the terms of the polynomial $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$? This polynomial has 4 terms, namely, $-x^3$, $4x^2$, $7x$ and -2.

Each term of a polynomial has a **coefficient**. So, in $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$, the coefficient of x^3 is -1, the coefficient of x^2 is 4, the coefficient of x is 7 and -2 is the coefficient of x^0 (Remember, $x^0 = 1$). Do you know the coefficient of x in $x^2 - x + 7$? It is -1.

2 is also a polynomial. In fact, 2, -5, 7, etc. are examples of *constant polynomials*. The constant polynomial 0 is called the **zero polynomial**. This plays a very important role in the collection of all polynomials, as you will see in the higher classes.

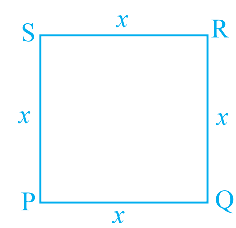
Now, consider algebraic expressions such as $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ and $\sqrt[3]{y} + y^2$. Do you know that you can write $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$? Here, the exponent of the second term, i.e., x^{-1} is -1, which is not a whole number. So, this algebraic expression is not a polynomial.

Again, $\sqrt{x} + 3$ can be written as $x^{\frac{1}{2}} + 3$. Here the exponent of x is $\frac{1}{2}$, which is not a whole number. So, is $\sqrt{x} + 3$ a polynomial? No, it is not. What about $\sqrt[3]{y} + y^2$? It is also not a polynomial (Why?).



పటం 2.1

ఇప్పుడు 3 యూనిట్ల భుజంగా గల ఒక చతురస్రం (పటం 2.1) తీసుకోండి. దాని చుట్టుకొలత ఎంత? చతురస్రం యొక్క నాలుగు భుజాల మొత్తం దాని చుట్టుకొలతని మీకు తెలుసు. ఇక్కడ ప్రతీ భుజం 3 యూనిట్లు కనుక దాని చుట్టుకొలత 4×3, అనగా 12 యూనిట్లు. ప్రతీ భుజం 10 యూనిట్లు అయినట్టి చతురస్రం చుట్టుకొలత ఎంత? 4×10 యూనిట్లు అనగా 40 యూనిట్లు. ఒకవేళ ప్రతీ భుజం కొలత x యూనిట్లు అయిన (పటం 2.2), దాని చుట్టుకొలత $4x$ యూనిట్లు. ఇక్కడ భుజం కొలత మారుతుంటే, దాని చుట్టుకొలత మారుతుంటుంది.



పటం 2.2

PQRS చతురస్ర వైశాల్యం కనుక్కోగలరా? దీనిని $x \times x = x^2$ చదరపు యూనిట్లుగా తీసుకుంటాం. x^2 అనేది ఒక బీజీయ సమాసం. అలాగే $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ వంటివి కూడా బీజీయ సమాసాలని మీకు బాగా తెలుసు. ఇంతవరకు మనం పరిశీలించిన అన్ని బీజీయ సమాసాల్లో చరరాశి ఘాతాలు పూర్ణాంకాలని గమనించండి. ఇటువంటి బీజీయ సమాసాలనే *ఏక చరరాశిలో బహుపదులు* అంటారు. పై వాటిలో చరరాశి x. ఇక్కడ x చరరాశిలో $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ఒక బహుపది. ఇలాగే y చరరాశిలో $3y^2 + 5y$, t చరరాశిలో $t^2 + 4$ లు కూడా బహుపదులే.

$x^2 + 2x$ అనే బహుపదిలో x^2 మరియు $2x$ లను **పదాలు** అంటారు. ఇలాగే $3y^2 + 5y + 7$ అనే బహుపదిలో $3y^2$, $5y$ మరియు 7 అనే మూడు పదాలున్నాయి. $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ అనే బహుపదిలోని పదాలను మీరు రాయగలరా? ఈ బహుపదిలో $-x^3$, $4x^2$, $7x$ మరియు -2 అనే 4 పదాలు కలవు.

బహుపదిలోని ప్రతీ పదానికి ఒక **గుణకం** ఉంటుంది. అందువల్ల $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ నందు x^3 గుణకం -1 x^2 గుణకం $+4$, x గుణకం 7, x^0 గుణకం -2 అవుతాయి ($x^0 = 1$ అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి). $x^2 - x + 7$ నందు x యొక్క గుణకం ఎంత? -1 అవుతుంది.

2 కూడా ఒక బహుపదే. నిజానికి 2, -5, 7... మొదలైనవి. *స్థిర బహుపదులకు* ఉదాహరణలు. స్థిర బహుపది '0' ను **శూన్య బహుపది** అంటారు. బహుపదుల సేకరణలో ఇది ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తుంది. వీటి గురించి పై తరగతుల్లో నేర్చుకుంటారు.

ఇప్పుడు $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ మరియు $\sqrt[3]{y} + y$ లాంటి బీజీయ సమాసాలను గమనించండి. $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$గా రాయవచ్చని మీకు తెలుసా? ఇక్కడ రెండో పదం యొక్క ఘాతం అంటే x^{-1} కు -1 అనేది పూర్ణాంకం కాదు. కావున ఈ సమాసం బహుపది కాదు.

అలాగే $\sqrt{x} + 3$ ను $x^{\frac{1}{2}} + 3$ గా రాస్తే, ఇక్కడ x ఘాతం $\frac{1}{2}$ కూడా పూర్ణాంకం కాదు. కాబట్టి $\sqrt{x} + 3$ బహుపది అవుతుందా? కాదు. మరి $\sqrt[3]{y} + y^2$ గురించి? ఇది కూడా బహుపది కాదు (ఎందుకు?).

If the variable in a polynomial is x, we may denote the polynomial by $p(x)$, or $q(x)$, or $r(x)$, etc. So, for example, we may write :

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

A polynomial can have any (finite) number of terms. For instance, $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ is a polynomial with 151 terms.

Consider the polynomials $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y and u^4. Do you see that each of these polynomials has only one term? Polynomials having only one term are called *monomials* ('mono' means 'one').

Now observe each of the following polynomials:

$p(x) = x + 1$, $q(x) = x^2 - x$, $r(y) = y^9 + 1$, $t(u) = u^{15} - u^2$

How many terms are there in each of these? Each of these polynomials has only two terms. Polynomials having only two terms are called *binomials* ('bi' means 'two').

Similarly, polynomials having only three terms are called *trinomials* ('tri' means 'three'). Some examples of trinomials are

$p(x) = x + x^2 + \pi$, $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$,

$r(u) = u + u^2 - 2$, $t(y) = y^4 + y + 5$.

Now, look at the polynomial $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$. What is the term with the highest power of x ? It is $3x^7$. The exponent of x in this term is 7. Similarly, in the polynomial $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$, the term with the highest power of y is $5y^6$ and the exponent of y in this term is 6. We call the highest power of the variable in a polynomial as the *degree of the polynomial*. So, the degree of the polynomial $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ is 7 and the degree of the polynomial $5y^6 - 4y^2 - 6$ is 6. **The degree of a non-zero constant polynomial is zero**.

Example 1 : Find the degree of each of the polynomials given below:

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

Solution : (i) The highest power of the variable is 5. So, the degree of the polynomial is 5.

(ii) The highest power of the variable is 8. So, the degree of the polynomial is 8.

(iii) The only term here is 2 which can be written as $2x^0$. So the exponent of x is 0. Therefore, the degree of the polynomial is 0.

x చరరాశిలో గల బహుపదిని $p(x)$ లేదా $q(x)$ లేదా $r(x)$ మొదలగు వాటితో సూచిస్తాం.

ఉదాహరణకు:
$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

ఒక బహుపదిలో పరిమిత సంఖ్యలో ఎన్ని పదాలైన ఉండవచ్చు. $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ అనే బహుపదిలో 151 పదాలుంటాయి.

$2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y మరియు u^4 బహుపదులను పరిశీలించండి. ప్రతి బహుపదిలో కూడా ఒకే పదం ఉండటం గమనించారా? ఒకే పదాన్ని కలిగియున్న బహుపదులను *ఏకపదులు* (monomials) అంటారు. (మోనో (mono) అనగా 1 అని అర్థం)

ఇపుడు క్రింది ప్రతి బహుపదిని గమనించండి:

$p(x) = x + 1$, $q(x) = x^2 - x$, $r(y) = y^9 + 1$, $t(u) = u^{15} - u^2$

పై ప్రతి బహుపదిలో ఎన్నేసి పదాలు కలవు? ప్రతి బహుపది రెండేసి పదాలు కల్గియున్నాయి. రెండేసి పదాలు కలిగియున్న బహుపదులను ('ద్వి' అనగా రెండు) *ద్విపదులు* అంటారు. అదేవిధంగా మూడేసి పదాలు కలిగియున్న బహుపదులను *త్రిపదులు* అంటారు. ('త్రి' అనగా మూడు). కొన్ని త్రిపదులకు ఉదాహరణలు:

$p(x) = x + x^2 + \pi$, $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$,

$r(u) = u + u^2 - 2$, $t(y) = y^4 + y + 5$.

ఇపుడు $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ బహుపది చూడండి. x యొక్క గరిష్ట ఘాతాన్ని కలిగియున్న పదమేది? అది $3x^7$. ఈ పదంలో x యొక్క ఘాతం 7. అలాగే $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ నందు $5y^6$ పదంలో y యొక్క గరిష్ట ఘాతం 6. ఒక బహుపదిలో చరరాశి యొక్క గరిష్ట ఘాతాన్ని ఆ బహుపది యొక్క *పరిమాణం* అంటారు. కాబట్టి $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ అనే బహుపది పరిమాణం 7 మరియు $5y^6 - 4y^2 - 6$ బహుపది పరిమాణం 6 అవుతాయి. **ఒక శూన్యేతర స్థిర బహుపది యొక్క పరిమాణం సున్నా అవుతుంది.**

ఉదాహరణ 1 : క్రింది బహుపదుల పరిమాణాలు కనుగొనండి.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

సాధన : (i) చరరాశి గరిష్ట ఘాతం 5. కావున బహుపది పరిమాణం 5.

(ii) చరరాశి గరిష్ట పరిమాణం 8. కావున బహుపది పరిమాణం 8.

(iii) ఇందులో ఉన్న ఏకైక పదం 2ను $2x^0$ గా రాయవచ్చు. కాబట్టి x యొక్క ఘాతం 0. అందువల్ల ఈ బహుపది పరిమాణం '0'.

Now observe the polynomials $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ and $s(u) = 3 - u$. Do you see anything common among all of them? The degree of each of these polynomials is one. A polynomial of degree one is called a *linear polynomial*. Some more linear polynomials in one variable are $2x - 1$, $\sqrt{2}\,y + 1$, $2 - u$. Now, try and find a linear polynomial in x with 3 terms? You would not be able to find it because a linear polynomial in x can have at most two terms. So, any linear polynomial in x will be of the form $ax + b$, where a and b are constants and $a \neq 0$ (why?). Similarly, $ay + b$ is a linear polynomial in y.

Now consider the polynomials :

$2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 and $x^2 + \frac{2}{5}x$

Do you agree that they are all of degree two? A polynomial of degree two is called a *quadratic polynomial.* Some examples of a quadratic polynomial are $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ and $6 - y - y^2$. Can you write a quadratic polynomial in one variable with four different terms? You will find that a quadratic polynomial in one variable will have at most 3 terms. If you list a few more quadratic polynomials, you will find that any quadratic polynomial in x is of the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$ and a, b, c are constants. Similarly, quadratic polynomial in y will be of the form $ay^2 + by + c$, provided $a \neq 0$ and a, b, c are constants.

We call a polynomial of degree three a *cubic polynomial*. Some examples of a cubic polynomial in x are $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. How many terms do you think a cubic polynomial in one variable can have? It can have at most 4 terms. These may be written in the form $ax^3 + bx^2 + cx + d$, where $a \neq 0$ and a, b, c and d are constants.

Now, that you have seen what a polynomial of degree 1, degree 2, or degree 3 looks like, can you write down a polynomial in one variable of degree n for any natural number n? A polynomial in one variable x of degree n is an expression of the form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ are constants and $a_n \neq 0$.

In particular, if $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (all the constants are zero), we get the **zero polynomial**, which is denoted by 0. What is the degree of the zero polynomial? The degree of the zero polynomial is *not defined*.

So far we have dealt with polynomials in one variable only. We can also have polynomials in more than one variable. For example, $x^2 + y^2 + xyz$ (where variables are x, y and z) is a polynomial in three variables. Similarly $p^2 + q^{10} + r$ (where the variables are p, q and r), $u^3 + v^2$ (where the variables are u and v) are polynomials in three and two variables, respectively. You will be studying such polynomials in detail later.

ఇపుడు $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ మరియు $s(u) = 3 - u$ బహుపదులను గమనించండి. వీటన్నింట్లో ఏదైనా సామాన్యత కనిపిస్తుందా? ప్రతి బహుపది పరిమాణం ఒకటి అవుతుంది. ఒకటి పరిమాణం గల బహుపదులను *రేఖీయ బహుపదులు* అంటారు. మరికొన్ని ఏకచరరాశిలో రేఖీయ బహుపదులు $2x - 1$, $\sqrt{2}\,y + 1$, $2 - u$. ఇప్పుడు x చరరాశితో 3 పదాలున్న రేఖీయ బహుపది కనుక్కోడానికి ప్రయత్నించండి. అలాంటి బహుపదిని మీరు వ్రాయలేరు, ఎందుకంటే రేఖీయ బహుపదిలో గరిష్టంగా రెండు పదాలు మాత్రమే ఉంటాయి. అందువల్ల x చరరాశిలో గల రేఖీయ బహుపది సాధారణంగా, $ax + b$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ a మరియ b లు స్థిరరాశులు $a \neq 0$ (ఎందుకు?). అలాగే $ay + b$ అనేది y లో రేఖీయ బహుపది.

క్రింది బహుపదులు గమనించండి :

$2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 మరియు $x^2 + \frac{2}{5}x$

పై వన్నింటికి పరిమాణం '2' అగునా? 2వ పరిమాణం బహుపదులను *వర్గ బహుపదులు* అందురు. వర్గ బహుపదులకు కొన్ని ఉదాహరణలు $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ మరియు $6 - y - y^2$. నాలుగు విభిన్న పదాలతో ఏకచరరాశిలో ఒక వర్గ బహుపది వ్రాయగలరా? వర్గ బహుపదిలో గరిష్టంగా 3 పదాలుంటాయని మీరు తెలుసుకుంటారు. మరికొన్ని వర్గ బహుపదులను మీరు గమనించినట్లయితే అవన్నీ కూడా a, b, c స్థిరాంకాలకు, $a \neq 0$ అయినప్పుడు $ax^2 + bx + c$ రూపంలో ఉంటాయని నిర్ధారించవచ్చు. అదేవిధంగా y చరరాశిలో వర్గ బహుపది a, b, c స్థిరాంకాలకు $a \neq 0$ అయినప్పుడు $ay^2 + by + c$ రూపంలో ఉంటుంది.

3వ పరిమాణం గల బహుపదిని *ఘన బహుపది* అంటారు. ఘన బహుపదికి కొన్ని ఉదాహరణలుగా $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ మొదలగు వాటిని చెప్పుకోవచ్చు. ఏక చరరాశిలో గల ఘన బహుపది ఎన్ని పదాలను కలిగి ఉంటుంది? అందులో గరిష్టంగా 4 పదాలుంటాయి. a, b, c, d లు స్థిరరాశులు $a \neq 0$ అయినపుడు ఘన బహుపదులను సాధారణంగా $ax^3 + bx^2 + cx + d$ రూపంలో రాయవచ్చు.

ఇప్పటివరకు 1వ, 2వ, 3వ పరిమాణ బహుపదులు ఎలా ఉంటాయో చూశారు కదా? ఇప్పుడు ఏదైనా సహజ సంఖ్య nకు ఏకచరరాశిలో nవ పరిమాణ బహుపది రాయగలరా? దీన్ని క్రింది రూపంలో రాయవచ్చు.

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

ఇక్కడ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ లు స్థిరరాశులు మరియు $a_n \neq 0$.

ఒకవేళ $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (అన్ని స్థిరరాశులు '0') అయితే అప్పుడు అది **శూన్య బహుపది** అగును. దీన్ని '0' తో సూచిస్తాం. శూన్యబహుపది పరిమాణం ఎంత? శూన్య బహుపది పరిమాణం *నిర్వచించలేం.*

ఇంతవరకు మనం ఏకచరరాశిలో బహుపదుల గూర్చి చర్చించాం. ఒకటి కంటే ఎక్కువ చరరాశుల్లో కూడా బహుపదులను రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు $x^2 + y^2 + xyz$ (ఇక్కడ x, y, z లు చరరాశులు) అనేది 3 చరరాశుల్లో బహుపది. అదేవిధంగా $p^2 + q^{10} + r$ (p, q, r చరరాశులు), $u^3 + v^2$ (u, v లు చరరాశులు)లు వరుసగా 3 మరియు 2 చరరాశుల్లో బహుపదులు. వీటి గురించి తర్వాత వివరంగా నేర్చుకుంటారు.

EXERCISE 2.1

1. Which of the following expressions are polynomials in one variable and which are not? State reasons for your answer.
   (i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$
   (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$
2. Write the coefficients of x^2 in each of the following:
   (i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$
3. Give one example each of a binomial of degree 35, and of a monomial of degree 100.
4. Write the degree of each of the following polynomials:
   (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$
   (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3
5. Classify the following as linear, quadratic and cubic polynomials:
   (i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$
   (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 Zeroes of a Polynomial

Consider the polynomial $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

If we replace x by 1 everywhere in $p(x)$, we get

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

So, we say that the value of $p(x)$ at $x = 1$ is 4.

Similarly, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

Can you find $p(-1)$?

Example 2 : Find the value of each of the following polynomials at the indicated value of variables:

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ at $x = 1$.

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ at $y = 2$.

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ at $t = a$.

అభ్యాసం 2.1

1. క్రింది వాటిలో ఏవి ఏకచరరాశిలో బహుపదులు? ఏవి కావు? మీ సమాధానాలకు కారణాలను తెలపండి.

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. క్రింది వాటిలో x^2 గుణకాలను రాయండి.

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35వ పరిమాణం గల ఒక ద్విపది, 100వ పరిమాణం గల ఒక ఏకపదులకు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

4. క్రింది బహుపదుల పరిమాణాలను రాయండి.

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. క్రింది వాటిని రేఖీయ, వర్గ, ఘన బహుపదులుగా వర్గీకరించండి.

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 బహుపది శూన్యాలు

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ బహుపదిని తీసుకుందాం. దీనిలో x బదులు 1ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

అందువల్ల $x = 1$ వద్ద $p(x)$ విలువ 4 అవుతుంది.

అదేవిధంగా, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

మీరు $p(-1)$ విలువ కనుగొనగలరా?

ఉదాహరణ 2: క్రింది ఇవ్వబడిన బహుపదుల విలువలను ఆయా చరరాశుల వద్ద కనుగొనండి.

(i) $x = 1$ వద్ద, $(x) = 5x^2 - 3x + 7$

(ii) $y = 2$ వద్ద, $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

(iii) $t = a$ వద్ద, $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

Solution : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

The value of the polynomial $p(x)$ at $x = 1$ is given by

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

The value of the polynomial $q(y)$ at $y = 2$ is given by

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

The value of the polynomial $p(t)$ at $t = a$ is given by

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

Now, consider the polynomial $p(x) = x - 1$.

What is $p(1)$? Note that : $p(1) = 1 - 1 = 0$.

As $p(1) = 0$, we say that 1 is a *zero* of the polynomial $p(x)$.

Similarly, you can check that 2 is a *zero* of $q(x)$, where $q(x) = x - 2$.

In general, we say that a *zero* of a polynomial $p(x)$ is a number c such that $p(c) = 0$.

You must have observed that the zero of the polynomial $x - 1$ is obtained by equating it to 0, i.e., $x - 1 = 0$, which gives $x = 1$. We say $p(x) = 0$ is a polynomial equation and 1 is the *root of the polynomial* equation $p(x) = 0$. So we say 1 is the zero of the polynomial $x - 1$, or a *root* of the polynomial equation $x - 1 = 0$.

Now, consider the constant polynomial 5. Can you tell what its zero is? It has no zero because replacing x by any number in $5x^0$ still gives us 5. In fact, *a non-zero constant polynomial has no zero*. What about the zeroes of the zero polynomial? By convention, *every real number is a zero of the zero polynomial*.

Example 3 : Check whether –2 and 2 are zeroes of the polynomial $x + 2$.

Solution : Let $p(x) = x + 2$.

Then $p(2) = 2 + 2 = 4, p(-2) = -2 + 2 = 0$

Therefore, –2 is a zero of the polynomial $x + 2$, but 2 is not.

Example 4 : Find a zero of the polynomial $p(x) = 2x + 1$.

Solution : Finding a zero of $p(x)$, is the same as solving the equation

$$p(x) = 0$$

సాధన : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

దత్తాంశాన్ని అనుసరించి $x = 1$ వద్ద, బహుపది $p(x)$ విలువ

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ వద్ద, $q(y)$ విలువ

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ వద్ద, $p(t)$ విలువ

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

ఇప్పుడు $p(x) = x - 1$అనే బహుపది గమనించండి.

$p(1)$ విలువ ఎంత? $p(1) = 1 - 1 = 0$ అని గమనించండి. $p(1) = 0$ అయినందున 1 అనేది బహుపది $p(x)$ *శూన్య విలువ* అంటాం.

అదేవిధంగా, $q(x) = x - 2$ యొక్క శూన్య విలువ 2 అవుతుందని చెప్పగలవు.

సాధారణంగా, $p(x)$ లో $p(c) = 0$ అయితే c ను $p(x)$ యొక్క *శూన్య విలువ* అంటారు.

$x - 1$ యొక్క శూన్య విలువ తెలుసుకొనుటకు $x - 1$ ను 0 కు సమానం చేయడం ద్వారా పొందవచ్చు. అనగా $x - 1 = 0$ అయిన $x = 1$. ఇక్కడ $p(x) = 0$ ను బహుపది సమీకరణమనీ, 1ను *దాని మూలం* అని అంటారు. అందువల్ల 1ని $x - 1$ యొక్క బహుపది శూన్య విలువ లేదా $x - 1 = 0$ బహుపది సమీకరణం యొక్క *మూలం* అని అంటారు.

ఇప్పుడు ఒక స్థిర బహుపది 5 తీసుకోండి. దీని యొక్క శూన్య విలువ చెప్పగలరా? దీనికి శూన్య విలువ లేదు. ఎందుకంటే x ను ఏ విలువతో ప్రతిక్షేపించినా $5x^0$ విలువ 5 మాత్రమే అగును. నిజానికి, ఏ *శూన్యేతర స్థిర బహుపదికైనా శూన్యాలు ఉండవు.* మరి శూన్య బహుపది యొక్క శూన్య విలువ ఏమవుతుంది. సాధారణంగా *ప్రతీ వాస్తవ సంఖ్య కూడా శూన్య బహుపదికి శూన్య విలువే.*

ఉదాహరణ 3: -2 మరియు 2 లు $x + 2$ బహుపదికి శూన్య విలువలు అగునేమో సరిచూడండి.

సాధన : $p(x) = x + 2$ అనుకోండి.

అప్పుడు $p(2) = 2 + 2 = 4, p(-2) = -2 + 2 = 0$

$\therefore -2$ అనేది $x + 2$ బహుపదికి శూన్య విలువ అగును.

ఉదాహరణ 4 : $p(x) = 2x + 1$ యొక్క శూన్య విలువ ఎంత?

సాధన : $p(x) = 0$ ను సాధించినట్లే $p(x)$ యొక్క శూన్య విలువను కనుగొందాం.

$p(x)$ ను 0 కు సమానం చేయండి.

Now, $2x + 1 = 0$ gives us $x = -\frac{1}{2}$

So, $-\frac{1}{2}$ is a zero of the polynomial $2x + 1$.

Now, if $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, is a linear polynomial, how can we find a zero of $p(x)$? Example 4 may have given you some idea. Finding a zero of the polynomial $p(x)$, amounts to solving the polynomial equation $p(x) = 0$.

Now, $p(x) = 0$ means $ax + b = 0$, $a \neq 0$

So, $ax = -b$

i.e., $x = -\frac{b}{a}$.

So, $x = -\frac{b}{a}$ is the only zero of $p(x)$, i.e., a *linear polynomial has one and only one zero*.

Now we can say that 1 is *the* zero of $x - 1$, and -2 is *the* zero of $x + 2$.

Example 5 : Verify whether 2 and 0 are zeroes of the polynomial $x^2 - 2x$.

Solution : Let $p(x) = x^2 - 2x$

Then $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

and $p(0) = 0 - 0 = 0$

Hence, 2 and 0 are both zeroes of the polynomial $x^2 - 2x$.

Let us now list our observations:

(i) A zero of a polynomial need not be 0.

(ii) 0 may be a zero of a polynomial.

(iii) Every linear polynomial has one and only one zero.

(iv) A polynomial can have more than one zero.

EXERCISE 2.2

1. Find the value of the polynomial $5x - 4x^2 + 3$ at

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. Find $p(0)$, $p(1)$ and $p(2)$ for each of the following polynomials:

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

ఇప్పుడు $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$

అందువల్ల $-\frac{1}{2}$ అనేది $2x + 1$ అనే బహుపది యొక్క శూన్య విలువ.

ఇప్పుడు $p(x) = ax + b, a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్య విలువ ఎలా కనుగొంటావు? ఉదాహరణకు 4 ద్వారా కొంత అవగాహన అయ్యే ఉంటుంది. బహుపది $p(x)$ కు శూన్య విలువ కనుగొనడం అంటే $p(x) = 0$ సమీకరణం సాధించడమని అర్థం.

ఇప్పుడు $p(x) = 0$ అనగా $ax + b = 0, a \neq 0$

కాబట్టి $ax = -b$

అంటే $x = -\frac{b}{a}$

అందువల్ల, $p(x)$ యొక్క శూన్య విలువ $-\frac{b}{a}$ మాత్రమే. అనగా *ఒక రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్య విలువ ఉంటుంది.*

ఉదాహరణ 5 : 2 మరియు 0 లు, $x^2 - 2x$ బహుపదికి శూన్య విలువలు అగునా?

సాధన : $p(x) = x^2 - 2x$ అనుకోండి

అప్పుడు, $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

మరియు $p(0) = 0 - 0 = 0$

అందువల్ల, $x^2 - 2x$ కు 2 మరియు 0 లు శూన్య విలువలు

ఇంతవరకు మనం పరిశీలించిన అంశాలు :

(i) శూన్య బహుపది యొక్క శూన్య విలువ సున్నా కానక్కర్లేదు.

(ii) ఒక బహుపది శూన్య విలువ 0 కూడా కావచ్చు.

(iii) ప్రతీ రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్య విలువ ఉంటుంది.

(iv) ఒక బహుపదికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ శూన్య విలువలు ఉండవచ్చు.

అభ్యాసం 2.2

1. క్రింది విలువల వద్ద $5x - 4x^2 + 3$ బహుపది విలువలను కనుగొనండి.

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. క్రింది ప్రతీ బహుపదికి $p(0), p(1)$ మరియు $p(2)$ విలువలు కనుగొనండి.

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. Verify whether the following are zeroes of the polynomial, indicated against them.

(i) $p(x) = 3x + 1,\ x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi,\ x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1,\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2),\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2,\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m,\ x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1,\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1,\ x = \frac{1}{2}$

4. Find the zero of the polynomial in each of the following cases:

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c, d$ are real numbers.

2.4 Factorisation of Polynomials

Let us now look at the situation of Example 10 above more closely. It tells us that since the remainder, $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $(2t + 1)$ is a factor of $q(t)$, i.e., $q(t) = (2t + 1)\,g(t)$ for some polynomial $g(t)$. This is a particular case of the following theorem.

Factor Theorem : If $p(x)$ is a polynomial of degree $n \geq 1$ and a is any real number, then (i) $x - a$ is a factor of $p(x)$, if $p(a) = 0$, and (ii) $p(a) = 0$, if $x - a$ is a factor of $p(x)$.

Proof: By the Remainder Theorem, $p(x)=(x - a)\,q(x) + p(a)$.

(i) If $p(a) = 0$, then $p(x) = (x - a)\,q(x)$, which shows that $x - a$ is a factor of $p(x)$.

(ii) Since $x - a$ is a factor of $p(x)$, $p(x) = (x - a)\,g(x)$ for same polynomial $g(x)$. In this case, $p(a) = (a - a)\,g(a) = 0$.

Example 6 : Examine whether $x + 2$ is a factor of $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ and of $2x + 4$.

Solution : The zero of $x + 2$ is -2. Let $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ and $s(x) = 2x + 4$

Then,
$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

So, by the Factor Theorem, $x + 2$ is a factor of $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$.

3. క్రింది బహుపదులకు ఎదురుగా ఇచ్చిన విలువలు వాటి శూన్యాలవుతాయేమో సరిచూడండి.

(i) $p(x) = 3x + 1,\ x = -\dfrac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi,\ x = \dfrac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1,\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2),\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2,\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m,\ x = -\dfrac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1,\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1,\ x = \dfrac{1}{2}$

4. క్రింది బహుపదుల శూన్య విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c, d$ లు వాస్తవసంఖ్యలు.

2.4 బహుపదుల కారణాంక విభజన

పై ఉదాహరణ 10 లో గల సందర్భాన్ని సునిశితంగా పరిశీలిద్దాం. ఇది, శేషం $q\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ అగుట వలన $(2t + 1)$ అనేది $q(t)$ కు కారణాంకమవుతుంది. అనగా $q(t) = (2t + 1)\, g(t),\ g(t)$ అనేది ఒక బహుపది. ఇది క్రింది సిద్ధాంతానికి ఒక ప్రత్యేక సందర్భం.

కారణాంక సిద్ధాంతం : బహుపది పరిమాణం $n \geq 1$ గా గల బహుపది $p(x)$ మరియు a ఏదేని వాస్తవసంఖ్య అయినపుడు (i) $p(a) = 0$ అయిన $(x - a)$ అనేది $p(x)$కు కారణాంకం అవుతుంది. మరియు (ii) $(x - a)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అయిన $p(a) = 0$ అవుతుంది.

నిరూపణ : శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం $p(x)=(x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ అయిన సందర్భంలో $p(x) = (x - a)\, q(x)$ దీనిని బట్టి $p(x)$కు $x - a$ ఒక కారణాంకం అవుతుంది.

(ii) ఇదేవిధంగా $x - a$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం కావున $p(x) = (x - a)\, g(x)$ సత్యమవుతుంది. $g(x)$ అనేది ఒక బహుపది. $\therefore\ p(a) = (a - a)\, g(a) = 0.$

ఉదాహరణ 6 : $x + 2$ అనేది $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ మరియు $2x + 4$ లకు కారణాంకం అవుతుందా?

సాధన : $x + 2$ యొక్క శూన్య విలువ -2 . $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ మరియు $s(x) = 2x + 4$ అనుకోండి.

$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

అప్పుడు, $= 0$

కావున, కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం ఇచ్చిన బహుపది $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$కు $x + 2$ కారణాంకం అవుతుంది.

Again, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

So, $x + 2$ is a factor of $2x + 4$. In fact, you can check this without applying the Factor Theorem, since $2x + 4 = 2(x + 2)$.

Example 7 : Find the value of k, if $x - 1$ is a factor of $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$.

Solution : As $x - 1$ is a factor of $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$, $p(1) = 0$

Now, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

So, $4 + 3 - 4 + k = 0$

i.e., $k = -3$

We will now use the Factor Theorem to factorise some polynomials of degree 2 and 3. You are already familiar with the factorisation of a quadratic polynomial like $x^2 + lx + m$. You had factorised it by splitting the middle term lx as $ax + bx$ so that $ab = m$. Then $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$. We shall now try to factorise quadratic polynomials of the type $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$ and a, b, c are constants.

Factorisation of the polynomial $ax^2 + bx + c$ **by splitting the middle term** is as follows:

Let its factors be $(px + q)$ and $(rx + s)$. Then $\frac{3x^2}{x} = 3x =$ first term of quotient

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$$

Comparing the coefficients of x^2, we get $a = pr$.

Similarly, comparing the coefficients of x, we get $b = ps + qr$.

And, on comparing the constant terms, we get $c = qs$.

This shows us that b is the sum of two numbers ps and qr, whose product is $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$.

Therefore, to factorise $ax^2 + bx + c$, we have to write b as the sum of two numbers whose product is ac. This will be clear from Example 13.

Example 8 : Factorise $6x^2 + 17x + 5$ by splitting the middle term, and by using the Factor Theorem.

Solution 1 : (By splitting method) **:** If we can find two numbers p and q such that $p + q = 17$ and $pq = 6 \times 5 = 30$, then we can get the factors.

So, let us look for the pairs of factors of 30. Some are 1 and 30, 2 and 15, 3 and 10, 5 and 6. Of these pairs, 2 and 15 will give us $p + q = 17$.

మరల, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

అలాగే $(x + 2)$ అనేది $2x + 4$ కు కారణాంకం అవుతుంది. ఎందుకంటే $2x + 4 = 2(x + 2)$ అవుతుంది. దీని ప్రకారం కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రతిపాదించకుండానే $x + 2$ కారణాంకం అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 7 : $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ అనే బహుపదికి $(x - 1)$ కారణాంకమైతే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : $(x - 1)$ అనేది $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ బహుపదికి కారణాంకం, $p(1) = 0$

ఇప్పుడు, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

కాబట్టి, $4 + 3 - 4 + k = 0$

అనగా., $k = -3$

ఇపుడు కారణాంక సిద్ధాంతం అనుసరించి పరిమాణం 2 మరియు 3 గల బహుపదులను కారణాంకాలుగా విడగొట్టవచ్చు. $x^2 + lx + m$ వంటి వర్గబహుపదులను కారణాంక విభజన చేయడం మనకు తెలిసిన విషయమే. అయితే మధ్యపదమైన lx ను $ax + bx$ వంటి రెండు పదాల కలయికగా విడదీస్తూ, $ab = m$ అయ్యేట్లు కారణాంక విభజన చేస్తాం. అప్పుడు $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ ఇప్పుడు $ax^2 + bx + c$ అనే వర్గ బహుపదిని కారణాంక విభజన చేద్దాం. ఇక్కడ $a \neq 0$ మరియు a, b, c లు స్థిరాంకాలు.

మధ్యపదాన్ని విభజించడం ద్వారా బహుపది $ax^2 + bx + c$ యొక్క కారణాంక విభజన క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

ఈ వర్గ బహుపదికి $(px + q)$ మరియు $(rx + s)$ అనేవి కారణాంకాలు అనుకుందాం.

కావున $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$

x^2 గుణకాలను పోల్చగా మనకు $a = pr$

ఇదేవిధంగా, x గుణకాలను పోల్చగా, మనకు $b = ps + qr$

స్థిర పదాలను పోల్చగా $c = qs$ అని వస్తాయి.

దీని నుండి మనకు గుణకం b అనేది ps మరియు qr ల మొత్తం అని తెలుస్తుంది. వీటి లబ్ధం $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ అని రాయవచ్చు.

దీనిని బట్టి $ax^2 + bx + c$ వర్గబహుపది కారణాంక విభజనలో b అనేది రెండు సంఖ్యల మొత్తం అని, వాటి లబ్ధం ac అని తెలుస్తుంది. ఇది తరువాత వచ్చే ఉదాహరణ 18లో తెలుస్తుంది.

ఉదాహరణ 8 : $6x^2 + 17x + 5$ను మధ్యపదం విడదీసి కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం కారణాంకాలుగా విడదీయండి.

సాధన 1: (మధ్యపదం విడదీయుట ద్వారా) **:** p, qలు అనేవి రెండుసంఖ్యలు మరియు $p + q = 17$ మరియు $pq = 6 \times 5 = 30$ కారణాంకాలను పొందుతాం.

30 లబ్ధంగా రాయగలిగే కారణాంకాల జతలను పరిశీలిస్తే $(1,30)$, $(2,15)$, $(3,10)$ $(5\ ,6)$ జతలలో $(2,15)$ జత $p + q = 17$ను తృప్తి పరుస్తుంది.

So, $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

Solution 2 : (Using the Factor Theorem)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$, say. If a and b are the zeroes of $p(x)$, then $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$. So, $ab = \frac{5}{6}\cdot$ Let us look at some possibilities for a and b.

They could be $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$. Now, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$. But $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$. So, $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ is a factor of $p(x)$. Similarly, by trial, you can find that $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ is a factor of $p(x)$.

Therefore, $6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$$= 6\left(\frac{3x + 1}{3}\right)\left(\frac{2x + 5}{2}\right)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

For the example above, the use of the splitting method appears more efficient. However, let us consider another example.

Example 9 : Factorise $y^2 - 5y + 6$ by using the Factor Theorem.

Solution : Let $p(y) = y^2 - 5y + 6$. Now, if $p(y) = (y - a)(y - b)$, you know that the constant term will be ab. So, $ab = 6$. So, to look for the factors of $p(y)$, we look at the factors of 6.

The factors of 6 are 1, 2 and 3.

Now, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

So, $y - 2$ is a factor of $p(y)$.

కావున $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$
$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$
$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

సాధన 2 : (కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$ అనుకోండి. ఒకవేళ a, b లు $p(x)$ యొక్క శూన్య విలువలు అయితే $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$. కాబట్టి $ab = \frac{5}{6}\cdot$ a, b లకు సాధ్యమయ్యే వాటిని పరిశీలించగా, అవి $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$గా ఉంటాయి. ఇప్పుడు $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$. కాని $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$, కావున, $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకం అవుతుంది. ఇదేవిధంగా $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ కూడా కారణాంకమవుతుంది.

అందువలన, $$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$
$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$
$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

పై ఉదాహరణలు బట్టి మధ్యపదం విడదీసే పద్ధతి అనువైనవది అని చెప్పవచ్చు. ఇంకొక ఉదాహరణ చూద్దాం.

ఉదాహరణ 9 : $y^2 - 5y + 6$ ను కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : $p(y) = y^2 - 5y + 6$. ఇపుడు $p(y) = (y - a)(y - b)$ అనుకుంటే $ab = 6$ అగును. $p(y)$కు కారణాంకాలు కనుగొనే క్రమంలో 6కు కారణాంకాలు చూద్దాం.

6 కారణాంకాలు 1,2,3 మరియు 6.

ఇప్పుడు $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

కావున $(y - 2)$ అనేది $p(y)$ కు కారణాంకం అవుతుంది.

Also, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

So, $y - 3$ is also a factor of $y^2 - 5y + 6$.

Therefore, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

Note that $y^2 - 5y + 6$ can also be factorised by splitting the middle term $-5y$.

Now, let us consider factorising cubic polynomials. Here, the splitting method will not be appropriate to start with. We need to find at least one factor first, as you will see in the following example.

Example 10 : Factorise $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$.

Solution : Let $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

We shall now look for all the factors of -120. Some of these are $\pm1, \pm2, \pm3,$

$\pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60$.

By trial, we find that $p(1) = 0$. So $x - 1$ is a factor of $p(x)$.

Now we see that $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$$= x^2(x-1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(Why?)}$$

$$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120) \quad [\text{Taking } (x - 1) \text{ common}]$$

We could have also got this by dividing $p(x)$ by $x - 1$.

Now $x^2 - 22x + 120$ can be factorised either by splitting the middle term or by using the Factor theorem. By splitting the middle term, we have:

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$

$$= (x - 12)(x - 10)$$

So, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

EXERCISE 2.3

1. Determine which of the following polynomials has $(x + 1)$ a factor :

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$

2. Use the Factor Theorem to determine whether $g(x)$ is a factor of $p(x)$ in each of the following cases:

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

అలాగే, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

కావున $(y - 3)$ అనేది కూడా $y^2 - 5y + 6$ కు కారణాంకం అవుతుంది.

అందువలన, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

మధ్యపదం $-5y$ని విభజించడం ద్వారా కూడా $y^2 - 5y + 6$ని కూడా కారణాంక విభజన చేయవచ్చని గమనించండి.

$y^2 - 5y + 6$ లో మధ్య పదం $-5y$ విడదీయడం ద్వారా కారణాంక విభజన జరిగింది అనేది మనం గుర్తించుకోవాలి. ఇప్పుడు, ఘన బహుపదులను కారణాంకాలుగా విభజించుట గూర్చి తెలుసుకుందాం. ఇక్కడ, మధ్యపదాన్ని విడదీసే పద్ధతి అనుకూలమైనది కాదు. ముందుగా దానికొక కారణాంకం కనుగొనాలి. దీనిని క్రింది ఉదాహరణలో చూడండి.

ఉదాహరణ 10 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ అనుకోండి.

-120 యొక్క కారణాంకాలు అన్నింటిని పరిశీలిస్తే అవి $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60$.

వీటితో ప్రయత్నిస్తే, $p(1) = 0$ అవుతుంది. కావున $(x - 1)$ అనేది $p(x)$ కు కారణాంకమవుతుంది.

ఇప్పుడు $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (ఎందుకు?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ ($x - 1$ను ఉమ్మడిగా తీసుకుంటూ)

అలాగే $p(x)$ ను $x - 1$ చే భాగించినప్పుడు కూడా దీనిని పొందవచ్చును. $x^2 - 22x + 120$.

ఇప్పుడు $x^2 - 22x + 120$ ను మధ్యపదాన్ని విడదీయడం ద్వారా గాని లేదా కారణాంకాల సిద్ధాంతం ద్వారా కారణాంకాలుగా విభజించవచ్చును.

$$\begin{aligned} x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\ &= x(x - 12) - 10(x - 12) \\ &= (x - 12)(x - 10) \end{aligned}$$

కావున, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

అభ్యాసం 2.3

1. క్రింది బహుపదులకు $(x + 1)$ కారణాంకమగునో లేదో నిర్ధారించండి?

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$

2. కారణాంక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి క్రింది బహుపదులలో ప్రతీ సందర్భంలోనూ $p(x)$ కు $g(x)$ కారణాంకమగునో లేదో తెలపండి.

   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

3. Find the value of k, if $x - 1$ is a factor of $p(x)$ in each of the following cases:

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. Factorise :

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. Factorise :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.5 Algebraic Identities

From your earlier classes, you may recall that an algebraic identity is an algebraic equation that is true for all values of the variables occurring in it. You have studied the following algebraic identities in earlier classes:

Identity I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Identity II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Identity III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Identity IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

You must have also used some of these algebraic identities to factorise the algebraic expressions. You can also see their utility in computations.

Example 11 : Find the following products using appropriate identities:

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

Solution : (i) Here we can use Identity I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Putting $y = 3$ in it, we get

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) Using Identity IV above, i.e., $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, we have

$$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$

3. క్రింది బహుపదులలో, ప్రతీ సందర్భంలోనూ $p(x)$ కు $x - 1$ కారణాంకమైతే k విలువ కనుగొనండి.

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.5 బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు

ఒక బీజగణిత సర్వసమీకరణంలో గల చరరాశులకు ఏ విలువలు ప్రతిక్షేపించిననూ ఎల్లవేళలా సత్యమయ్యే దానిని సర్వసమీకరణం అంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు క్రింది తరగతులలో ఈ క్రింది బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు నేర్చుకున్నారు.

సర్వసమీకరణం I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

సర్వసమీకరణం II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

సర్వసమీకరణం III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

సర్వసమీకరణం IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయుటలో సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగపడతాయి. ఇటువంటి కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 11 : క్రింది వాటికి సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి లబ్ధాలు కనుగొనండి.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

సాధన : (i) ఇచ్చుట, సర్వసమీకరణం I $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ని ఉపయోగిస్తాం. ఇందులో $y = 3$ తీసుకుంటే

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) ఇచ్చుట సర్వసమీకరణం IV ని ఉపయోగించి $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ని ఉపయోగిస్తే

ఇపుడు $(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$

$$= x^2 + 2x - 15$$

Example 12 : Evaluate 105×106 without multiplying directly.

Solution : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)\,(100) + (5 \times 6)$, using Identity IV

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

You have seen some uses of the identities listed above in finding the product of some given expressions. These identities are useful in factorisation of algebraic expressions also, as you can see in the following examples.

Example 13 : Factorise:

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

Solution : (i) Here you can see that

$$49a^2 = (7a)^2,\ 25b^2 = (5b)^2,\ 70ab = 2(7a)\,(5b)$$

Comparing the given expression with $x^2 + 2xy + y^2$, we observe that $x = 7a$ and $y = 5b$.

Using Identity I, we get

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)\,(7a + 5b)$$

(ii) We have $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

Now comparing it with Identity III, we get

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

So far, all our identities involved products of binomials. Let us now extend the Identity I to a trinomial $x + y + z$. We shall compute $(x + y + z)^2$ by using Identity I.

Let $x + y = t$. Then,

$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (Using Identity I)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (Substituting the value of t)

ఉదాహరణ 12 : గుణకారం చేయకుండానే 105×106 యొక్క లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన :

$$105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$, (సర్వసమీకణం IVను ఉపయోగించి)

$$= 10000 + 1100 + 30$$

$$= 11130$$

ఇంతవరకూ మనం వాడిన సర్వసమీకరణాలు పై లబ్ధాలను కనుగొనుటలో సహాయపడ్డాయి. ఇపుడు క్రింది ఉదాహరణలో బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయడానికి సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించవచ్చు. దానిని మీరు క్రింది ఉదాహరణలలో గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ 13 : ఈ క్రింది కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

సాధన : (i) ఇక్కడ

$$49a^2 = (7a)^2,\ 25b^2 = (5b)^2,\ 70ab = 2(7a)(5b)$$

దీనిని $x^2 + 2xy + y^2$ తో పోల్చగా $x = 7a$ మరియు $y = 5b$ అవుతుంది.

సర్వసమీకరణం I ప్రకారం

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

దీనిని సర్వసమీకరణం III తో పోల్చగా

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

ఇప్పటివరకు మనం వాడిన సర్వసమీకరణాలన్నియూ, ద్విపదుల లబ్ధాలకు సంబంధించినవి. ఇప్పుడు మనం మొదటి సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించి, త్రిపది $x + y + z$ యొక్క వర్గం, $(x + y + z)^2$ ని గణిద్దాం.

$x + y = t$ అయిన

$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (మొదటి సర్వసమీకరణం)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t విలువ ప్రతిక్షేపించగా)

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \qquad \text{(Using Identity I)}$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \text{(Rearranging the terms)}$$

So, we get the following identity:

Identity V : $\mathbf{(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}$

Remark : We call the right hand side expression **the expanded form** of the left hand side expression. Note that the expansion of $(x + y + z)^2$ consists of three square terms and three product terms.

Example 14 : Write $(3a + 4b + 5c)^2$ in expanded form.

Solution : Comparing the given expression with $(x + y + z)^2$, we find that

$$x = 3a,\ y = 4b \text{ and } z = 5c.$$

Therefore, using Identity V, we have

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

Example 15 : Expand $(4a - 2b - 3c)^2$.

Solution : Using Identity V, we have

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

Example 16 : Factorise $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$.

Solution : We have $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y)$

$$+ 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$$
$$= [2x + (-y) + z]^2 \qquad \text{(Using Identity V)}$$
$$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$$

So far, we have dealt with identities involving second degree terms. Now let us extend Identity I to compute $(x + y)^3$. We have:

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (సర్వసమీకరణం I ని ఉపయోగించి)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (పదాల క్రమం మార్చి రాయగా)

కావున, సర్వసమీకరణం ఇలా రాయవచ్చు.

సర్వసమీకరణం V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

వివరణ: కుడివైపు ఉన్న సమాసాన్ని, ఎడమవైపున వున్న సమాసం యొక్క **విస్తరణ రూపంగా** చెప్పవచ్చు. $(x+y+z)^2$ అనేది మూడు వర్గ పదాలను మరియు మూడు లబ్ద పదాలను కలిగి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 14 : $(3a + 4b + 5c)^2$ ను విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాసంను $(x + y + z)^2$ తో పోల్చగా మనకు

$x = 3a, y = 4b, z = 5c$ వస్తాయి.

సర్వసమీకరణం V ప్రకారం

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

ఉదాహరణ15: $(4a - 2b - 3c)^2$ ను విస్తరించండి.

సాధన : సర్వసమీకరణం V ప్రకారం,

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

ఉదాహరణ16 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y)$

$+ 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ (సర్వసమీకరణం V ని ఉపయోగించి)

$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$

మనం ఇంతవరకు రెండవ పరిమాణ పదాలతో కూడియున్న సర్వసమీకరణాలను చర్చించాం. ఇప్పుడు మనం సర్వసమీకరణం I ని వినియోగించి $(x + y)^3$ విస్తరణ చేద్దాం. మనకు

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

So, we get the following identity:

Identity VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$

Also, by replacing y by $-y$ in the Identity VI, we get

Identity VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Example 17 : Write the following cubes in the expanded form:

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

Solution : (i) Comparing the given expression with $(x + y)^3$, we find that

$$x = 3a \text{ and } y = 4b.$$

So, using Identity VI, we have:

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) Comparing the given expression with $(x - y)^3$, we find that

$$x = 5p,\ y = 3q.$$

So, using Identity VII, we have:

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

Example 18 : Evaluate each of the following using suitable identities:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

Solution : (i) We have

$$(104)^3 = (100 + 4)^3$$
$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)$$

(Using Identity VI)

$$= 1000000 + 64 + 124800$$
$$= 1124864$$

(ii) We have

$$(999)^3 = (1000 - 1)^3$$
$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$$

(Using Identity VII)

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$
$$= 997002999$$

కావున, మనం మరొక సర్వసమీకరణాలు ఇలా రాయవచ్చు.

సర్వసమీకరణం VI : $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

సర్వసమీకరణం VIలో y స్థానంలో $-y$ను ఉంచగా మనం క్రింది సర్వసమీకరణం పొందుతాం.

సర్వసమీకరణం VII : $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ఉదాహరణ 17 : క్రింది ఘనాలను విస్తరించండి.

(i) $(3a+4b)^3$ (ii) $(5p-3q)^3$

సాధన : (i) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x+y)^3$ తో పోల్చగా, మనకు

$x = 3a$ మరియు $y = 4b$ అగును.

కావున, సర్వసమీకరణం VI ఉపయోగిస్తే

$$(3a+4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) ఇచ్చిన సమాసాన్ని $(x-y)^3$ తో పోల్చగా, మనకు

$x = 5p,\ y = 3q.$

కావున సర్వసమీకరణం VII ఉపయోగిస్తే

$$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

ఉదాహరణ 18 : క్రింది వానిని తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి గణించండి.

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

సాధన : (i) $(104)^3 = (100+4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$ (సర్వసమీకరణం VIని ఉపయోగించి)

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$ (సర్వసమీకరణం VIIని ఉపయోగించి)

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

Example 19 : Factorise $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

Solution : The given expression can be written as

$$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$$
$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$$
$$= (2x + 3y)^3 \quad \text{(Using Identity VI)}$$
$$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$$

Now consider $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

On expanding, we get the product as

$$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y$$
$$+ y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad \text{(On simplification)}$$

So, we obtain the following identity:

Identity VIII : $\boldsymbol{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$

Example 20 : Factorise : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

Solution : Here, we have

$$8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$$
$$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$$
$$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$
$$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

EXERCISE 2.4

1. Use suitable identities to find the following products:

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

(iv) $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. Evaluate the following products without multiplying directly:

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. Factorise the following using appropriate identities:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

ఉదాహరణ 19 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాసాన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాయగా

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$$
$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$$
$$= (2x + 3y)^3 \quad \text{(సర్వసమీకరణం VIను ఉపయోగించి)}$$
$$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$$

ఇపుడు $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ తీసుకోండి.

దీనిని విస్తరించగా, ఈ క్రింది లబ్ధాన్ని పొందుతాం.

$$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y$$
$$+ y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \text{ (సూక్ష్మీకరించగా)}$$

కావున, ఈ క్రింది సర్వసమీకరణాలను పొందుతాం.

సర్వసమీకరణం VIII : $\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$

ఉదాహరణ 20 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : ఇవ్వబడిన సమాసం

$$8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$$
$$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$$
$$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$
$$= (2x + y + 3z)\,(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

అభ్యాసం 2.4

1. క్రింది లబ్ధాలను తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి గణించండి.

   (i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

   (iv) $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. గుణకారం చేయకుండానే క్రింది లబ్ధాలను కనుగొనండి.

   (i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి క్రింది వానిని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

   (i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. Expand each of the following, using suitable identities:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. Factorise:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. Write the following cubes in expanded form:

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. Evaluate the following using suitable identities:

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. Factorise each of the following:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. Verify : (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. Factorise each of the following:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[**Hint :** See Question 9.]

11. Factorise : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. Verify that $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$

13. If $x + y + z = 0$, show that $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

14. Without actually calculating the cubes, find the value of each of the following:

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. Give possible expressions for the length and breadth of each of the following rectangles, in which their areas are given:

(i)	(ii)
Area : $\boxed{25a^2 - 35a + 12}$	Area : $\boxed{35y^2 + 13y - 12}$

4. క్రింది వానిని సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విస్తరించండి.

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. క్రింది ఘనాలను విస్తరణరూపంలో రాయండి.

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. క్రింది వానిని సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి గణించండి:

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. క్రింది వానిని కారణాంకాలుగా విభజించండి:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. సరిచూడండి: (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. క్రింది వానిని కారణాంకాలుగా విభజించండి:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[**సూచన :** ప్రశ్న 9 చూడండి]

11. కారణాంకాలుగా విభజించండి.: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$ ను సరిచూడండి.

13. $x + y + z = 0$ అయినా $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ అని చూపండి.

14. వాస్తవ గణన చేయకుండానే క్రింది ఘనాల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. క్రింది ఇవ్వబడిన దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యం ఆధారంగా వాటి పొడవు, వెడల్పులకు అనువైన సమాసాలను రాయండి.

వైశాల్యం: $\boxed{25a^2 - 35a + 12}$ (i)

వైశాల్యం: $\boxed{35y^2 + 13y - 12}$ (ii)

16. What are the possible expressions for the dimensions of the cuboids whose volumes are given below?

(i)	(ii)
Volume : $\boxed{3x^2 - 12x}$	Volume : $\boxed{12ky^2 + 8ky - 20k}$

2.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A *polynomial* $p(x)$ in one variable x is an algebraic expression in x of the form

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$

where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ are constants and $a_n \neq 0$.

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ are respectively the *coefficients* of $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$, and *n is called the degree of the polynomial*. Each of a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, ..., a_0, with $a_n \neq 0$, is called a *term* of the polynomial $p(x)$.

2. A polynomial of one term is called a monomial.

3. A polynomial of two terms is called a binomial.

4. A polynomial of three terms is called a trinomial.

5. A polynomial of degree one is called a linear polynomial.

6. A polynomial of degree two is called a quadratic polynomial.

7. A polynomial of degree three is called a cubic polynomial.

8. A real number 'a' is a *zero* of a polynomial $p(x)$ if $p(a) = 0$. In this case, a is also called a *root* of the equation $p(x) = 0$.

9. Every linear polynomial in one variable has a unique zero, a non-zero constant polynomial has no zero, and every real number is a zero of the zero polynomial.

10. Factor Theorem : $x - a$ is a factor of the polynomial $p(x)$, if $p(a) = 0$. Also, if $x - a$ is a factor of $p(x)$, then $p(a) = 0$.

11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

16. క్రింది ఇవ్వబడిన దీర్ఘఘనాల ఘనపరిమాణం ఆధారంగా దాని కొలతలకు అనువైన సమాసాలను రాయండి.

ఘనపరిమాణం: $\boxed{3x^2 - 12x}$ (i) ఘనపరిమాణం : $\boxed{12ky^2 + 8ky - 20k}$ (ii)

2.6 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో క్రింది విషయాలను నేర్చుకున్నాం.

1. ఏక చరరాశి x లో nవ పరిమాణ బహుపది *సమాసం* $p(x)$,

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ రూపంలో ఉంటుంది.

ఇందులో $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ లు స్థిరాంకాలు, $a_n \neq 0$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ లను $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ ల యొక్క *గుణకాలంటాం.* n *ను బహుపది పరిమాణం* అంటాం. $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_0$ లను బహుపది యొక్క పదాలంటాం.

2. ఒకే ఒక పదం గల బహుపదిని ఏకపది అంటాం.

3. రెండు పదాల గల బహుపదిని ద్విపది అంటాం.

4. మూడు పదాల గల బహుపదిని త్రిపది అంటాం.

5. పరిమాణం ఒకటిగా గల బహుపదిని రేఖీయ బహుపది అంటాం.

6. పరిమాణం రెండుగా గల బహుపదిని వర్గ బహుపది అంటాం.

7. పరిమాణం మూడుగా గల బహుపదిని ఘన బహుపది అంటాం.

8. $p(x)$ అనే బహుపదికి ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య aకు $p(a) = 0$ అయితే aను బహుపది $p(x) = 0$ యొక్క శూన్య విలువ అంటాం.

9. ఏక చరరాశి కలిగిన ప్రతీ రేఖీయ బహుపదికి శూన్య విలువ ఏకైకంగా ఉంటుంది. శూన్యేతర స్థిరరాశికి బహుపది శూన్య విలువ నిర్వచించబడదు. శూన్య బహుపదికి ప్రతి వాస్తవసంఖ్య ఒక శూన్యం అవుతుంది.

10. కారణాంక సిద్ధాంతం: $p(a) = 0$ అయినపుడు $p(x)$ అనే బహుపది $x - a$ అనేది కారణాంకమవుతుంది. అలాగే $p(x)$కు $x - a$ ఒక కారణాంకం అయితే $p(a) = 0$ అవుతుంది.

11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

0962CH03

CHAPTER 3

COORDINATE GEOMETRY

What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?'
So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 Introduction

You have already studied how to locate a point on a number line. You also know how to describe the position of a point on the line. There are many other situations, in which to find a point we are required to describe its position with reference to more than one line. For example, consider the following situations:

I. In Fig. 3.1, there is a main road running in the East-West direction and streets with numbering from West to East. Also, on each street, house numbers are marked. To look for a friend's house here, is it enough to know only one reference point? For instance, if we only know that she lives on Street 2, will we be able to find her house easily? Not as easily as when we know two pieces of information about it, namely, the number of the street on which it is situated, and the house number. If we want to reach the house which is situated in the 2nd street and has the number 5, first of all we would identify the 2nd street and then the house numbered 5 on it. In Fig. 3.1, H shows the location of the house. Similarly, P shows the location of the house corresponding to Street number 7 and House number 4.

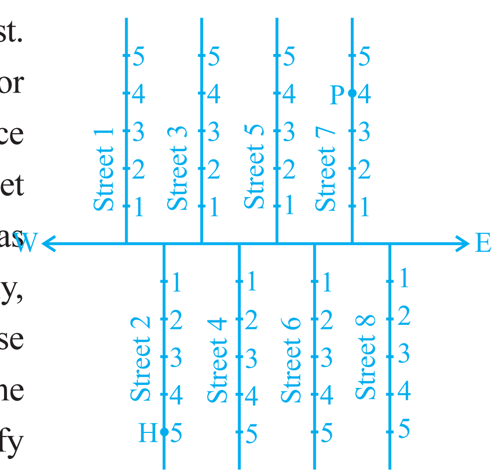


Fig. 3.1

K1K7M8

అధ్యాయం 3

నిరూపక జ్యామితి

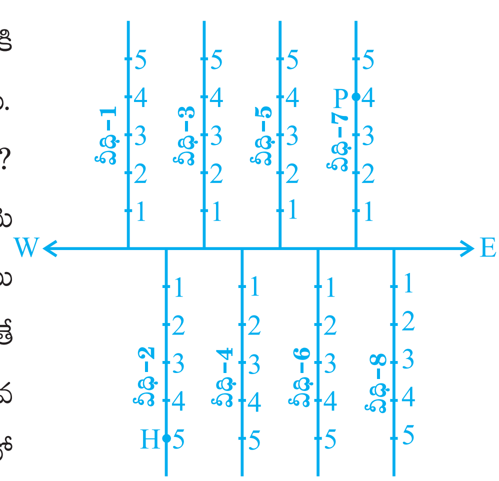
మెర్కేటర్ యొక్క ఉత్తర ధ్రువాలు మరియు భూమధ్యరేఖలు, ఉష్ణప్రదేశాలు, మండలాలు మరియు మెరిడియన్ రేఖల వల్ల ప్రయోజనం ఏమిటి?' అని బెల్మాన్ అడుగగా సిబ్బంది 'అవి కేవలం సంప్రదాయ సంకేతాలు!' అని తెలిపారు.

లూయిస్ కారోల్, ***The Hunting of the Snark***

3.1 పరిచయం

ఒక బిందువును సంఖ్యారేఖపై ఎలా సూచించగలమో మనం ఇది వరకే నేర్చుకున్నాము. ఒక రేఖపై బిందువు యొక్క స్థానాన్ని ఎలా వివరించాలో కూడా నేర్చుకున్నారు. ఒక బిందువు యొక్క స్థానాన్ని ఒకటి కన్నా ఎక్కువ రేఖల ఆధారంగా వివరించడానికి అనేక సందర్భాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు క్రింది సందర్భాలను పరిశీలించండి.

I. పటం 3.1 లో చూపిన విధంగా తూర్పు-పడమర దిశలలో ప్రధాన రహదారి ఏర్పడియున్నది మరియు పడమర నుండి తూర్పుకు ప్రతి వీధికి సంఖ్యలతో గుర్తించారు. అలాగే, వీధిలోని ప్రతీ ఇంటిని సంఖ్యలతో గుర్తించారు. కేవలం ఒక సూచిక ఆధారంగా నీవు నీ స్నేహితురాలి ఇల్లు సూచించగలవా? ఉదాహరణకు రెండవ వీధిలో నివసిస్తుందని మాత్రమే మనకు తెలిస్తే ఆమె ఇంటిని సులభంగా కనుక్కోగలమా? ఆమె నివసించే వీధి సంఖ్య మరియు ఇంటి సంఖ్య రెండు విషయాలు తెలిసినపుడు, ఇంటిని కనుగొనేంత సులభమైతే కాదు. రెండవ వీధి ఐదవ సంఖ్య గల ఇంటిని చేరుటకు మొదటగా రెండవ వీధిని గుర్తించి ఆపై అందులోని ఐదవ ఇంటిని గుర్తించగలం. పటం 3.1 లో ఆ ఇల్లు H ద్వారా సూచించబడింది. అదేవిధంగా P అనేది 7వ వీధిలో 4వ ఇంటి సానాన్ని సూచిస్తుంది.



పటం. 3.1

II. Suppose you put a dot on a sheet of paper [Fig.3.2 (a)]. If we ask you to tell us the position of the dot on the paper, how will you do this? Perhaps you will try in some such manner: "The dot is in the upper half of the paper", or "It is near the left edge of the paper", or "It is very near the left hand upper corner of the sheet". Do any of these statements fix the position of the dot precisely? No! But, if you say " The dot is nearly 5 cm away from the left edge of the paper", it helps to give some idea but still does not fix the position of the dot. A little thought might enable you to say that the dot is also at a distance of 9 cm above the bottom line. We now know exactly where the dot is!

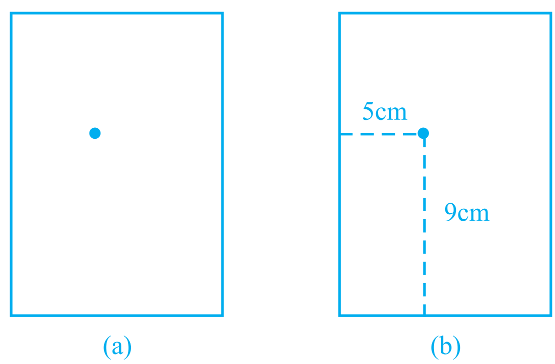


Fig. 3.2

For this purpose, we fixed the position of the dot by specifying its distances from two fixed lines, the left edge of the paper and the bottom line of the paper [Fig.3.2 (b)]. In other words, we need **two** independent informations for finding the position of the dot.

Now, perform the following classroom activity known as 'Seating Plan'.

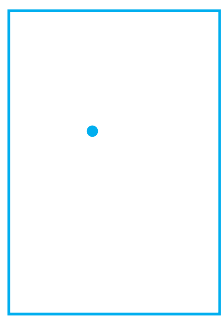
Activity 1 (Seating Plan) : Draw a plan of the seating in your classroom, pushing all the desks together. Represent each desk by a square. In each square, write the name of the student occupying the desk, which the square represents. Position of each student in the classroom is described precisely by using two independent informations:

(i) the column in which she or he sits,

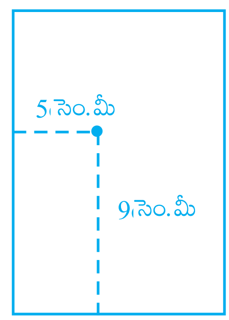
(ii) the row in which she or he sits.

If you are sitting on the desk lying in the 5^{th} column and 3^{rd} row (represented by the shaded square in Fig. 3.3), your position could be written as (5, 3), first writing the column number, and then the row number. Is this the same as (3, 5)? Write down the names and positions of other students in your class. For example, if Sonia is sitting in the 4^{th} column and 1^{st} row, write S(4,1). The teacher's desk is not part of your seating plan. We are treating the teacher just as an observer.

II. మీరు కాగితం పై ఒక బిందువును ఉంచారు అనుకుందాం [పటం 3.2 (a)] కాగితం పై ఆ బిందువు యొక్క స్థానాన్ని వివరించమని మిమ్మల్ని అడిగితే మీరు ఎలా వివరిస్తారు? బహుశా ఈ క్రింద తెలిపిన విధముగా " బిందువు కాగితపు ఎగువ భాగమన ఉన్నది" లేదా " బిందువు కాగితపు ఎడమ అంచు ఎగువ మూలకు చాలా సమీపాన ఉంది" అని మీరు వివరించవచ్చు. ఈ వాక్యాలు బిందువు యొక్క స్థానాన్ని, ఖచ్చితంగా నిర్ధారిస్తాయా? లేదు. 'బిందువు కాగితం ఎడవ అంచునుంచి రమారమి 5 సెం.మీ. దూరంలో ఉంది' అని తెలిపినట్లయితే అది బిందువు యొక్క స్థానాన్ని ఊహించడానికి కొంతవరకు దోహదపడుతుంది. కానీ, పూర్తిగా నిర్ధారించలేం. బిందువు కాగితపు క్రింది అంచు నుండి 9 సెం.మీ. దూరంలో కూడా ఉంది అనే సూచన దాని స్థానాన్ని తెలుసుకొనే వీలు కల్పిస్తుంది. ఇప్పుడు బిందువు యొక్క స్థానం మనకు ఖచ్చితంగా తెలుసు.



(a)



(b)

పటం 3.2

ఈ సమస్యలో, ఒక బిందువు స్థానాన్ని కాగితపు ఎడమ అంచు, కాగితపు క్రింది అంచు అను రెండు స్థిరరేఖలను తీసుకొని పరిష్కరించాం [పటం 3.2 (b)]. లేదా బిందువు స్థానాన్ని కనుగొనుటకు మనకు రెండు స్వతంత్ర నిర్దేశాలు అవసరమవుతాయి.

ఇప్పుడు కూర్చునే క్రమం యొక్క ప్రణాళిక 'సీటింగ్ ప్లాన్' అను తరగతి గది కృత్యాన్ని చేద్దాం.

కృత్యం 1: (సీటింగ్ ప్లాన్): మీ తరగతి గదిలోని అన్ని బల్లలను కలిపి తరగతి సీటింగ్ ప్లాన్ (కూర్చునే క్రమం యొక్క ప్రణాళిక) గీయండి. ప్రతి బల్లను ఒక చతురస్రంగా భావించండి. ప్రతి చతురస్రపు గడిలో ఆ స్థానంలో కూర్చొను విద్యార్థి పేరును రాయండి. తరగతి గదిలో ప్రతి విద్యార్థి ఆక్రమించిన స్తానాన్ని ఈ రెండు స్వతంత్ర సూచికల ద్వారా ఖచ్చితంగా వివరించబడుతుంది.

(i) విద్యార్థి కూర్చునే నిలువు వరుస

(ii) విద్యార్థి కూర్చునే అడ్డు వరుస

పటం 3.2 లో చూపిన విధంగా మీరు 5 వ నిలువు వరుస మరియు 3 వ అడ్డు వరుసలో గల బల్లపై మొదట నిలువు వరుసను ఆపై అడ్డు వరుసను పరిగణనలోనికి తీసుకొని ఉంటే మీరు కూర్చున్న స్థానాన్ని (5,3) గా రాయవచ్చు. ఇది (3,5) నకు సరి అవుతుందా? మీ తరగతి గదిలోని ఇతర విద్యార్థుల పేర్లు మరియు స్థానాలను రాయండి. ఉదాహరణకు సోనియా 4 వ నిలువు వరుస మరియు 1 వ అడ్డు వరుస లో కుర్చుని ఉంటే S (4,1) గా గుర్తించవచ్చు. ఉపాధ్యాయుని బల్ల మీ ప్రణాళికలోని భాగం కాదు. ఈ కృత్యంలో ఉపాధ్యాయుడిని ఒక పరిశీలకునిగా పరిగణించాలి.

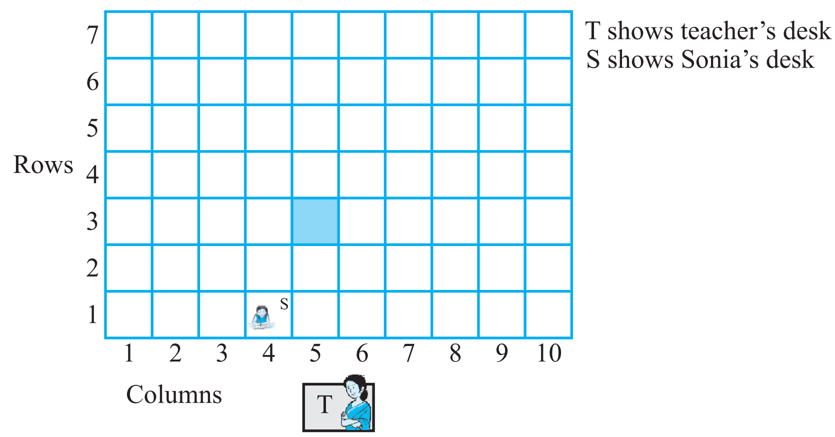
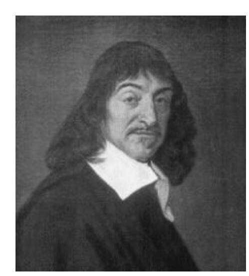


Fig. 3.3

In the discussion above, you observe that position of any object lying in a plane can be represented with the help of two perpendicular lines. In case of 'dot', we require distance of the dot from bottom line as well as from left edge of the paper. In case of seating plan, we require the number of the column and that of the row. This simple idea has far reaching consequences, and has given rise to a very important branch of Mathematics known as *Coordinate Geometry*. In this chapter, we aim to introduce some basic concepts of coordinate geometry. You will study more about these in your higher classes. This study was initially developed by the French philosopher and mathematician *René Déscartes*.

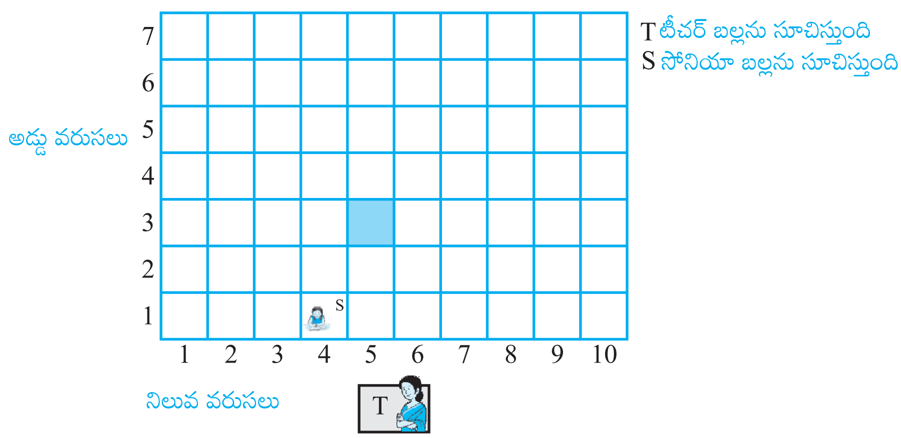
René Déscartes, the great French mathematician of the seventeenth century, liked to lie in bed and think! One day, when resting in bed, he solved the problem of describing the position of a point in a plane. His method was a development of the older idea of latitude and longitude. In honour of Déscartes, the system used for describing the position of a point in a plane is also known as the *Cartesian system*.



René Déscartes (1596 -1650)
Fig. 3.4

EXERCISE 3.1

1. How will you describe the position of a table lamp on your study table to another person?
2. **(Street Plan) :** A city has two main roads which cross each other at the centre of the city. These two roads are along the North-South direction and East-West direction. All the other streets of the city run parallel to these roads and are 200 m apart. There are 5 streets in each direction. Using 1cm = 200 m, draw a model of the city on your notebook. Represent the roads/streets by single lines.



పటం 3.3

పై చర్చలో ఒక తలం పైన ఏదేని వస్తువు యొక్క స్థానాన్ని రెండు లంబరేఖల సహాయంతో సూచించగలమని గమనించాం. కాగితంపై ఏర్పరచిన బిందువు గుర్తించుటకు కాగితపు దిగువ అంచు (రేఖ) మరియు ఎడమ అంచు (రేఖ)నుండి దూరములు అవసరం. సీటింగ్ ప్లాన్ నిర్ణయించటానికి నిలువు వరుస, అడ్డు వరుసలు అవసరమవుతాయి. ఈ సాధారణ ఆలోచన అతి ముఖ్య పరిణామంగా గణితశాస్త్రంలో క్రొత్త శాఖైన "*వైశ్లేషిక రేఖా గణితం / నిరూపక రేఖా గణితం*" యొక్క ఆవిర్భావానికి దారి తీసింది. ఈ అధ్యాయంలో నిరూపక జ్యామితి (Co-ordinate Geometry) లోని కొన్ని ప్రాథమిక భావనలను పరిచయం చేయుటను లక్ష్యంగా పెట్టుకున్నాం. వీటిని ఉన్నత తరగతులలో మీరు మరింతగా అధ్యయనం చేస్తారు. ఫ్రాన్స్‌కు చెందిన గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు, తత్వవేత్త అయిన రెనె దేకార్ట్ (Rene Descartes) మొదటగా నిరూపక జ్యామితిని అభివృద్ధి చేసారు.

17 వ శతాబ్దానికి చెందిన గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు రెనె దేకార్ట్. మంచం మీద పడుకొని ఆలోచించడం అతనికి ఇష్టం. ఒకరోజు విశ్రాంతి తీసుకుంటుండగా ఒక విమానంలో ఒక బిందువు యొక్క స్థానాన్ని వివరించే సమస్యను పరిష్కరించాడు. ఒక తలంపై గల బిందువు స్థానాన్ని నిర్వచించే సమస్యను సాధించాడు. పాత ఆలోచన అయినా అక్షాంశాలు మరియు రేఖాంశాలను అభివృద్ధి చేయడమే అతని పద్ధతి. రెనె డెకార్టే గౌరవార్థం తలంపై బిందువు యొక్క స్థానాన్ని వివరించు వ్యవస్థను "*కార్టీజియన్ వ్యవస్థ*" అని కూడా అంటారు..

రెనె దేకార్ట్ (1596 -1650)

పటం 3.4

అభ్యాసం 3.1

1. మీ స్టడీ టేబుల్‌పై టేబుల్ ల్యాంప్ స్థానాన్ని మీరు మరొకవ్యక్తికి ఎలా వివరిస్తారు?
2. (వీధి ప్రణాళిక) : ఒక నగరంలోని రెండు ప్రధాన రహదారులు నగరం మధ్యలో ఒకదానిని ఒకటి కలుస్తాయి. ఈ రెండు రోడ్లు ఉత్తర–దక్షిణ మరియు తూర్పు–పశ్చిమ దిశలో ఉన్నాయి. నగరంలోని అన్ని ఇతర వీధులు ఈ రోడ్లకు సమాంతరంగా 200 మీ. దూరంలో ఉన్నాయి. అక్కడ ప్రతి దిశలో 5 వీధులు ఉన్నాయి. 1సెం.మీ. 200 మీ. గా పరిగణించి, మీ నోట్‌బుక్‌లో నగరం యొక్క నమూనాను గీయండి. సరళ రేఖల ద్వారా రోడ్లు / వీధులను సూచించండి.

There are many cross- streets in your model. A particular cross-street is made by two streets, one running in the North - South direction and another in the East - West direction. Each cross street is referred to in the following manner : If the 2^{nd} street running in the North - South direction and 5^{th} in the East - West direction meet at some crossing, then we will call this cross-street (2, 5). Using this convention, find:

(i) how many cross - streets can be referred to as (4, 3).

(ii) how many cross - streets can be referred to as (3, 4).

3.2 Cartesian System

You have studied the *number line* in the chapter on 'Number System'. On the number line, distances from a fixed point are marked in equal units positively in one direction and negatively in the other. The point from which the distances are marked is called the *origin*. We use the number line to represent the numbers by marking points on a line at equal distances. If one unit distance represents the number '1', then 3 units distance represents the number '3', '0' being at the origin. The point in the positive direction at a distance r from the origin represents the number r. The point in the negative direction at a distance r from the origin represents the number $-r$. Locations of different numbers on the number line are shown in Fig. 3.5.

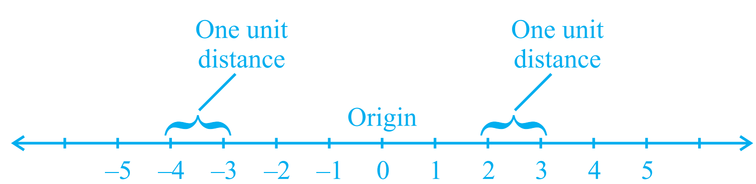


Fig. 3.5

Descartes invented the idea of placing two such lines perpendicular to each other on a plane, and locating points on the plane by referring them to these lines. The perpendicular lines may be in any direction such as in Fig.3.6. But, when we choose

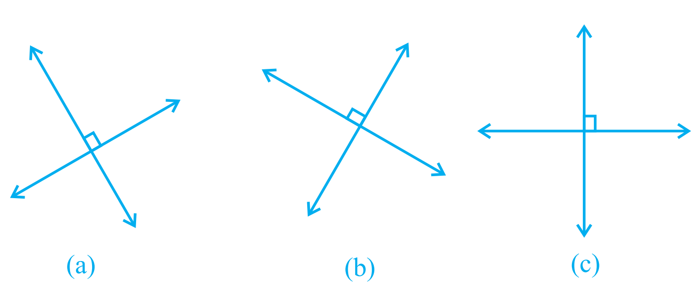


Fig. 3.6

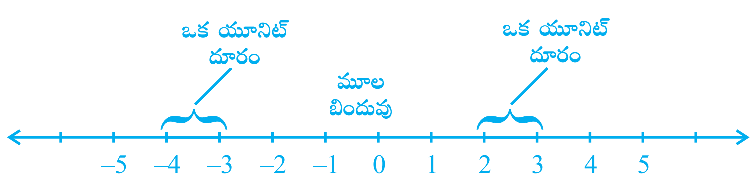
మీ నమూనాలో చాలా క్రాస్ స్ట్రీట్‌లు (అడ్డ వీధులు) ఉన్నాయి. ఒక నిర్దిష్ట అడ్డ వీధి, ఒకటి ఉత్తర–దక్షిణ దిశ మరియు మరొకటి తూర్పు–పశ్చిమ దిశ ఉన్న రెండు వీధులుగా ఖండించబడుతుంది. ప్రతి క్రాస్ స్ట్రీట్ క్రింది పద్ధతిలో సూచించబడుతుంది: ఉత్తర–దక్షిణ దిశలో 2వ వీధి మరియు తూర్పు–పశ్చిమ దిశలో 5వ వీధి కలిసినప్పుడు ఆ క్రాస్–స్ట్రీట్ ను (2, 5) అని పిలుస్తాం. ఈ సమాచారాన్ని ఉపయోగించి, క్రింది వానిని కనుగొనండి:

(i) ఎన్ని అడ్డ వీధులను (4, 3) గా సూచించవచ్చు?

(ii) ఎన్ని అడ్డ వీధులను (3, 4) గా సూచించవచ్చు?

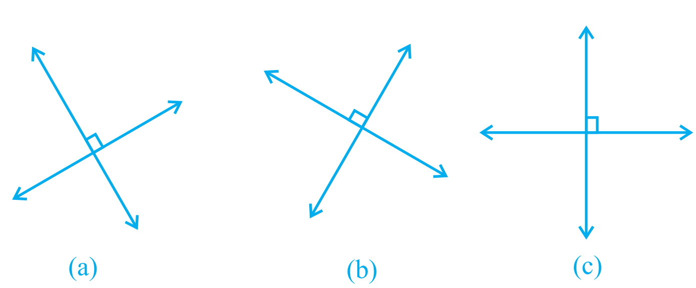
3.2 కార్టీజియన్ వ్యవస్థ :

మీరు '*సంఖ్యా మానం*' అధ్యాయంలో సంఖ్యా రేఖను అధ్యయనం చేసారు. సంఖ్యారేఖపై ఒక స్థిర బిందువు నుండి ధనాత్మకంగా ఒక దిశలో మరియు ఋణాత్మకముగా మరియొక దిశలో సమాన యూనిట్లలో దూరాలు గుర్తించబడతాయి. దూరాలు గుర్తించబడిన ఆ స్థిర బిందువును 'మూల బిందువు' అంటాం. సమాన దూరాలలో బిందువులను గుర్తించడం ద్వారా సంఖ్యా రేఖపై సంఖ్యలను సూచిస్తాం. ఒక యూనిట్ దూరం '1' సంఖ్యను సూచిస్తే, 3 యూనిట్ల దూరం '3' సంఖ్యను సూచిస్తుంది, మూల బిందువు అనునది O వద్ద ఉంటుంది. మూలబిందువు నుండి ధనాత్మక దిశలో r దూరం వద్ద ఉన్న బిందువు r సంఖ్యను సూచిస్తుంది. మూలబిందువు నుండి ఋణాత్మక దిశలో r దూరం వద్ద ఉన్న బిందువు – r సంఖ్యను సూచిస్తుంది. సంఖ్యారేఖపై వివిధ సంఖ్యల స్థానాలు పటం 3.5 పటంలో చూపబడ్డాయి.



పటం. 3.5

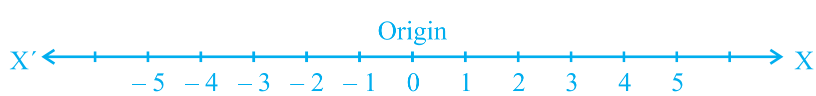
డెకార్టే ఒక తలం లో అటువంటి రెండు రేఖలను ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంచి, ఈ రెండు లంబ రేఖల ద్వారా బిందువులను సూచించవచ్చని కనుగొన్నాడు. పటం 3.6 లో చూపిన విధంగా ఈ రెండు లంబ రేఖలు ఏ దిశలోనైనా ఉండవచ్చు.



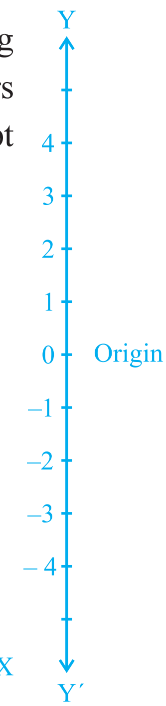
పటం. 3.6

these two lines to locate a point in a plane *in this chapter*, one line will be horizontal and the other will be vertical, as in Fig. 3.6(c).

These lines are actually obtained as follows : Take two number lines, calling them X′X and Y′Y. Place X′X horizontal [as in Fig. 3.7(a)] and write the numbers on it just as written on the number line. We do the same thing with Y′Y except that Y′Y is vertical, not horizontal [Fig. 3.7(b)].



(a)



(b)

Fig. 3.7

Combine both the lines in such a way that the two lines cross each other at their zeroes, or origins (Fig. 3.8). The horizontal line X′X is called the x - axis and the vertical line YY′ is called the y - axis. The point where X′X and Y′Y cross is called the **origin**, and is denoted by O. Since the positive numbers lie on the directions OX and OY, OX and OY are called the **positive directions** of the x - axis and the y - axis, respectively. Similarly, OX′ and OY′ are called the **negative directions** of the x - axis and the y - axis, respectively.

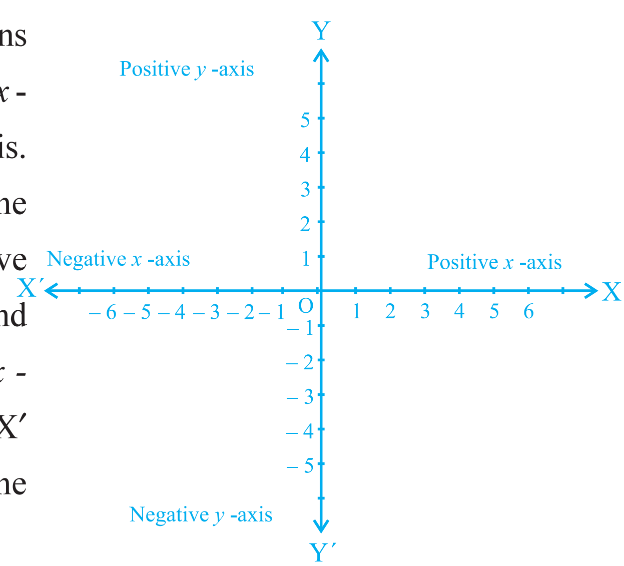
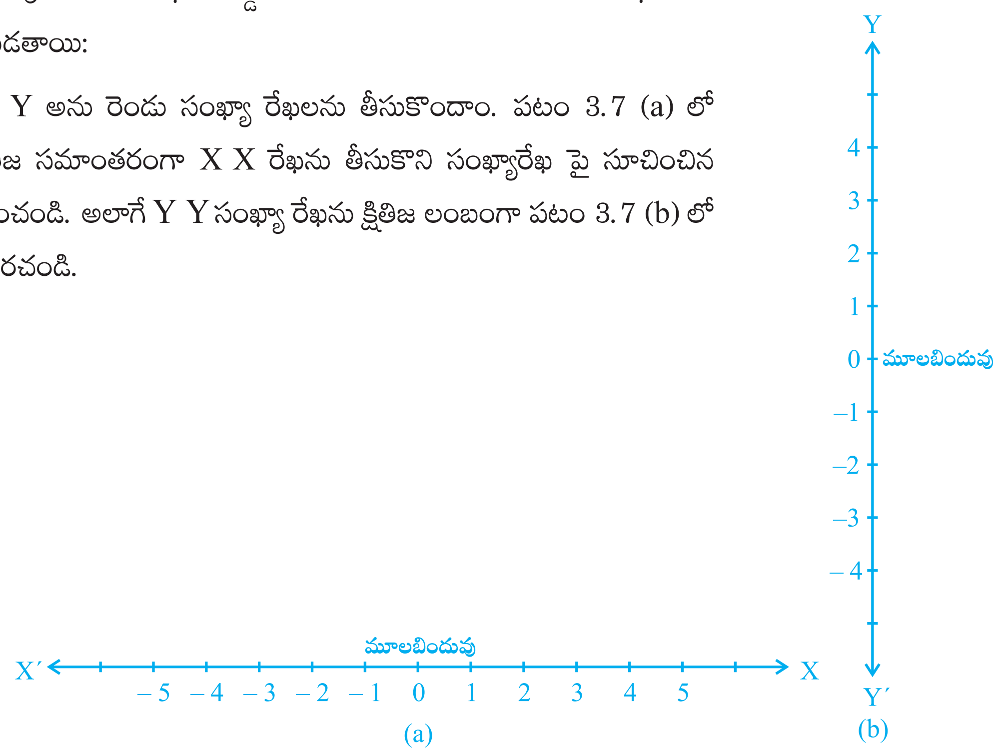


Fig. 3.8

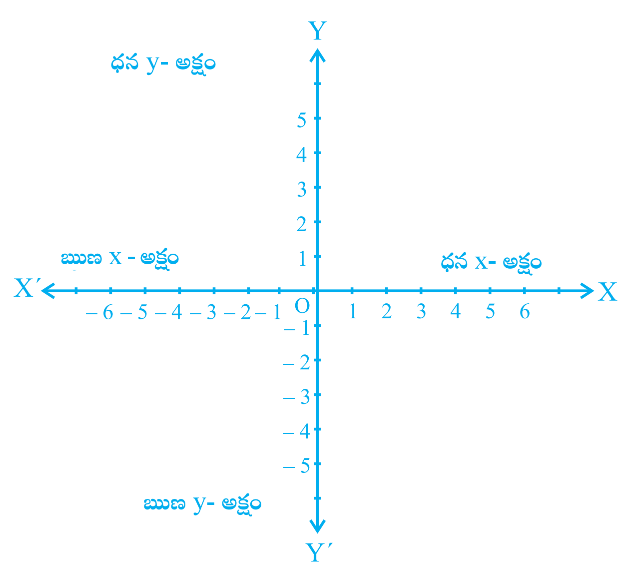
కానీ, ఈ అధ్యాయంలో ఒక తలంలో ఒక బిందువును స్థానాన్ని తెలుపుటకు 3.6(c) లో చూపిన విధముగా ఒక రేఖను నిలువుగా మరొక రేఖను అడ్డంగా పరిగణనలో తీసుకుంటాం. ఆ రేఖలు ఈ క్రింది విధంగా ఏర్పరచబడతాయి:

X X మరియు Y అను రెండు సంఖ్యా రేఖలను తీసుకొందాం. పటం 3.7 (a) లో చూపించిన విధంగా క్షితిజ సమాంతరంగా X X రేఖను తీసుకొని సంఖ్యారేఖ పై సూచించిన విధంగా సంఖ్యలను గుర్తించండి. అలాగే Y Y సంఖ్యా రేఖను క్షితిజ లంబంగా పటం 3.7 (b) లో సూచించిన విధంగా ఏర్పరచండి.



పటం. 3.7

ఈ రెండు రేఖలు ఉమ్మడిగా పరస్పరం వాటి సున్నా దగ్గర లేదా మూల బిందువు వద్ద ఖండించు విధంగా 3.8 లో చూపిన విధంగా ఏర్పరచబడతాయి. క్షితిజ సమాంతర రేఖ X X ను X– అక్షం అని మరియు క్షితిజ లంబ రేఖ Y′Y ను – అక్షం అని అంటారు. ‘X X’ మరియు Y Y ల ఖండన బిందువును **మూల బిందువు** అని అంటాం మరియు O చే సూచిస్తాం. ధన సంఖ్యలు OX మరియు OY దిశలో ఉంటాయి కావున OX మరియు OY లు వరుసగా X మరియు Y అక్షముల **ధన దిశలు** అవుతాయి. అదే విధంగా OX′ మరియు OY′ వరుసగా X మరియు Y అక్షాలు **ఋణ దిశలు** అవుతాయి.



పటం. 3.8

You observe that the axes (plural of the word 'axis') divide the plane into four parts. These four parts are called the *quadrants* (one fourth part), numbered I, II, III and IV anticlockwise from OX (see Fig.3.9). So, the plane consists of the axes and these quadrants. We call the plane, the *Cartesian plane,* or the *coordinate plane,* or the *xy-plane.* The axes are called the *coordinate axes*.

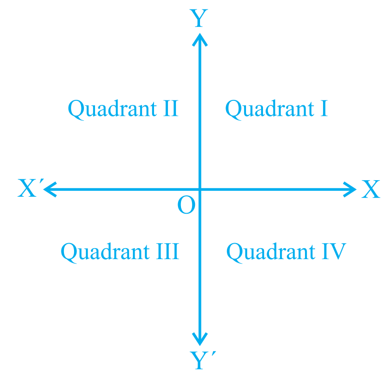


Fig. 3.9

Now, let us see why this system is so basic to mathematics, and how it is useful. Consider the following diagram where the axes are drawn on graph paper. Let us see the distances of the points P and Q from the axes. For this, we draw perpendiculars PM on the x - axis and PN on the y - axis. Similarly, we draw perpendiculars QR and QS as shown in Fig. 3.10.

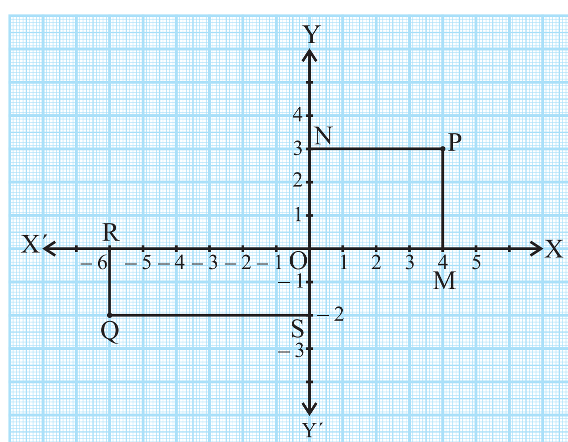


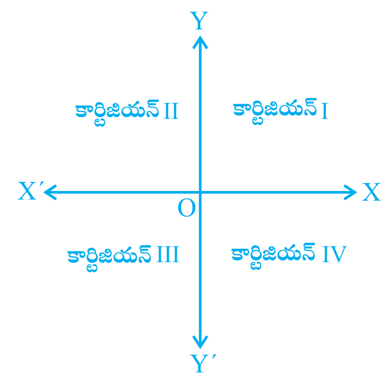
Fig.3.10

You find that

(i) The perpendicular distance of the point P from the y - axis measured along the positive direction of the x - axis is PN = OM = 4 units.

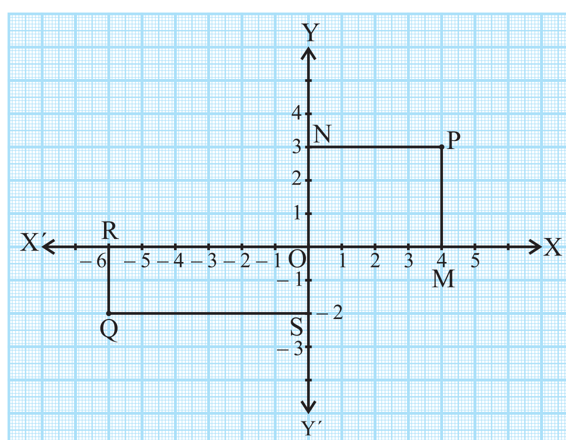
(ii) The perpendicular distance of the point P from the x - axis measured along the positive direction of the y - axis is PM = ON = 3 units.

ఈ అక్షాలు ('అక్షం' యొక్క బహువచనం) తలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా విభజించటం మీరు గమనిస్తారు. ఈ నాలుగు భాగాలను పాదాలు అంటారు. (నాలుగు భాగం) OX నుండి అపసవ్య దిశలో I, II, III మరియు IV గా సంఖ్యలతో గుర్తిస్తాం (పటం 3.9ని చూడండి). కాబట్టి తలం అక్షాలను మరియు పాదాలను కలిగి ఉంటుంది. మనం తలాన్ని కార్టిజియన్ తలం, లేదా నిరూపకతలం లేదా *xy తలం* అని అంటాం. అక్షాలను నిరూపక అక్షాలు అని అంటాం.



పటం. 3.9

ఇప్పుడు, ఈ వ్యవస్థ, గణితశాస్త్రాన్ని ప్రాథమిక భావనగా ఎందుకు? మరియు అది ఎలాఉపయోగపడుతుందో చూద్దాం. క్రింది అక్షాలు గీచిన గ్రాఫ్ కాగితంపై క్రింది పటాన్ని పరిగణించండి. అక్షాల నుండి P మరియు Q బిందువుల దూరాలను చూద్దాం. దీని కోసం, మనము X- అక్షంపై PM మరియు Y – అక్షంపై PN లంబాలను గీస్తాం. అదేవిధంగా, మనం పటం 3.10లో చూపిన విధంగా QR మరియు QS లంబాలను గీస్తాం.



పటం. 3.10

పై పటము ద్వారా క్రింది విషయాలను గమనించవచ్చు:

(i) X– అక్షం యొక్క ధనదిశలో Y – అక్షంనుండి కొలవబడిన P బిందువు యొక్కలంబదూరం PN=OM=4 యూనిట్లు.

(ii) Y– అక్షం యొక్క ధనదిశలో X – అక్షంనుండి కొలవబడిన P బిందువు యొక్కలంబదూరంPM=ON=3 యూనిట్లు

(iii) The perpendicular distance of the point Q from the y - axis measured along the negative direction of the x - axis is OR = SQ = 6 units.

(iv) The perpendicular distance of the point Q from the x - axis measured along the negative direction of the y - axis is OS = RQ = 2 units.

Now, using these distances, how can we describe the points so that there is no confusion?

We write the coordinates of a point, using the following conventions:

(i) The x - *coordinate* of a point is its perpendicular distance from the y - axis measured along the x -axis (positive along the positive direction of the x - axis and negative along the negative direction of the x - axis). For the point P, it is + 4 and for Q, it is – 6. The x - coordinate is also called the *abscissa*.

(ii) The y - *coordinate* of a point is its perpendicular distance from the x - axis measured along the y - axis (positive along the positive direction of the y - axis and negative along the negative direction of the y - axis). For the point P, it is + 3 and for Q, it is –2. The y - coordinate is also called the *ordinate*.

(iii) In stating the coordinates of a point in the coordinate plane, the x - coordinate comes first, and then the y - coordinate. We place the coordinates in brackets.

Hence, the coordinates of P are (4, 3) and the coordinates of Q are (– 6, – 2).

Note that the coordinates describe a point in the plane *uniquely.* (3, 4) is not the same as (4, 3).

Example 1 : See Fig. 3.11 and complete the following statements:

(i) The abscissa and the ordinate of the point B are _ _ _ and _ _ _, respectively. Hence, the coordinates of B are (_ _, _ _).

(ii) The x-coordinate and the y-coordinate of the point M are _ _ _ and _ _ _, respectively. Hence, the coordinates of M are (_ _, _ _).

(iii) The x-coordinate and the y-coordinate of the point L are _ _ _ and _ _ _, respectively. Hence, the coordinates of L are (_ _, _ _).

(iv) The x-coordinate and the y-coordinate of the point S are _ _ _ and _ _ _, respectively. Hence, the coordinates of S are (_ _, _ _).

(iii) X− అక్షం యొక్క ఋణ దిశలో Y − అక్షం నుండి కొలవబడిన Q బిందువు యొక్క లంబదూరం OR = SQ = 6 యూనిట్లు.

(iv) Y − అక్షం యొక్క ఋణ దిశలో X − అక్షం నుండి కొలవబడిన Q బిందువు యొక్క లంబదూరం OS = RQ = 2 యూనిట్లు.

ఇప్పుడు, ఈ దూరాలనుపయోగించి, గందరగోళం లేకుండా బిందువులను ఎలా వివరించవచ్చు?

మనము ఈ క్రింది పద్ధతులను ఉపయోగించి ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను వ్రాస్తాం :

(i) X - అక్షం పై మూల బిందువు నుండి లంబపాదం వరకు గల దూరాన్ని (X అక్షం యొక్క ధన దిశలో ధనాత్మకంగా మరియు X అక్షం యొక్క ఋణదిశలో ఋణాత్మకంగా) *X-నిరూపకం* అని అంటాం. P బిందువుకు ఇది + 4 మరియు Qనకు -6. X−నిరూపకాన్ని, *ప్రథమ నిరూపకం (Abscissa)* అని కూడా అంటారు.

(ii)Y- అక్షం పై మూల బిందువు నుండి లంబపాదం వరకు గల దూరాన్ని (Y అక్షం యొక్క ధన దిశలో ధనాత్మకంగా మరియు Y అక్షం యొక్క ఋణదిశలో ఋణాత్మకంగా) *Y-నిరూపకం* అని అంటాము. P బిందువుకు ఇది + 3 మరియు Qనకు ఇది -2. Y− నిరూపకాన్ని *ద్వితీయ నిరూపకం* (Ordinate) అని కూడా అంటారు.

(iii) ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను నిర్వచించుటకు మొదట X−నిరూపకము, ఆపై Y−నిరూపకము లను వ్రాస్తాము. వాటిని బ్రాకెట్‌లలో వ్రాస్తాం.

కావున, P బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (4,3) మరియు Q బిందువు నిరూపకాలు (−6, −2) అవుతాయి. ఒక తలంపై ఏ బిందువు యొక్క నిరూపకాలైనా *ఏకైకం (unique)గా* ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 1: పటం 3.11 ను గమనించి క్రింద ఖాళీలను పూర్తిచేయండి:

(i) B బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం మరియు ద్వితీయ నిరూపకం వరుసగా _ _ _ మరియు_ _ _. ఐన, B యొక్క నిరూపకాలు B (_ _, _ _).

(ii) M బిందువు యొక్క X-- నిరూపకం మరియు Y-- నిరూపకం వరుసగా_ _ _ మరియు_ _ , అయిన, M యొక్క నిరూపకాలు (_ _ , _ _).

(iii) L బిందువు యొక్క X-- నిరూపకం మరియు Y-- నిరూపకం వరుసగా _ _ _ మరియు _ _ , అయిన, Lయొక్క నిరూపకాలు (_ _ , _ _).

(iv) S బిందువు యొక్క X-- నిరూపకం మరియు Y-- నిరూపకం వరుసగా _ _ _ మరియు _ _ , అయిన, S యొక్క నిరూపకాలు (_ _ , _ _)

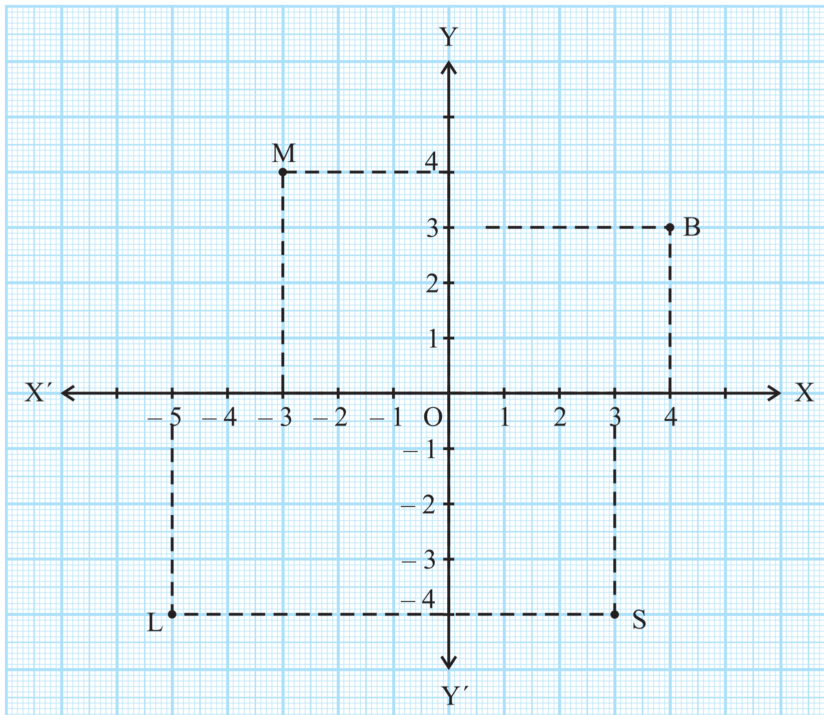


Fig. 3.11

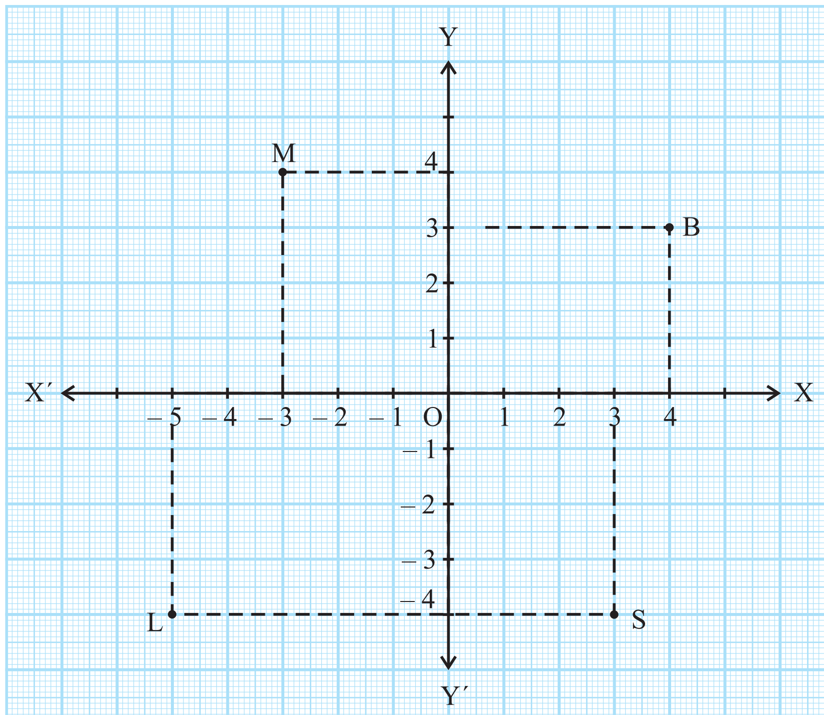
Solution: (i) Since the distance of the point B from the *y* - axis is 4 units, the *x* - coordinate or abscissa of the point B is 4. The distance of the point B from the *x* - axis is 3 units; therefore, the *y* - coordinate, i.e., the ordinate, of the point B is 3. Hence, the coordinates of the point B are (4, 3).

As in (i) above :

(ii) The *x* - coordinate and the *y* - coordinate of the point M are –3 and 4, respectively. Hence, the coordinates of the point M are (–3, 4).

(iii) The *x* - coordinate and the *y* - coordinate of the point L are –5 and – 4, respectively. Hence, the coordinates of the point L are (–5, – 4).

(iv) The *x* - coordinate and the *y*- coordinate of the point S are 3 and – 4, respectively. Hence, the coordinates of the point S are (3, – 4).



పటం. 3.11

సాధన : (i) y – అక్షం నుండి B బిందువు దూరం 4 యూనిట్లు, B బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం లేదా X నిరూపకం 4. X – అక్షం నుండి B బిందువు యొక్క దూరం 3 యూనిట్లు ; కాబట్టి, B బిందువు యొక్క ద్వితీయ నిరూపకం, అంటే Y- నిరూపకం 3.

అందువల్ల, B బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (4, 3).

పైన (i) లో తెలిపిన విధంగా :

(ii) M బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకం వరుసగా 3 మరియు 4. అందువల్ల, M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3,4).

(iii) L బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకం వరుసగా 5 మరియు–4. అందువల్ల, L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (5,–4).

(iv) S బిందువు యొక్క x – నిరూపకం మరియు y – నిరూపకం వరుసగా 3 మరియు 4. అందువల్ల, S బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3, –4)

Example 2 : Write the coordinates of the points marked on the axes in Fig. 3.12.

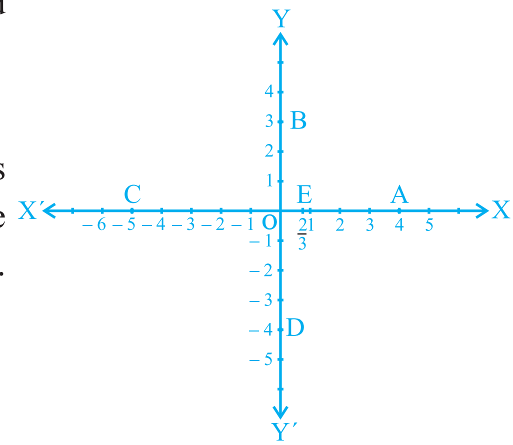


Fig. 3.12

Solution : You can see that :

(i) The point A is at a distance of + 4 units from the y -axis and at a distance zero from the x - axis. Therefore, the x - coordinate of A is 4 and the y - coordinate is 0. Hence, the coordinates of A are (4, 0).

(ii) The coordinates of B are (0, 3). Why?

(iii) The coordinates of C are (– 5, 0). Why?

(iv) The coordinates of D are (0, – 4). Why?

(v) The coordinates of E are $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Why?

Since every point on the x - axis has no distance (zero distance) from the x - axis, therefore, the y - coordinate of every point lying on the x - axis is always zero. Thus, the coordinates of any point on the x - axis are of the form (x, 0), where x is the distance of the point from the y - axis. Similarly, the coordinates of any point on the y - axis are of the form (0, y), where y is the distance of the point from the x - axis. Why?

What are the coordinates of the ***origin*** **O**? *It has zero distance from both the axes so that its abscissa and ordinate are both zero. Therefore, the coordinates of the origin are* **(0, 0)**.

In the examples above, you may have observed the following relationship between the signs of the coordinates of a point and the quadrant of a point in which it lies.

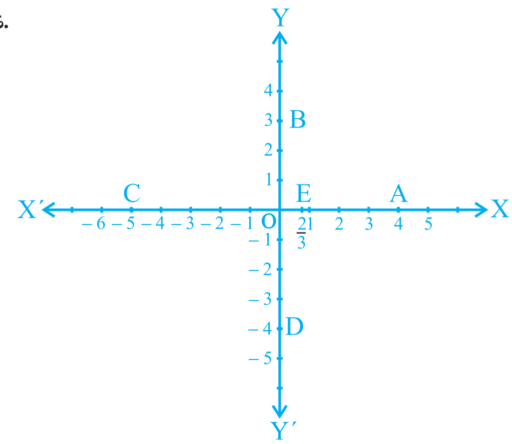
(i) If a point is in the 1st quadrant, then the point will be in the form (+, +), since the 1st quadrant is enclosed by the positive x - axis and the positive y - axis.

(ii) If a point is in the 2nd quadrant, then the point will be in the form (–, +), since the 2nd quadrant is enclosed by the negative x - axis and the positive y - axis.

(iii) If a point is in the 3rd quadrant, then the point will be in the form (–, –), since the 3rd quadrant is enclosed by the negative x - axis and the negative y - axis.

(iv) If a point is in the 4th quadrant, then the point will be in the form (+, –), since the 4th quadrant is enclosed by the positive x - axis and the negative y - axis (see Fig. 3.13).

ఉదాహరణ 2: పటం 3.12 లో చూపిన బిందువులకు నిరూపకాలు రాయండి.



పటం. 3.12

సాధన:

(i) A బిందువు Y – అక్షం నుండి + 4 యూనిట్ల దూరంలో మరియు X- అక్షం నుండి సున్నా దూరంలో ఉంటుంది. కాబట్టి, A X నిరూపకం 4 మరియు Y - నిరూపకం 0. అందువల్ల A నిరూపకాలు (4, 0).

(ii) B బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (0,3) ఎందుకు?

(iii) C బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (-5, 0) ఎందుకు?

(iv) D బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (0,– 4) ఎందుకు?

(v) E బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ఎందుకు?

ప్రతి బిందువు X అక్షము నుండి సున్నా దూరంలో కలవు అని చెప్పవచ్చు. కావున, X- అక్షంపై ఉన్న ప్రతి బిందువు యొక్క Y- నిరూపకం విలువ 0. అందువల్ల, Y- అక్షం పై గల అన్ని బిందువులు (x,0) గా సూచించబడుతాయి. ఇందులో X అనునది Y అక్షం నుండి గల దూరం. అలాగే Y అక్షం పై గల అన్ని బిందువులు (0,y) రూపంలో ఉంటాయి. అందులో y అనునది X- అక్షం నుండి గల దూరం. ఎందుకు?

***మూలబిందువు** O* యొక్క నిరూపకాలు ఏవి? *ఇది రెండు అక్షాల నుండి సున్నా దూరాన్ని కలిగి ఉంటుంది కాబట్టి దాని ప్రథమ మరియు ద్వితీయ నిరూపకాలు రెండూ సున్నాగా ఉంటాయి. కాబట్టి, మూలబిందువు నిరూపకాలు **(0, 0)** అని* చెప్పవచ్చు.

పై ఉదాహరణలలో, మీరు ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాల గుర్తులు మరియు బిందువుగల పాదముల మధ్య ఈ క్రింది సంబంధాన్ని గమనించవచ్చు.

(i) ఒక బిందువు మొదటి పాదంలో ఉన్నట్లయితే, బిందువు (+, +) రూపంలోఉంటుంది, ఎందుకంటే మొదటి పాదం X- అక్షపు ధన దిశలో మరియు Y- అక్షపు ధన దిశలో ఉంటుంది.

(ii) ఒక బిందువు రెండవ పాదంలో ఉన్నట్లయితే, బిందువు (–, +) రూపంలోఉంటుంది, ఎందుకంటే రెండవ పాదం X- అక్షపు ఋణ దిశలో మరియు Y- అక్షపు ధన దిశలో ఉంటుంది.

(iii) ఒక బిందువు మూడవ పాదంలో ఉన్నట్లయితే, బిందువు (–, –) రూపంలోఉంటుంది, ఎందుకంటే మూడవ పాదం X- అక్షపు ఋణ దిశలో మరియు Y- అక్షపు ఋణ దిశలో ఉంటుంది.

(iv) ఒక బిందువు నాల్గవ పాదంలో ఉన్నట్లయితే, బిందువు (+, –) రూపంలోఉంటుంది, ఎందుకంటే నాల్గవ పాదం X- అక్షపు ధన దిశలో మరియు Y- అక్షపు ఋణ దిశలో ఉంటుంది. (3.13 పటాన్ని చూడుము)

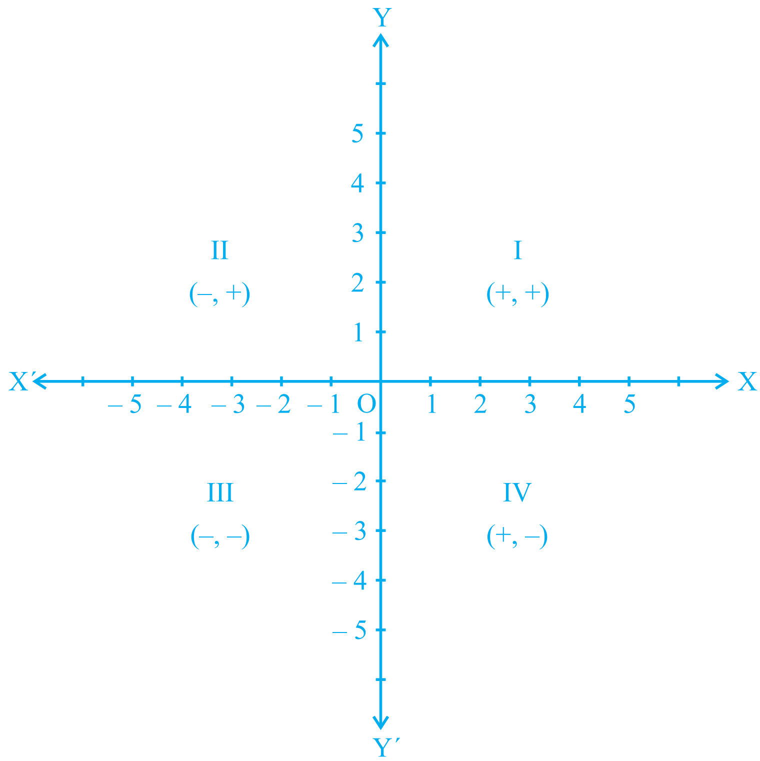


Fig. 3.13

Remark : The system we have discussed above for describing a point in a plane is only a convention, which is accepted all over the world. The system could also have been, for example, the ordinate first, and the abscissa second. However, the whole world sticks to the system we have described to avoid any confusion.

EXERCISE 3.2

1. Write the answer of each of the following questions:

(i) What is the name of horizontal and the vertical lines drawn to determine the position of any point in the Cartesian plane?

(ii) What is the name of each part of the plane formed by these two lines?

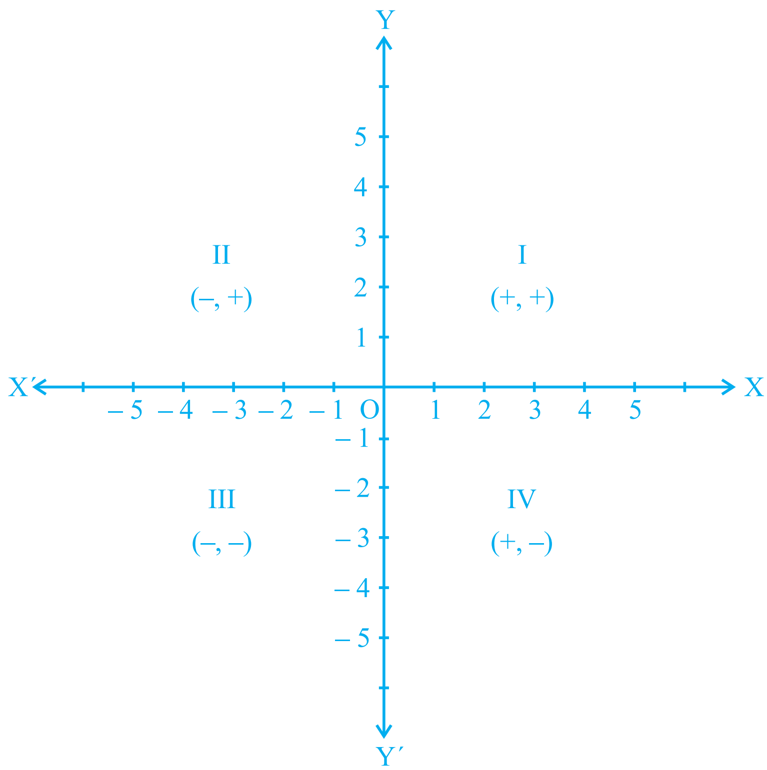
(iii) Write the name of the point where these two lines intersect.

2. See Fig.3.14, and write the following:

(i) The coordinates of B.

(ii) The coordinates of C.

(iii) The point identified by the coordinates (–3, –5).



పటం. 3.13

గమనిక : ఒక తలంలో బిందువును వివరించడానికి పైన చర్చించిన వ్యవస్థ ఒక వివరణ మాత్రమే, ఇది ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఆమోదించబడింది. ఉదాహరణకు, ఆర్డినేట్ (ద్వితీయ నిరూపకం) మొదటగా మరియు అబ్సిస్సా (ప్రథమ నిరూపకము) రెండవదిగా గల వ్యవస్థ కూడా ఉండియుండవచ్చు. అయితే, ఈ గందరగోళాలను నివారించడానికి ప్రపంచం మొత్తం మనం వివరించిన కార్టిజియన్ వ్యవస్థను అనుసరిస్తోంది.

అభ్యాసం 3.2

1. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.
   (i) ఒక కార్టీజియన్ ఒక తలంలో ఒక బిందువు స్థానాన్ని నిర్వచించడానికి గీసే క్షితిజ సమాంతర రేఖ మరియు క్షితిజ లంబరేఖల పేర్లను తెలపండి.
   (ii) ఈ రెండు రేఖల ద్వారా తలంలో ఏర్పడిన ప్రతి భాగం పేరు ఏమిటి?
   (iii) ఈ రెండు రేఖలు ఖండించుకునే బిందువు పేరు రాయండి.
2. 3.14 పటం చూసి క్రింది వాటిని రాయండి:
   (i) B నిరూపకాలు
   (ii) C నిరూపకాలు
   (iii) (–3, –5) నిరూపకాల ద్వారా నిర్వచించబడిన బిందువు

(iv) The point identified by the coordinates (2, – 4).

(v) The abscissa of the point D.

(vi) The ordinate of the point H.

(vii) The coordinates of the point L.

(viii) The coordinates of the point M.

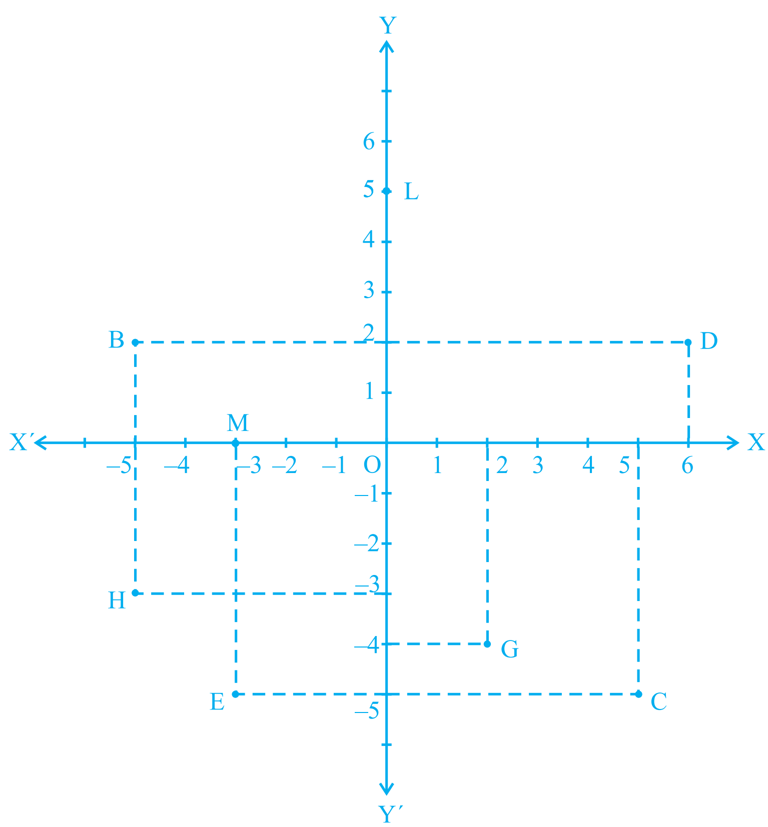


Fig. 3.14

3.3 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. To locate the position of an object or a point in a plane, we require two perpendicular lines. One of them is horizontal, and the other is vertical.

2. The plane is called the Cartesian, or coordinate plane and the lines are called the coordinate axes.

3. The horizontal line is called the x -axis, and the vertical line is called the y - axis.

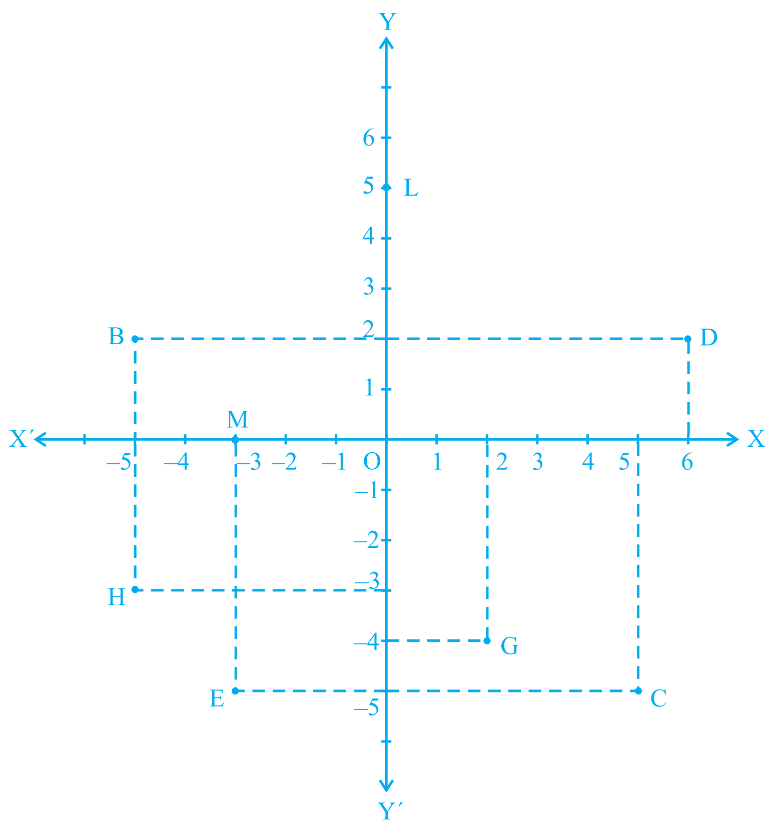
(iv) (2, −4) నిరూపకాల ద్వారా నిర్వచించబడిన బిందువు

(v) D బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం

(vi) H బిందువు యొక్క ద్వితీయ నిరూపకం

(vii) L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

(viii) M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు



పటం. 3.14

3.3 సారాంశం:

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేసారు :

1. ఒక తలములో ఒక వస్తువు లేదా బిందువు యొక్క స్థానాన్ని గుర్తించడానికి, మనకు లంబంగా రెండు రేఖలు అవసరం. వాటిలో ఒకటి క్షితిజ సమాంతరంగా ఉంటుంది, మరొకటి నిలువుగా ఉంటుంది.
2. ఈ తలమును కార్టీజియన్ లేదా నిరూపక తలం అని పిలుస్తారు మరియు రేఖలను నిరూపక అక్షాలు అంటారు.
3. క్షితిజ సమాంతర రేఖను X - అక్షం అని క్షితిజ లంబ రేఖను Y - అక్షం అని అంటాము.

4. The coordinate axes divide the plane into four parts called quadrants.

5. The point of intersection of the axes is called the origin.

6. The distance of a point from the y - axis is called its x-coordinate, or abscissa, and the distance of the point from the x-axis is called its y-coordinate, or ordinate.

7. If the abscissa of a point is x and the ordinate is y, then (x, y) are called the coordinates of the point.

8. The coordinates of a point on the x-axis are of the form $(x, 0)$ and that of the point on the y-axis are $(0, y)$.

9. The coordinates of the origin are $(0, 0)$.

10. The coordinates of a point are of the form $(+ , +)$ in the first quadrant, $(–, +)$ in the second quadrant, $(–, –)$ in the third quadrant and $(+, –)$ in the fourth quadrant, where $+$ denotes a positive real number and $–$ denotes a negative real number.

11. If $x \neq y$, then $(x, y) \neq (y, x)$, and $(x, y) = (y, x)$, if $x = y$.

4. నిరూపక అక్షాలు ఒక తలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా విభజిస్తాయి. వాటిని పాదాలు అంటారు.

5. అక్షాల ఖండన బిందువును మూల బిందువు అంటారు.

6. Y – అక్షం నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరాన్ని దాని x– నిరూపకం, లేదా ప్రథమ నిరూపకం లేదా అబ్సిస్సా అంటారు. x –అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరాన్ని దాని y – నిరూపకం, లేదా ద్వితీయ నిరూపకం లేదా ఆర్డినేట్ అంటారు.

7. ఒక బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం x, ద్వితీయ నిరూపకం y అయిన (x,y) ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు అంటాము.

8. X – అక్షం పై గల బిందువు నిరూపకాలు (x, 0) మరియు Y – అక్షం పై గల బిందువు నిరూపకాలు (0,y) రూపములో ఉంటాయి.

9. మూల బిందువు నిరూపకాలు (0, 0)

10. ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలు మొదటి పాదంలో (+, +) రూపంలో, రెండవ పాదంలో (–, +) రూపంలో, మూడవ పాదంలో (–, –) మరియు నాల్గవ రూపంలో (+,–) రూపంలోనూ ఉంటాయి [+ అనేది ధన సంఖ్య, – అనేది ఋణ సంఖ్యగా సూచిస్తాం].

11. $x \neq y$ అయితే $(x, y) \neq (y, x)$, మరియు $x = y$ అయితే $(x, y) = (y, x)$

0962CH04

CHAPTER 4

LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

—***Edmund Halley***

4.1 Introduction

In earlier classes, you have studied linear equations in one variable. Can you write down a linear equation in one variable? You may say that $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ and $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ are examples of linear equations in one variable. You also know that such equations have a unique (i.e., one and only one) solution. You may also remember how to represent the solution on a number line. In this chapter, the knowledge of linear equations in one variable shall be recalled and extended to that of two variables. You will be considering questions like: Does a linear equation in two variables have a solution? If yes, is it unique? What does the solution look like on the Cartesian plane? You shall also use the concepts you studied in Chapter 3 to answer these questions.

4.2 Linear Equations

Let us first recall what you have studied so far. Consider the following equation:

$$2x + 5 = 0$$

Its solution, i.e., the root of the equation, is $-\frac{5}{2}$. This can be represented on the number line as shown below:

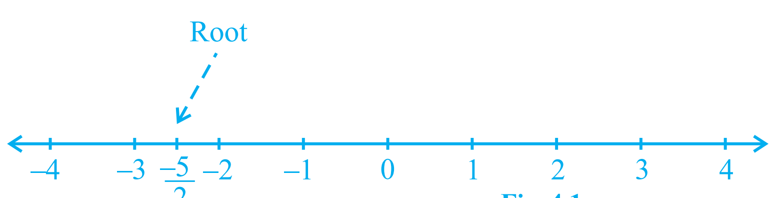


Fig. 4.1

L3U1E3

అధ్యాయం 4

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు

విశ్లేషణాత్మక కళ యొక్క ప్రధాన ఉపయోగం గణిత సమస్యలను సమీకరణాల రూపంలోనికి తీసుకురావడం మరియు ఆ సమీకరణాలను అత్యంత సాధారణ పదాలలో ప్రదర్శించడం.

– ఎడ్మండ్ హాలీ

4.1 పరిచయం :

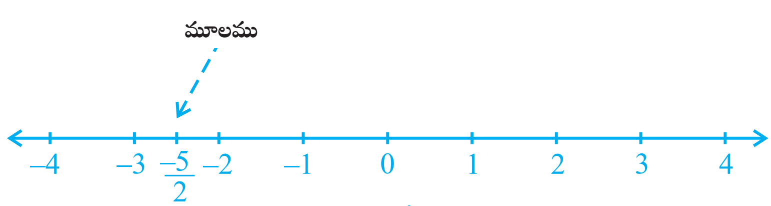
మీరు క్రింది తరగతులలో ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలను అధ్యయనం చేసారు. మీరు ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలను రాయగలరా? $x + 1 = 0, x + \sqrt{2} = 0$ మరియు $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ అనునవి ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణగా పేర్కొంటారు. ఇలాంటి రేఖీయ సమీకరణాలకు ఏకైక (unique) (ఒకేఒక) విలువ సాధనగా ఉంటుందనేది మీకు తెలుసు. సాధనను సంఖ్యారేఖపై ఎలా సూచించాలో కుడా మీరు గుర్తు చేసుకోవచ్చు. ఈ అధ్యాయంలో ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొని వాటిని రెండు చరరాశులకు విస్తరిస్తాం. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలకు సాధన ఉంటుందా? అవును అయితే, ఇది ఏకైకమా? కార్టిజియన్ తలంలో సాధన ఎలా ఉంటుంది? వంటి ప్రశ్నలను మీరు పరిశీలిస్తారు. ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వడానికి 3వ అధ్యాయంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలు కూడా ఉపయోగిస్తారు.

4.2 రేఖీయ సమీకరణాలు:

మీరు ఇంతవరకు నేర్చుకున్న విషయాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. క్రింది రేఖీయ సమీకరణాన్ని పరిశీలించండి.

$$2x + 5 = 0$$

దీనికి సాధన అనగా సమీకరణం యొక్క మూలం $-\frac{5}{2}$ అవుతుంది. దీనిని సంఖ్యా రేఖపై క్రింది విధంగా చూపించవచ్చు.



పటం. 4.1

While solving an equation, you must always keep the following points in mind:

The solution of a linear equation is not affected when:

(i) the same number is added to (or subtracted from) both the sides of the equation.

(ii) you multiply or divide both the sides of the equation by the same non-zero number.

Let us now consider the following situation:

In a One-day International Cricket match between India and Sri Lanka played in Nagpur, two Indian batsmen together scored 176 runs. Express this information in the form of an equation.

Here, you can see that the score of neither of them is known, i.e., there are two unknown quantities. Let us use x and y to denote them. So, the number of runs scored by one of the batsmen is x, and the number of runs scored by the other is y. We know that

$$x + y = 176,$$

which is the required equation.

This is an example of a linear equation in two variables. It is customary to denote the variables in such equations by x and y, but other letters may also be used. Some examples of linear equations in two variables are:

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ and } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y.$$

Note that you can put these equations in the form $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ and $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$, respectively.

So, any equation which can be put in the form $ax + by + c = 0$, where a, b and c are real numbers, and a and b are not both zero, is called a *linear equation in two variables*. This means that you can think of many many such equations.

Example 1 : Write each of the following equations in the form $ax + by + c = 0$ and indicate the values of a, b and c in each case:

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

Solution : (i) $2x + 3y = 4.37$ can be written as $2x + 3y - 4.37 = 0$. Here $a = 2$, $b = 3$ and $c = -4.37$.

(ii) The equation $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ can be written as $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$. Here $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ and $c = -4$.

(iii) The equation $4 = 5x - 3y$ can be written as $5x - 3y - 4 = 0$. Here $a = 5$, $b = -3$ and $c = -4$. Do you agree that it can also be written as $-5x + 3y + 4 = 0$? In this case $a = -5$, $b = 3$ and $c = 4$.

సమీకరణాన్ని సాధించేటప్పుడు, మనం ఎల్లప్పుడూ ఈ క్రింది అంశాలను గుర్తుంచుకోవాలి:

రేఖీయ సమీకరణం సాధన ప్రభావితం కాదు, ఎప్పుడంటే

1. ఒకే సంఖ్యను సమీకరణం ఇరువైపుల కూడినా (లేక తీసివేసినా),
2. సున్నాకు సమానం కాని ఒక సంఖ్యను సమీకరణం రెండువైపులా హెచ్చించినా, లేక భాగించినా.

ఇప్పుడు మనం క్రింద తెలిపిన సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం.

నాగపూర్‌లో ఇండియా శ్రీలంకకు మధ్య జరిగిన ఒక రోజు అంతర్జాతీయ క్రికెట్ మ్యాచ్‌లో ఇద్దరు ఆటగాళ్ళు కలిసి 176 పరుగులు చేసారు. ఈ దత్తాంశాన్ని ఒక సమీకరణంగా వ్యక్తపరచండి.

ఇచ్చట, ఆటగాళ్ళకి ఇరువురి స్కోర్ తెలియదు. అనగా రెండు తెలియని రాశులుగలవు. వీటిని సూచించుటకు x మరియు y లను ఉపయోగిద్దాం. అందులో ఒక ఆటగాడు తీసిన పరుగులు x గాను, మరొక ఆటగాడు తీసిన పరుగులు y గాను అనుకొనిన పై సమాచారాన్ని

$$x + y = 176,$$

అని రాయవచ్చు.

ఇది రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణానికి ఉదాహరణ. సాధారణంగా చరరాశులను x మరియు yలచే సూచించడం సాంప్రదాయమైనప్పటికీ, ఇతర అక్షరాలను కూడా వాడవచ్చు. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు:

$1.2s + 3t = 5$, $p + 4q = 7$, $\pi u + 5v = 9$ మరియు $3 = \sqrt{2}\,x - 7y$.

ఇవన్నీ కూడా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు అవుతాయి. వీటిని వరుసగా, $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ మరియు $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ రూపంలో కూడా రాయవచ్చని గమనించండి.

కాబట్టి, ఏదేని సమీకరణాన్ని $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాయగలిగితే దానిని రెండు చరరాసులలో రేఖీయ సమీకరణం అంటారు. ఇక్కడ a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలు, మరియు a, b లు ఒకేసారి సున్నా కాకూడదు. దీని నుండి ఇలాంటి అనేక సమీకరణాల గురించి మీరు ఆలోచించవచ్చు.

ఉదాహరణ 1: క్రింద ఇచ్చిన సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాయండి. ప్రతి సమీకరణము లో a,b,c విలువలను రాయండి.

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

సాధన:

(i) సమీకరణం $2x + 3y = 4.37$ ను $2x + 3y - 4.37 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇందులో $a = 2$, $b = 3$ మరియు $c = -4.37$

(ii) సమీకరణం $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ ను $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$గా రాయవచ్చు. ఇందులో $a = 2$, $b = 3$ మరియు $c = -4.37$

(iii) సమీకరణం $4 = 5x - 3y$ ను $5x - 3y - 4 = 0$గా రాయవచ్చు. ఇందులో $a = 5$, $b = -3$ మరియు $c = -4$

దీనిని $-5x + 3y + 4 = 0$ అని రాయవచ్చని మీరు అంగీకరిస్తారా? ఈ సందర్భంలో $a = -5$, $b = 3$ మరియు $c = 4$

(iv) The equation $2x = y$ can be written as $2x - y + 0 = 0$. Here $a = 2$, $b = -1$ and $c = 0$.

Equations of the type $ax + b = 0$ are also examples of linear equations in two variables because they can be expressed as

$$ax + 0.y + b = 0$$

For example, $4 - 3x = 0$ can be written as $-3x + 0.y + 4 = 0$.

Example 2 : Write each of the following as an equation in two variables:

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

Solution : (i) $x = -5$ can be written as $1.x + 0.y = -5$, or $1.x + 0.y + 5 = 0$.

(ii) $y = 2$ can be written as $0.x + 1.y = 2$, or $0.x + 1.y - 2 = 0$.

(iii) $2x = 3$ can be written as $2x + 0.y - 3 = 0$.

(iv) $5y = 2$ can be written as $0.x + 5y - 2 = 0$.

EXERCISE 4.1

1. The cost of a notebook is twice the cost of a pen. Write a linear equation in two variables to represent this statement.

   (Take the cost of a notebook to be ₹ x and that of a pen to be ₹ y).

2. Express the following linear equations in the form $ax + by + c = 0$ and indicate the values of a, b and c in each case:

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 Solution of a Linear Equation

You have seen that every linear equation in one variable has a unique solution. What can you say about the solution of a linear equation involving two variables? As there are two variables in the equation, a solution means a pair of values, one for x and one for y which satisfy the given equation. Let us consider the equation $2x + 3y = 12$. Here, $x = 3$ and $y = 2$ is a solution because when you substitute $x = 3$ and $y = 2$ in the equation above, you find that

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

This solution is written as an ordered pair (3, 2), first writing the value for x and then the value for y. Similarly, (0, 4) is also a solution for the equation above.

(iv) సమీకరణం $2x = y$ ను $2x - y + 0 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇందులో $a = 2, b = -1$ మరియు $c = 0$.

$ax + b = 0$ రూపంలో సమీకరణాలను $ax + 0.y + b = 0$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు. కావున వీటిని కూడా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలకు ఉదాహరణగా తెలపవచ్చు.

ఉదాహరణకు $4 - 3x = 0$ ను $-3x + 0.y + 4 = 0$గా రాయగలం.

ఉదాహరణ 2 : క్రిందివాటిని రెండు చరరాశులలో సమీకరణాన్ని రాయండి.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

సాధన : (i) $x = -5$ ని $1.x + 0.y = -5$, లేదా $1.x + 0.y + 5 = 0$ అని రాయవచ్చు

(ii) $y = 2$ ని $0.x + 1.y = 2$, లేదా $0.x + 1.y - 2 = 0$ అని రాయవచ్చు

(iii) $2x = 3$ ని $2x + 0.y - 3 = 0$ అని రాయవచ్చు

(iv) $5y = 2$ ని $0.x + 5y - 2 = 0$ అని రాయవచ్చు.

అభ్యాసం 4.1

1. ఒక నోటు పుస్తకం వెల పెన్ను ఖరీదు కన్నా రెండు రెట్లు. ఈ వాక్యాన్ని రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణంలో రాయండి.

   (నోటు పుస్తకం వెల ₹ x మరియు పెన్ను వెల ₹ y అనుకొనుము).

2. క్రింది రేఖీయ సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాసి, ప్రతి సందర్భంలో a, b, c విలువలను తెలపండి.

   (i) $2x + 3y = 9.3\bar{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 రేఖీయ సమీకరణం సాధన

ఏక చరరాశి రేఖీయ సమీకరణమునకు ఏకైక సాధన ఉందని మీరు గమనించారు. రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణం యొక్క సాధన గురించి నీవు ఏమి చెప్పగలవు? ఇచ్చట రెండు చరరాశులు ఉండుట చేత రేఖీయ సమీకరణంను తృప్తిపరిచే x మరియు y విలువల జతను దాని సాధన అంటాం. సమీకరణం $2x + 3y = 12$ ను తీసుకుందాం. ఇక్కడ $x = 3$ మరియు $y = 2$ దాని సాధన అవుతుంది. ఎందుకనగా $x = 3$ మరియు $y = 2$ లను పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$ అని మీరు కనుక్కుంటారు.

ఈ సాధనను మొదట x విలువను, తదుపరి y విలువను తీసుకొని (3,2) అను క్రమయుగ్మంముగా రాయవచ్చు. అదేవిధంగా (0, 4) అనునది కూడా పై సమీకరణానికి ఒక సాధన అవుతుంది.

On the other hand, $(1, 4)$ is not a solution of $2x + 3y = 12$, because on putting $x = 1$ and $y = 4$ we get $2x + 3y = 14$, which is not 12. Note that $(0, 4)$ is a solution but not $(4, 0)$.

You have seen at least two solutions for $2x + 3y = 12$, i.e., $(3, 2)$ and $(0, 4)$. Can you find any other solution? Do you agree that $(6, 0)$ is another solution? Verify the same. In fact, we can get many many solutions in the following way. Pick a value of your choice for x (say $x = 2$) in $2x + 3y = 12$. Then the equation reduces to $4 + 3y = 12$, which is a linear equation in one variable. On solving this, you get $y = \frac{8}{3}$. So $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ is another solution of $2x + 3y = 12$. Similarly, choosing $x = -5$, you find that the equation becomes $-10 + 3y = 12$. This gives $y = \frac{22}{3}$. So, $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ is another solution of $2x + 3y = 12$. So there is no end to different solutions of a linear equation in two variables. That is, *a linear equation in two variables has infinitely many solutions.*

Example 3 : Find four different solutions of the equation $x + 2y = 6$.

Solution : By inspection, $x = 2, y = 2$ is a solution because for $x = 2, y = 2$

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

Now, let us choose $x = 0$. With this value of x, the given equation reduces to $2y = 6$ which has the unique solution $y = 3$. So $x = 0, y = 3$ is also a solution of $x + 2y = 6$. Similarly, taking $y = 0$, the given equation reduces to $x = 6$. So, $x = 6, y = 0$ is a solution of $x + 2y = 6$ as well. Finally, let us take $y = 1$. The given equation now reduces to $x + 2 = 6$, whose solution is given by $x = 4$. Therefore, $(4, 1)$ is also a solution of the given equation. So four of the infinitely many solutions of the given equation are:

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ and } (4, 1).$$

Remark : Note that an easy way of getting a solution is to take $x = 0$ and get the corresponding value of y. Similarly, we can put $y = 0$ and obtain the corresponding value of x.

Example 4 : Find two solutions for each of the following equations:

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

Solution : (i) Taking $x = 0$, we get $3y = 12$, i.e., $y = 4$. So, $(0, 4)$ is a solution of the given equation. Similarly, by taking $y = 0$, we get $x = 3$. Thus, $(3, 0)$ is also a solution.

కానీ, $(1, 4)$ అనునది $2x + 3y = 12$ నకు సాధన కాదు. $x = 1$ మరియు $y = 4$ లను ప్రతిక్షేపించిన $2x + 3y = 14$ పొందుతాం, అది 12కు సమానం కాదు. $(0, 4)$ అనేది సాధన, కానీ $(4, 0)$ కాదు అని గమనించండి.

$2x + 3y = 12$ నకు కనీసం రెండు సాధనలను మీరు చూసారు. అవి $(3,2)$ మరియు $(0,4)$. ఇంకా ఏమైనా సాధనలు కనుక్కోగలరా? $(6,0)$ మరో సాధన అవుతుందని మీరు అంగీకరిస్తారా? పైవిధంగా పరిశీలించండి. నిజానికి, ఈ పద్ధతి ప్రకారం అనేక సాధనలు పొందుతాము. $2x + 3y = 12$ నందు x కొరకు ఏదేని ఒక విలువను తీసుకోండి. ($x = 2$ అనుకొనిన), అప్పుడు సమీకరణం $4 + 3y = 12$ గా ఏక చరరాశి రేఖీయ సమీకరణంగా మారుతుంది. దీన్ని సాధించిన $y = \frac{8}{3}$ వచ్చును. కావున $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ అనునది $2x + 3y = 12$ నకు ఇంకొక సాధన అవుతుంది. అదేవిధంగా $x = -5$ అయిన, సమీకరణం $-10 + 3y = 12$ గా మారుతుంది. అది $y = \frac{22}{3}$ అవుతుంది. కావున $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ అనునది $2x + 3y = 12$నకు ఇంకొక సాధన. కావున, రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణం విభిన్న సాధనలకు అంతం ఉండదు. అనగా *రెండు చరరాశులు గల ఒక రేఖీయ సమీకరణానికి అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి.*

ఉదాహరణ 3 : $x + 2y = 6$ సమీకరణానికి నాలుగు విభిన్న సాధనలను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని పరిశీలించిన తర్వాత $x = 2$ మరియు $y = 2$ అనేది ఒక సాధన అవుతుంది.

ఎందుకనగా $x = 2, y = 2$ లకు

$$x + 2y = 2 + 4 = 6 \text{ అవుతుంది.}$$

ఇప్పుడు మనం $x = 0$ గా తీసుకుందాం. అప్పుడు ఇచ్చిన సమీకరణం $2y = 6$గా మారుట వలన $y = 3$ అనేది ఏకైక సాధన అవుతుంది. కావున $x = 0, y = 3$ అనునది $x + 2y = 6$ నకు కూడా ఒక సాధన. అదేవిధంగా $y = 0$ అయిన $x = 6$ అగును. కావున $x = 6, y = 0$ అనునది $x + 2y = 6$ నకు ఒక సాధన. చివరిగా $y = 1$ తీసుకుందాం. ఇచ్చిన సమీకరణం $x + 2 = 6,$ గా మారడం వలన $x = 4$ వస్తుంది. $(4, 1)$ కూడా ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక సాధన.

కాబట్టి, $(2, 2), (0, 3), (6, 0)$ మరియు $(4, 1)$ పై సమీకరణానికి అనంత సాధనాలలో నాలుగు సాధనలు అవుతాయి.

సూచిక: ఇచ్చిన సమీకరణానికి సులభంగా సాధనా విలువల జతను పొందుటకు $x = 0$ గా తీసుకొని సంబంధింత y విలువను, అలాగే $y = 0$ గా తీసుకొని సంబంధిత x విలువను సులభంగా కనుక్కోవచ్చు.

ఉదాహరణ 4 : క్రింద ఇచ్చిన సమీకరణానికి రెండేసి సాధనలను కనుగొనండి.

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

సాధన : (i) $x = 0$ గా తీసుకొనిన మనకు $3y = 12$ వస్తుంది. కావున $y = 4$ సమీకరణంకు $(0, 4)$ ఒక సాధన. అదేవిధంగా $y = 0$ అని తీసుకొనిన మనకు $x = 3$ వస్తుంది. అందువలన $(3, 0)$ కూడా ఒక సాధన.

(ii) Taking $x = 0$, we get $5y = 0$, i.e., $y = 0$. So (0, 0) is a solution of the given equation. Now, if you take $y = 0$, you again get (0, 0) as a solution, which is the same as the earlier one. To get another solution, take $x = 1$, say. Then you can check that the corresponding value of y is $-\frac{2}{5}$.

So $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ is another solution of $2x + 5y = 0$.

(iii) Writing the equation $3y + 4 = 0$ as $0.x + 3y + 4 = 0$, you will find that $y = -\frac{4}{3}$ for any value of x. Thus, two solutions can be given as $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ and $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$.

EXERCISE 4.2

1. Which one of the following options is true, and why?

$y = 3x + 5$ has

(i) a unique solution, (ii) only two solutions, (iii) infinitely many solutions

2. Write four solutions for each of the following equations:

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. Check which of the following are solutions of the equation $x - 2y = 4$ and which are not:

(i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0)

(iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) (1, 1)

4. Find the value of k, if $x = 2$, $y = 1$ is a solution of the equation $2x + 3y = k$.

4.4 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. An equation of the form $ax + by + c = 0$, where a, b and c are real numbers, such that a and b are not both zero, is called a linear equation in two variables.

2. A linear equation in two variables has infinitely many solutions.

3. Every point on the graph of a linear equation in two variables is a solution of the linear equation. Moreover, every solution of the linear equation is a point on the graph of the linear equation.

(ii) $x = 0$ గా తీసుకొనిన మనకు $5y = 0$ వస్తుంది. అంటే $y = 0$ కావున ఇచ్చిన సమీకరణానికి $(0, 0)$ ఒక సాధన అవుతుంది. అదేవిధంగా $y = 0$ అని తీసుకొనిన మనకు $x = 0$ వస్తుంది. మరల సమీకరణంకు $(0,0)$ ఒక సాధన అవుతుంది. ఇది మునుపటి మాదిరిగానే ఉంది. మరొక సాధన కోసం $x = 1$ని తీసుకోండి. అపుడు y యొక్క విలువ $-\frac{2}{5}\cdot$ అని సరిచూడవచ్చు. అందువలన $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ సమీకరణంకు మరొక సాధన అవుతుంది.

(iii) ఇచ్చిన సమీకరణం $3y + 4 = 0$ ను $0.x + 3y + 4 = 0$ గా రాసిన x యొక్క ఏదైనా విలువకు $y = -\frac{4}{3}$ అని కనుగొనవచ్చు. ఆవిధంగా $\left[0,-\frac{4}{3}\right]$ మరియు $\left[1,-\frac{4}{3}\right]$ అనే రెండు సాధనలు ఇవ్వవచ్చు

అభ్యాసం 4.2

1. క్రింది వానిలో సరియైనది ఏది? ఎందుకు?

రేఖీయ సమీకరణం $y = 3x + 5$ నకు

(i) ఏకైక సాధన ఉంటుంది (ii) రెండు సాధనలు మాత్రమే ఉంటాయి (iii) అనంత సాధనలు ఉంటాయి

2. క్రింది సమీకరణాలకు ఒక్కొక్క దానికి నాలుగేసి సాధనలు రాయండి.

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. క్రింది వానిలో $x - 2y = 4$ సమీకరణానికి సాధనలు ఏవి? ఏవి కావు?

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

4. $x = 2, y = 1$ అనేవి $2x + 3y = k$ నకు సాధన అయితే k విలువ కనుగొనండి.

4.4 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో క్రింద ఇవ్వబడిన అంశాల గురించి నేర్చుకున్నాం.

1. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణం సాధారణ రూపం $ax + by + c = 0$, a, b మరియు c వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు a, b లు రెండూ ఒకేసారి సున్నాలు కావు.

2. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణానికి అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

3. రేఖా చిత్రంపై గల ప్రతి బిందువు రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణానికి ఒక సాధన అవుతుంది. అంతేకాకుండా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణానికి ప్రతీ సాధన రేఖా చిత్రం పై ఒక బిందువు అవుతుంది.

0962CH05

CHAPTER 5

INTRODUCTION TO EUCLID'S GEOMETRY

5.1 Introduction

The word 'geometry' comes form the Greek words 'geo', meaning the 'earth', and 'metrein', meaning 'to measure'. Geometry appears to have originated from the need for measuring land. This branch of mathematics was studied in various forms in every ancient civilisation, be it in Egypt, Babylonia, China, India, Greece, the Incas, etc. The people of these civilisations faced several practical problems which required the development of geometry in various ways.

For example, whenever the river Nile overflowed, it wiped out the boundaries between the adjoining fields of different land owners. After such flooding, these boundaries had to be redrawn. For this purpose, the Egyptians developed a number of geometric techniques and rules for calculating simple areas and also for doing simple constructions. The knowledge of geometry was also used by them for computing volumes of granaries, and for constructing canals and pyramids. They also knew the correct formula to find the volume of a truncated pyramid (see Fig. 5.1). You know that a pyramid is a solid figure, the base of which is a triangle, or square, or some other polygon, and its side faces are triangles converging to a point at the top.

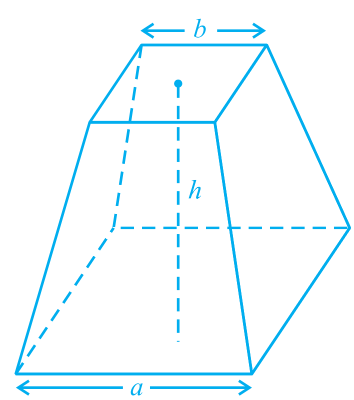


Fig. 5.1 : A Truncated Pyramid

PZZ8KZ

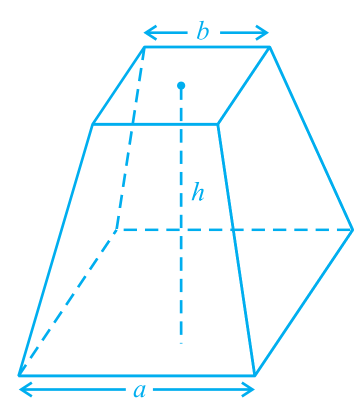
అధ్యాయం 5

యూక్లిడ్ జ్యామితి పరిచయం

5.1 పరిచయం

'జ్యామెట్రీ' (geometry) అను ఆంగ్లపదం "జియో" (geo) అనగా భూమి మరియు "మెట్రాన్" (metrein) అనగా కొలుచుట అనే గ్రీకు పదాల నుండి గ్రహించబడింది. జ్యామితి అనేది భూ కొలతలు కొలుచుటకు ఉద్భవించిందిగా భావించవచ్చు. ఈజిప్టు, బాబిలోనియా, చైనా, భారత్, గ్రీసు యొక్క ప్రాచీన నాగరికతలలో గణితశాస్త్రంలోని ఒక శాఖ అయిన జ్యామితి అనేక రూపాలలో అధ్యయనం చేయబడింది. జ్యామితి వివిధ మార్గాల ద్వారా అభివృద్ధి చెందుటకు ఆవశ్యకమైన అనేక ఆచరణాత్మక సమస్యలను ఈ నాగరితలకు చెందిన ప్రజలు ఎదుర్కొన్నారు.

ఉదాహరణకు నైలునది పొంగినప్పుడల్లా భూ యజమానుల ప్రక్క ప్రక్క పొలాల హద్దులు తుడిచిపెట్టుకుపోయేవి. ఆ వరదల తర్వాత మరలా వాటిని పున:నిర్మించ వలసి వచ్చేది. ఇటువంటి సమస్యలను అధిగమించుటకు, సాధారణ వైశాల్యాలను లెక్కించుటకు, సాధారణ నిర్మాణాలను నిర్మించుటకు ఈజిప్షియన్లు అనేక రకాలైన రేఖాగణిత పద్ధతులు, నియమాలను అభివృద్ధి చేశారు. ధాన్యాగారాల పరిమాణం లెక్కించుటకు, కాలువలు, పిరమిడ్లు నిర్మించుటకు ఈజిప్షియన్లకు ఈ రేఖాగణిత జ్ఞానం ఉపయోగపడింది. అంతేకాకుండా సరైన సూత్రం ఆధారంగా ట్రన్కేటడ్ పిరమిడ్ (పటం 5.1 చూడండి) ఘనపరిమాణం కనుగొనుట కూడా వీరికి తెలుసు. పిరమిడ్ అనునది ఒక ఘనాకృతి అని మీకు తెలుసు. దీని భూమి త్రిభుజాకారంలో గాని లేదా చతురస్రాకారంలో గాని లేదా ఏదైనా ఒక బహుభుజి ఆకారంలో ఉంటూ దాని ప్రక్క తలాలు త్రిభుజాకారంలో ఉండి పైన ఒక శీర్షం వద్ద కలుస్తాయి .



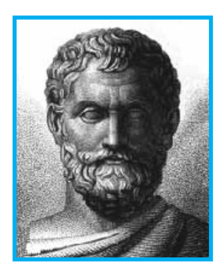
పటం. 5.1: ట్రన్కేటడ్ పిరమిడ్

In the Indian subcontinent, the excavations at Harappa and Mohenjo-Daro, etc. show that the Indus Valley Civilisation (about 3000 BCE) made extensive use of geometry. It was a highly organised society. The cities were highly developed and very well planned. For example, the roads were parallel to each other and there was an underground drainage system. The houses had many rooms of different types. This shows that the town dwellers were skilled in mensuration and practical arithmetic. The bricks used for constructions were kiln fired and the ratio length : breadth : thickness, of the bricks was found to be 4 : 2 : 1.

In ancient India, the *Sulbasutras* (800 BCE to 500 BCE) were the manuals of geometrical constructions. The geometry of the Vedic period originated with the construction of altars (or *vedis*) and fireplaces for performing Vedic rites. The location of the sacred fires had to be in accordance to the clearly laid down instructions about their shapes and areas, if they were to be effective instruments. Square and circular altars were used for household rituals, while altars whose shapes were combinations of rectangles, triangles and trapeziums were required for public worship. The *sriyantra* (given in the *Atharvaveda*) consists of nine interwoven isosceles triangles. These triangles are arranged in such a way that they produce 43 subsidiary triangles. Though accurate geometric methods were used for the constructions of altars, the principles behind them were not discussed.

These examples show that geometry was being developed and applied everywhere in the world. But this was happening in an unsystematic manner. What is interesting about these developments of geometry in the ancient world is that they were passed on from one generation to the next, either orally or through palm leaf messages, or by other ways. Also, we find that in some civilisations like Babylonia, geometry remained a very practical oriented discipline, as was the case in India and Rome. The geometry developed by Egyptians mainly consisted of the statements of results. There were no general rules of the procedure. In fact, Babylonians and Egyptians used geometry mostly for practical purposes and did very little to develop it as a systematic science. But in civilisations like Greece, the emphasis was on the *reasoning* behind why certain constructions work. The Greeks were interested in establishing the truth of the statements they discovered using deductive reasoning (see Appendix 1).

A Greek mathematician, Thales is credited with giving the first known proof. This proof was of the statement that a circle is bisected (i.e., cut into two equal parts) by its diameter. One of Thales' most famous pupils was Pythagoras (572 BCE), whom you have heard about. Pythagoras and his group discovered many geometric properties and developed the theory of geometry to a great extent. This process continued till 300 BCE. At that time Euclid, a teacher of mathematics at Alexandria in Egypt, collected all the known work and arranged it in his famous treatise

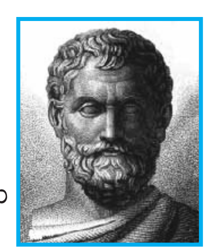


Thales
(640 BCE – 546 BCE)
Fig. 5.2

భారత ఉపఖండంలోని హరప్పా, మొహంజదారో మొదలగు ప్రాంతాలలో జరుపబడిన త్రవ్వకాలలో బయల్పడిన నాటి నుండి సింధులోయ నాగరికత ప్రజలు (క్రీ.పూ. 3000) జ్యామితిని విస్తృతంగా ఉపయోగించినట్లు తెలిస్తున్నది. అది ఒక ఉన్నతమైన వ్యవస్థీకృత సమాజం. అక్కడ పట్టణాలు ప్రణాళికాబద్ధంగా, బాగా అభివృద్ధి చెందినవి. ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉన్న రహదారులు, భూగర్భ మురుగునీటి వ్యవస్థ దీనికి ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చు. వివిధ రకాలుగా ఉన్న అనేక గదులతో కూడిన గృహ నిర్మాణాలు కలవు. ఇది అక్కడి పట్టణ ప్రజల క్షేత్రమితి, ఆచరణాత్మక అంకగణితములలో గల నైపుణ్యాలను తెలియచేస్తున్నది. పొడవు, వెడల్పు, మందములు 4:2:1 నిష్పత్తిలో ఉండునట్లు కొలిమిలో బాగా కాల్చబడిన ఇటుకలతో కట్టడాలు నిర్మించినట్లు కనుగొనబడింది.

ప్రాచీన భారతదేశంలో *శుల్బ సూత్రాలు* (క్రీ.పూ. 300 నుండి క్రీ.పూ. 500) ఆధారంగా జ్యామితీయ నిర్మాణాలు కలవు. వేదకాలంలోనే వైదిక ఆచారాలను నిర్వహించుటకు/ఆచరించుటకు గాను యజ్ఞ వాటికలు మరియు హోమ గుండాల నిర్మాణం కొరకు జ్యామితి ఉద్భవించింది. ఇవి సమర్థవంతమైన సాధనాలుగా పనిచేయుటకు హోమాగ్ని ఉంచు స్థానానికి అనుగుణంగా వాటి యొక్క ఆకారం, వైశాల్యానికి సంబంధించి స్పష్టమైన సూచనలు ఇవ్వబడ్డాయి. గృహాచారాల కొరకు చతురస్రాకార, వృత్తాకారంలో ఉన్న హోమగుండాలను ఉపయోగించేవారు. దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజం, సమలంబ చతుర్భుజముల కలయిక ఆకారంలో ఉన్న హోమగుండాలను ప్రజలు ఆరాధనల కొరకు ఉపయోగించేవారు. *శ్రీ యంత్ర* (*అధర్వణ వేదం*లో ఇవ్వబడింది) అంతరంగా అల్లిన 9 సమద్విబాహు త్రిభుజాలను కలిగి ఉంటుంది. ఇవి ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చబడి 43 అనుబంధ త్రిభుజాలను ఉత్పత్తి చేస్తాయి. యజ్ఞ వాటికలు, హోమగుండాల నిర్మాణానికి ఖచ్చితమైన జ్యామితీయ పద్ధతులను ఉపయోగించినప్పటికీ వాటికి సంబంధించిన సూత్రాల గురించి చర్చించలేదు.

పై ఉదాహరణల ద్వారా జ్యామితి అభివృద్ధి జరుగుతూ ప్రపంచం నలుమూలలా వినియోగిస్తున్నట్లు తెలుస్తున్నది. కానీ ఇది అస్తవ్యస్తంగా జరుగుతున్నది. ప్రాచీనకాలంలో ప్రపంచంలో ఈ అంశాలను ఒక తరం నుండి మరొక తరం వారికి మౌఖికంగా గాని లేదా తాళపత్ర గ్రంధాల ద్వారా గానీ ఇతర పద్ధతుల ద్వారా గానీ జ్యామితిని అందించుట ఆసక్తికరమైన అంశం. బాబిలోనియా, భారతదేశం, రోమ్‌లలో జ్యామితి చాలా క్రమమైన ఆచరణాత్మకమైన అంశంగా కలదు. ఈజిప్షియన్లు అభివృద్ధి చేసిన జ్యామితిలో కేవలం ఫలితాల ప్రవచనాలు మాత్రమే ఉన్నాయి. ఈ ఫలితాలకు వెనుక గల సాధారణ నియమాలను తెలుపలేదు. నిజానికి బాబిలోనియన్లు, ఈజిప్షియన్లు జ్యామితిని ఆచరణాత్మక ప్రయోజనం కొరకు ఎక్కువగా వినియోగించారు. ఇలా దీనిని ఒక క్రమబద్ధమైన శాస్త్రంగా అభివృద్ధికి చాలా తక్కువ కృషి చేశారు. కాని గ్రీకు వంటి నాగరికతలలో ఆయా కట్టడాల వెనుకగల తార్కికతను, (కారణాలను) తెలుసుకొనుటకు ప్రాధాన్యం ఇచ్చేవారు. గ్రీకులు వారు కనుగొన్న ప్రవచనాల సత్యాలను నిగమన తర్కం ద్వారా ప్రతిపాదించుటకు ఆసక్తి చూపేవారు. (అనుబంధం-1 చూడండి)



థేల్స్
(క్రీ.పూ. 640 – క్రీ.పూ. 546)
పటం. 5.2

"ఒక వృత్తం దాని యొక్క వ్యాసంచే రెండు భాగములుగా (రెండు సమభాగాలుగా) విభజింపబడెను" అను ప్రవచనానికి మొట్టమొదట నిరూపణ ఇచ్చిన గ్రీకు గణితవేత్త థేల్స్. థేల్స్ యొక్క ప్రముఖ శిష్యులలో పైథాగరస్ (క్రీ.పూ. 572) గురించి మీరు వినే ఉంటారు. పైథాగరస్ అతని బృందం అనేక జ్యామితీయ నియమాలను కనుగొన్నారు. జ్యామితీయ సిద్ధాంతాలను విస్తృతంగా అభివృద్ధి చేశారు. క్రీ.పూ. 300 వరకు వీరి విధానం కొనసాగింది. ఆ సమయంలో ఈజిప్టులోని అలెగ్జాండ్రియాకు చెందిన "థేల్స్" గణితశాస్త్ర ఉపాధ్యాయుడైన యూక్లిడ్ అతని అధ్యయన విషయ పరిజ్ఞానాన్ని సేకరించి, సుప్రసిద్ధ గ్రంధం "ఎలిమెంట్స్" లో పొందుపరిచాడు.

called 'Elements'. He divided the 'Elements' into thirteen chapters, each called a book. These books influenced the whole world's understanding of geometry for generations to come.

In this chapter, we shall discuss Euclid's approach to geometry and shall try to link it with the present day geometry.

Euclid (325 BCE – 265 BCE)
Fig. 5.3

5.2 Euclid's Definitions, Axioms and Postulates

The Greek mathematicians of Euclid's time thought of geometry as an abstract model of the world in which they lived. The notions of point, line, plane (or surface) and so on were derived from what was seen around them. From studies of the space and solids in the space around them, an abstract geometrical notion of a solid object was developed. A solid has shape, size, position, and can be moved from one place to another. Its boundaries are called **surfaces.** They separate one part of the space from another, and are said to have no thickness. The boundaries of the surfaces are **curves** or straight **lines.** These lines end in **points**.

Consider the three steps from solids to points (solids-surfaces-lines-points). In each step we lose one extension, also called a **dimension**. So, a solid has three dimensions, a surface has two, a line has one and a point has none. Euclid summarised these statements as definitions. He began his exposition by listing 23 definitions in Book 1 of the 'Elements'. A few of them are given below :

1. A **point** is that which has no part.
2. A **line** is breadthless length.
3. The ends of a line are points.
4. A **straight line** is a line which lies evenly with the points on itself.
5. A **surface** is that which has length and breadth only.
6. The edges of a surface are lines.
7. A **plane surface** is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.

If you carefully study these definitions, you find that some of the terms like part, breadth, length, evenly, etc. need to be further explained clearly. For example, consider his definition of a point. In this definition, 'a part' needs to be defined. Suppose if you define 'a part' to be that which occupies 'area', again 'an area' needs to be defined. So, to define one thing, you need to define many other things, and you may get a long chain of definitions without an end. For such reasons, mathematicians agree to leave

అతడు 'ఎలిమెంట్స్' అనే గ్రంథాన్ని 13 పుస్తకాల రూపంలో విభజించాడు. ఈ పుస్తకాలు ప్రపంచ వ్యాప్తంగా తర్వాత తరాల వారు జ్యామితిని అర్థం చేసుకోవడంలో ప్రభావితం చేసాయి. ఈ అధ్యాయంలో మనం యూక్లిడ్ జ్యామితీయ విధానం మరియు ప్రస్తుత జ్యామితిలో దానిని అనుసంధానం చేయుట గురించి చర్చిద్దాం.

యూక్లిడ్(క్రీ.పూ. 325 – క్రీ.పూ. 265)
పటం 5.3

5.2 యూక్లిడ్ నిర్వచనాలు, సామాన్య భావనలు మరియు స్వీకృతాలు

యూక్లిడ్ సమకాలీనులైన గ్రీకు గణితవేత్తలు 'జ్యామితి' అనునది తాము జీవిస్తున్న ప్రపంచానికి ఒక అమూర్త నమూనాగా భావించేవారు. తమ చుట్టూ ఉన్న పరిసరాల నుండి బిందువు, రేఖ, తలము (లేదా ఉపరితలం) వంటి అనేక ఊహాజనిత భావనలను (ఉద్భవించినవి) పరిసరాలలోని ఘనాలు మరియు అంతరాళం నుండి ఘనాల యొక్క జ్యామితీయ అమూర్త భావన అభివృద్ధి చేయబడింది. ప్రతి ఘనం ఆకారాన్ని పరిమాణాన్ని, స్థితిని కలిగి ఉండి ఒకచోటు నుండి మరొక చోటుకు కదల్చటానికి వీలవుతుంది. దాని హద్దులను **తలాలు** అంటారు. ఈ తలాలు ఘనంలోని భాగాలను ఒకదాని నుండి మరొక దానిని వేరు చేస్తాయి. ఈ తలాలకు మందం ఉండదు. తలాల యొక్క హద్దులుగా **వక్రాలు**గాని **సరళరేఖలు**గాని ఉంటాయి. ఈ రేఖలు **బిందువుల** వద్ద అంతమవుతాయి.

ఘనాల నుండి బిందువుల వరకు గల మూడు దశలు / సోపానాలను పరిగణించండి. (ఘనాలు–తలాలు–రేఖలు–బిందువులు) ప్రతీ సోపానంలో ఒక మితిని కోల్పోతాయి. కావున ఘనం మూడు మితులను కలిగి ఉంటుంది. తలం రెండు మితులను కలిగి ఉండగా సరళరేఖకు ఒక మితి మాత్రమే ఉంటుంది మరియు బిందువుకు ఎటువంటి మితులు ఉండవు. యూక్లిడ్ ఈ ప్రవచనాలను నిర్వచనాల రూపంలో సంకలనం చేసాడు. అతను 'ఎలిమెంట్స్' గ్రంథంలో 1వ పుస్తకంలో 23 నిర్వచనాల జాబితాను తెలియచేసాడు. వాటిలో కొన్ని క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

1. **బిందువు** అంటే ఎటువంటి భాగాలు లేనిది.
2. **రేఖ** అంటే వెడల్పు లేని పొడవు.
3. ఒక రేఖ యొక్క అంత్యాలు బిందువులు.
4. ఒక **సరళరేఖ** అంటే దానిమీదే బిందువులను సమంగా / తుల్యంగా కలిగియున్న రేఖ.
5. ఒక **తలం** అంటే పొడవు మరియు వెడల్పులను మాత్రమే కలిగియున్నది.
6. తలం యొక్క అంచులు సరళ రేఖలు.
7. ఒక **సమతలం** అంటే హెచ్చు,తగ్గులు లేకుండా (సమంగా) సరళ రేఖలను దానిపై కలిగి ఉండేది.

నీవు జాగ్రత్తగా ఈ నిర్వచనాలను అధ్యయనం చేస్తే స్పష్టంగా మరింత వివరణ ఇవ్వవలసిన పదాలైన భాగం, వెడల్పు, పొడవు, సమానం / తుల్యం మొదలగు వాటిని కనుగొనవచ్చు. ఉదాహరణకు 'బిందువు' యొక్క నిర్వచనాన్ని పరిగణలోకి తీసుకుంటే ఇందులో 'భాగం'ను నిర్వచించవలసి ఉంది. ఒకవేళ భాగం అను పదాన్ని నిర్వచిస్తే 'భాగం' కొంత 'వైశాల్యాన్ని' ఆక్రమిస్తుంది అంటే మరలా వైశాల్యంను గూర్చి స్పష్టతను ఇవ్వాలి. ఈవిధంగా ఒక పదాన్ని నిర్వహించుటకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ పదాలు గూర్చి స్పష్టత ఇవ్వటంలో అనేక పదాల సమాహారాన్ని అంతులేకుండా నిర్వచిస్తూ పోవాలి. అటువంటి కారణాల వలన కొన్ని జ్యామితీయ పదాలను 'అనిర్వచిత పదాలు' గా వదిలి వేయాలని గణితవేత్తలు అభిప్రాయపడ్డారు.

some geometric terms *undefined*. However, we do have a intuitive feeling for the geometric concept of a point than what the 'definition' above gives us. So, we represent a point as a dot, even though a dot has some dimension.

A similar problem arises in Definition 2 above, since it refers to breadth and length, neither of which has been defined. Because of this, a few terms are kept undefined while developing any course of study. So, in geometry, we *take a point, a line and a plane* (*in Euclid's words a plane surface*) *as undefined terms*. The only thing is that we can represent them intuitively, or explain them with the help of 'physical models'.

Starting with his definitions, Euclid assumed certain properties, which were not to be proved. These assumptions are actually 'obvious universal truths'. He divided them into two types: axioms and postulates. He used the term '**postulate**' for the assumptions that were specific to geometry. Common notions (often called **axioms**), on the other hand, were assumptions used throughout mathematics and not specifically linked to geometry. For details about axioms and postulates, refer to Appendix 1. Some of **Euclid's axioms**, not in his order, are given below :

(1) Things which are equal to the same thing are equal to one another.

(2) If equals are added to equals, the wholes are equal.

(3) If equals are subtracted from equals, the remainders are equal.

(4) Things which coincide with one another are equal to one another.

(5) The whole is greater than the part.

(6) Things which are double of the same things are equal to one another.

(7) Things which are halves of the same things are equal to one another.

These 'common notions' refer to magnitudes of some kind. The first common notion could be applied to plane figures. For example, if an area of a triangle equals the area of a rectangle and the area of the rectangle equals that of a square, then the area of the triangle also equals the area of the square.

Magnitudes of the same kind can be compared and added, but magnitudes of different kinds cannot be compared. For example, a line cannot be compared to a rectangle, nor can an angle be compared to a pentagon.

The 4th axiom given above seems to say that if two things are identical (that is, they are the same), then they are equal. In other words, everything equals itself. It is the justification of the principle of superposition. Axiom (5) gives us the definition of 'greater than'. For example, if a quantity B is a part of another quantity A, then A can be written as the sum of B and some third quantity C. Symbolically, $A > B$ means that there is some C such that $A = B + C$.

అయితే జ్యామితి భావనయైన 'బిందువు' కు పైన ఇచ్చిన నిర్వచనం కంటే మెరుగైన ఊహాజనిత భావన మనకు ఉంది. అందుకే బిందువుకు కొద్ది మితి ఉన్నప్పటికీ 'చుక్క' నే బిందువుగా పేర్కొంటాం.

పైన గల 2వ నిర్వచనంలో కూడా ఇటువంటి సమస్య ఉంది. ఆ నిర్వచనంలో పొడవు, వెడల్పులు రెండూ నిర్వచింపబడలేదు. అందువల్ల ఏదేని అధ్యయనంలో పరిమితంగా కొన్ని పదాలు అనిర్వచిత పదాలుగా వదిలి వేయబడ్డాయి. *మనం జ్యామితిలో 'బిందువు రేఖ మరియు తలము' (యూక్లిడ్ పదాలలో ఉపరితలం) లను అనిర్వచిత పదాలుగా స్వీకరిస్తాం.* అంటే వాటిని అంత:బుద్ధితో మాత్రమే వ్యక్తపరచగలం లేదా *'భౌతిక నమూనాల'* సహాయంతో వివరించగలం.

యూక్లిడ్ నిర్వచనాల నుండి అతను నిరూపణలు ఇవ్వని ఖచ్చితమైన ధర్మాలను ప్రతిపాదించాడు. నిజానికి ఈ ప్రతిపాదనలు, స్పష్టమైన సార్వత్రిక సత్యాలు. యూక్లిడ్ వాటిని సామాన్య స్వీకృతాలు మరియు **భావనలు** అను రెండు రకాలుగా విభజించాడు. నిర్దిష్టమైన జ్యామితీయ ప్రతిపాదనలను **స్వీకృతాలు** అని తెల్పాడు. జ్యామితికి మాత్రమే కాకుండా గణితశాస్త్రమంతటకీ సంబంధించిన ప్రతిపాదనలను సామాన్య భావనలు అని తెల్పాడు. సామాన్య భావనలు మరియు స్వీకృతాలకు సంబంధించిన వివరాలకు అనుబంధం-1 చూడగలరు. **యూక్లిడ్**: సామాన్య భావనలలో కొన్ని కింద ఇవ్వబడ్డాయి.

(1) ఒకే రాశికి సమానమైన రాశులు ఒకదానికొకటి సమానాలు.

(2) సమాన రాశులను, సమాన రాశులను కూడినచో వాటి మొత్తాలు సమానం.

(3) సమాన రాశులను సమానరాశుల నుండి తీసివేసినచో వాటి శేషాలు సమానం.

(4) ఒక దానితో మరొకటి ఏకీభవించు రాశులు సమానాలు.

(5) మొత్తం దానిలో భాగం కంటే పెద్దది.

(6) సమాన రాశుల రెట్టింపులు సమానాలు.

(7) సమాన రాశుల సగాలు సమానం.

ఈ 'సామాన్య భావనలు' కొన్ని పరిమాణాత్మక విలువలను సూచిస్తాయి. మొదటి సామాన్య భావన సమతల పటాలకు వర్తింపబడును. ఉదాహరణకు ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యానికి సమానం మరియు ఆ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమైన, అప్పుడు త్రిభుజ వైశాల్యం చతురస్ర వైశాల్యానికి సమానమగును.

ఒకేరకమైన పరిమాణాత్మక విలువలను పోల్చవచ్చు, కూడవచ్చు కానీ వేర్వేరు పరిమాణాత్మక విలువలను పోల్చలేం. ఉదాహరణకు ఒక రేఖను దీర్ఘచతురస్రంతో పోల్చలేం. ఒక కోణాన్ని పంచభుజితో పోల్చలేం.

పైన తెలుపబడిన 4వ సామాన్య భావనను పరిశీలిస్తే రెండు రాశులు ఒకేలా ఉంటే (అనగా ఆ రెండూ ఒకలాంటివి) అప్పుడు అవి సమానాలు. అనగా 'ప్రతీ రాశి దానికదే సమానము' అని చెప్పవచ్చు. ఇది ఆ సామాన్య భావనను ఉన్నతమైనదిగా ఉంచే సమర్ధన. 'అంతకన్నా ఎక్కువ' పదానికి 5వ సామాన్య భావనలో నిర్వచనం ఇవ్వబడింది. ఉదాహరణకు B అను రాశి A అను రాశిలో భాగం. అపుడు A రాశిని B రాశి మరియు 3వ రాశి C ల మొత్తంగా రాయవచ్చు. గణిత రూపం $A > B$ అనగా $A = B + C$ అగునట్లు C అను వేరొకరాశి కలదు.

Now let us discuss **Euclid's five postulates.** They are :

Postulate 1 : *A straight line may be drawn from any one point to any other point.*

Note that this postulate tells us that at least one straight line passes through two distinct points, but it does not say that there cannot be more than one such line. However, in his work, Euclid has frequently assumed, without mentioning, that there is a *unique* line joining two distinct points. We state this result in the form of an axiom as follows:

Axiom 5.1 : *Given two distinct points, there is a unique line that passes through them.*

How many lines passing through P also pass through Q (see Fig. 5.4)? Only one, that is, the line PQ. How many lines passing through Q also pass through P? Only one, that is, the line PQ. Thus, the statement above is self-evident, and so is taken as an axiom.

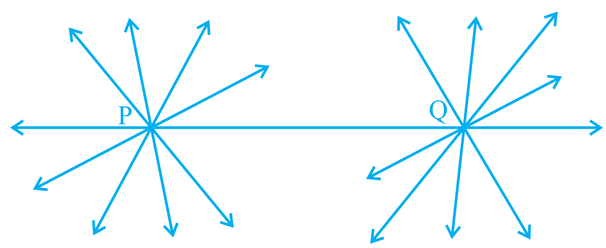


Fig. 5.4

Postulate 2 : *A terminated line can be produced indefinitely.*

Note that what we call a line segment now-a-days is what Euclid called a terminated line. So, according to the present day terms, the second postulate says that a line segment can be extended on either side to form a line (see Fig. 5.5).

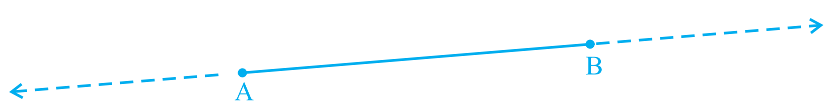


Fig. 5.5

Postulate 3 : *A circle can be drawn with any centre and any radius.*

Postulate 4 : *All right angles are equal to one another.*

Postulate 5 : *If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side of it taken together less than two right angles, then the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the sum of angles is less than two right angles.*

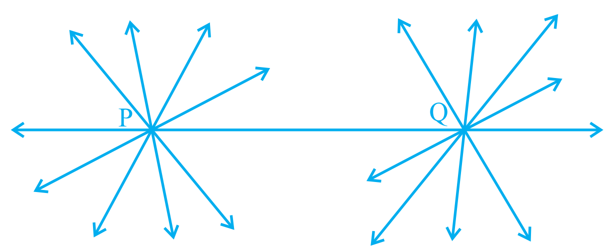
యూక్లిడ్ యొక్క 5 స్వీకృతాల గూర్చి చర్చిద్దాం. అవి:

స్వీకృతం-1 : *ఏదైనా ఒక బిందువు నుండి వేరొక బిందువునకు ఒక సరళరేఖ గీయవచ్చు.*

రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా కనీసం ఒక సరళరేఖ ప్రయాణించును అనే విషయాన్ని ఈ స్వీకృతం మనకు తెలుపుతుంది. కానీ ఒకటి కంటే ఎక్కువ రేఖలు ప్రయాణించలేవు అని కూడా ఇది తెలపటం లేదు. అయితే యూక్లిడ్ అధ్యయనంలో తరచుగా భావించిన "రెండు వేర్వేరు బిందువులను కలుపుతూపోయే. రేఖ *ఏకైకం* గా ఉంటుంది. ఈ ఫలితాన్ని మనం సామాన్యభావన రూపంలో క్రిందివిధంగా తెలుపవచ్చు.

సామాన్య భావన 5.1: *రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోయేరేఖ ఏకైకంగా ఉంటుంది.*

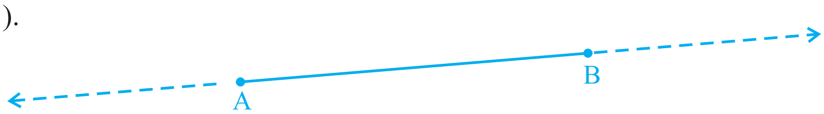
P బిందువు గుండా పోయే ఎన్ని రేఖలు Q బిందువు గుండా కూడా పోతాయి? ఒకే ఒక్కటి, అది PQ రేఖ మాత్రమే. Q బిందువు గుండా పోయే ఎన్ని రేఖలు P బిందువు గుండా పోతాయి? ఒకే ఒక్కటి, అది PQ రేఖ మాత్రమే. ఈవిధంగా పైన తెల్పబడిన ప్రవచనం స్వయం నిర్ధేశితమైంది మరియు సామాన్య భావనగా తీసుకోబడింది.



పటం.5.4

స్వీకృతం-2: *ఒక ఖండిత రేఖను నిరవధికంగా పొడిగించవచ్చు.*

ఇపుడు మనం ఉపయోగిస్తున్న రేఖాఖండం పదానికి బదులుగా యూక్లిడ్ పరిమిత రేఖ అనే పదాన్ని వాడారు. ప్రస్తుత పదజాలం ప్రకారం 2వ స్వీకృతం ఏమనగా ఒక రేఖాఖండాన్ని ఇరువైపులా పొడిగించిన అది సరళరేఖ అవుతుంది (పటం 5.5 చూడండి).



పటం.5.5

స్వీకృతం-3: *ఇచ్చిన వ్యాసార్థం మరియు కేంద్రములతో వృత్తాన్ని గీయవచ్చు.*

స్వీకృతం-4: *అన్ని లంబకోణాలు పరస్పరం సమానం.*

స్వీకృతం-5: *రెండు దత్త సరళరేఖలను ఖండించు సరళరేఖ దానికి ఒకేవైపున ఉన్న అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాల కన్నా తక్కువగా ఉండునట్లు చేస్తే అప్పుడు దత్త సరళరేఖలను నిరంతరం పొడిగిస్తే అవి రెండు లంబకోణాల కన్నా తక్కువైన మొత్తం గల కోణాల వైపున కలుసుకొంటాయి.*

For example, the line PQ in Fig. 5.6 falls on lines AB and CD such that the sum of the interior angles 1 and 2 is less than 180° on the left side of PQ. Therefore, the lines AB and CD will eventually intersect on the left side of PQ.

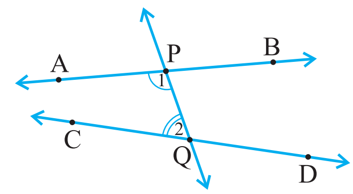


Fig. 5.6

A brief look at the five postulates brings to your notice that Postulate 5 is far more complex than any other postulate. On the other hand, Postulates 1 through 4 are so simple and obvious that these are taken as 'self-evident truths'. However, it is not possible to prove them. So, these statements are accepted without any proof (see Appendix 1). Because of its complexity, the fifth postulate will be given more attention in the next section.

Now-a-days, 'postulates' and 'axioms' are terms that are used interchangeably and in the same sense. 'Postulate' is actually a verb. When we say "let us postulate", we mean, "let us make some statement based on the observed phenomenon in the Universe". Its truth/validity is checked afterwards. If it is true, then it is accepted as a 'Postulate'.

A system of axioms is called **consistent** (see Appendix 1), if it is impossible to deduce from these axioms a statement that contradicts any axiom or previously proved statement. So, when any system of axioms is given, it needs to be ensured that the system is consistent.

After Euclid stated his postulates and axioms, he used them to prove other results. Then using these results, he proved some more results by applying deductive reasoning. The statements that were proved are called **propositions or theorems**. Euclid deduced 465 propositions in a logical chain using his axioms, postulates, definitions and theorems proved earlier in the chain. In the next few chapters on geometry, you will be using these axioms to prove some theorems.

Now, let us see in the following examples how Euclid used his axioms and postulates for proving some of the results:

Example 1 : If A, B and C are three points on a line, and B lies between A and C (see Fig. 5.7), then prove that AB + BC = AC.

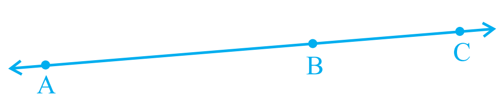
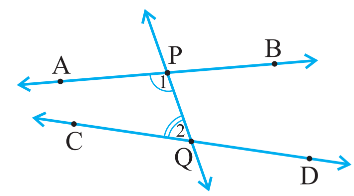


Fig. 5.7

ఉదాహరణకు పటం 5.6లో PQ అనే రేఖ AB మరియు CD రేఖలపై తనకు ఎడమవైపున గల 1 మరియు 2 అంతర కోణాల మొత్తం 180° (రెండు లంబకోణాలు) కన్నా తక్కువగునట్లుగా ఖండిస్తుంది. అందువల్ల PQ కు ఎడమవైపు AB మరియు CD రేఖలు చివరికి ఖండించుకొంటాయి.



పటం. 5.6

ఈ 5 స్వీకృతాల సంక్షిప్తరూపం నుండి 5వ స్వీకృతము మిగిలిన స్వీకృతాల కంటే చాలా క్లిష్టమైనదని మీరు గమనించగలరు. ఒకటి నుండి నాలుగు వరకు గల స్వీకృతాలు చాలా సాధారణమైనవి మరియు స్పష్టమైనవి. అందువలన వీటిని 'స్వయం నిర్దేశిత సత్యాలు'గా తీసుకొనబడ్డాయి. అయితే వీటిని నిరూపణ చేయటం సాధ్యం కాదు. కావున ఎటువంటి నిరూపణ లేకుండా ఈ ప్రపచనాలు ఆమోదించబడ్డాయి. (అనుబంధం–1 చూడండి) 5వ స్వీకృతం యొక్క సంక్లిష్టత కారణంగా తదుపరి విభాగంలో మరింత దృష్టి సారించబడింది.

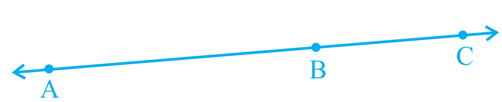
ఈరోజుల్లో 'స్వీకృతాలు' మరియు 'సామాన్య భావనలు' అను పదాలు ఒకదానికొకటి పరస్పరం ఉపయోగంలో ఉండి సమానార్థక పదాలుగా వాడుకలో కలవు. నిజానికి 'స్వీకృతం' అనునది ఒక క్రియ. " విశ్వంలో ఏదైనా ఒక దిగ్విషయాన్ని పరిశీలించి దాని ఆధారంగా కొన్ని ప్రవచనాలను తయారుచేయవచ్చు". మనం 'స్వీకృతం' అను పదాన్ని వాడతాం. దాని విశ్వసనీయత తర్వాత సరిచూసి అది నిజమైతే అపుడు ఈ దృగ్విషయం స్వీకృత రూపంలో ఆమోదింపబడుతుంది.

ఈ సామాన్య భావనల వ్యవస్థను **సంగత వ్యవస్థ** అంటారు. (అనుబంధం–1 చూడండి) ఈ సామాన్య భావనల నుండి ఏదైనా సామాన్య భావన లేదా గతంలో నిరూపించబడిన ప్రతిపాదనలకు విరుద్ధమైన ప్రతిపాదన వ్యతిరేకించడం అసాధ్యం అయింది. కావున సామాన్య భావనల వ్యవస్థ ఇచ్చినపుడు అది సంగతమైనదో కాదో సరిచూసుకోవాల్సిన అవసరం ఉంది.

యూక్లిడ్ సామాన్య భావనలు మరియు స్వీకృతాలను ప్రతిపాదించిన తరువాత వీటిని ఇతర ఫలితాలను నిరూపణ చేయడంలో ఉపయోగించాడు. ఈ ఫలితాలనుపయోగిస్తూ అతడు మరిన్ని ఫలితాలను నిగమన తర్కం అన్వయిస్తూ ఋజువు చేసాడు. అలా చేయబడిన ప్రవచనాలను '**ప్రతిపాదనలు**' లేదా '**సిద్ధాంతాలు**' అంటారు. యూక్లిడ్ ఒక తార్కిక సమాహారం నుండి అతనిచే నిరూపించబడిన సామాన్య భావనలు, స్వీకృతాలు, నిర్వచనాలు మరియు సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించి 465 ప్రతిపాదనలను తగ్గించాడు. జ్యామితికి సంబంధించిన తరువాత అధ్యాయాల్లో కొన్ని సిద్ధాంతాలను నిరూపణ చేయడానికి ఈ సామాన్య భావనలను ఉపయోగిస్తాం.

యూక్లిడ్ కొన్ని ఫలితాలను నిరూపించడానికి సామాన్య భావనలను మరియు స్వీకృతాలను ఏవిధంగా ఉపయోగించాడో కింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : A, B మరియు C అనునవి ఒకే రేఖ మీద గల మూడు బిందువులు మరియు B అనునది A మరియు C ల మధ్య ఉంటే (పటం 5.7 చూడండి) అపుడు $AB + BC = AC$ అని చూపండి.



పటం. 5.7

Solution : In the figure given above, AC coincides with AB + BC.

Also, Euclid's Axiom (4) says that things which coincide with one another are equal to one another. So, it can be deduced that

$$AB + BC = AC$$

Note that in this solution, it has been assumed that there is a unique line passing through two points.

Example 2 : Prove that an equilateral triangle can be constructed on any given line segment.

Solution : In the statement above, a line segment of any length is given, say AB [see Fig. 5.8(i)]

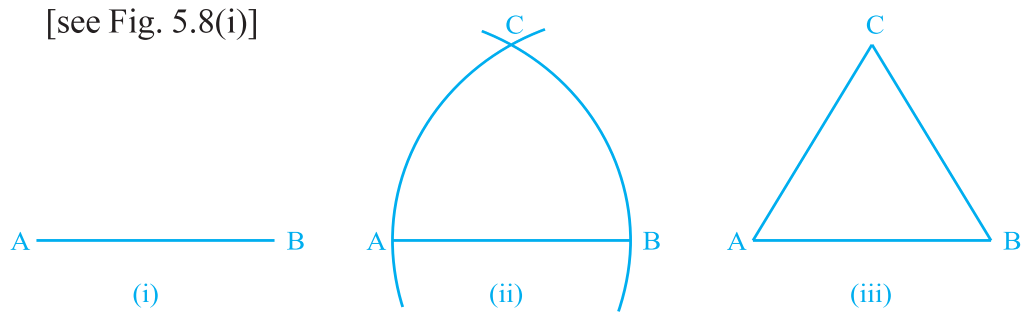


Fig. 5.8

Here, you need to do some construction. Using Euclid's Postulate 3, you can draw a circle with point A as the centre and AB as the radius [see Fig. 5.8(ii)]. Similarly, draw another circle with point B as the centre and BA as the radius. The two circles meet at a point, say C. Now, draw the line segments AC and BC to form Δ ABC [see Fig. 5.8 (iii)]

So, you have to prove that this triangle is equilateral, i.e., AB = AC = BC.

Now, AB = AC, since they are the radii of the same circle (1)

Similarly, AB = BC (Radii of the same circle) (2)

From these two facts, and Euclid's axiom that things which are equal to the same thing are equal to one another, you can conclude that AB = BC = AC.

So, Δ ABC is an equilateral triangle.

Note that here Euclid has assumed, without mentioning anywhere, that the two circles drawn with centres A and B will meet each other at a point.

Now we prove a theorem, which is frequently used in different results:

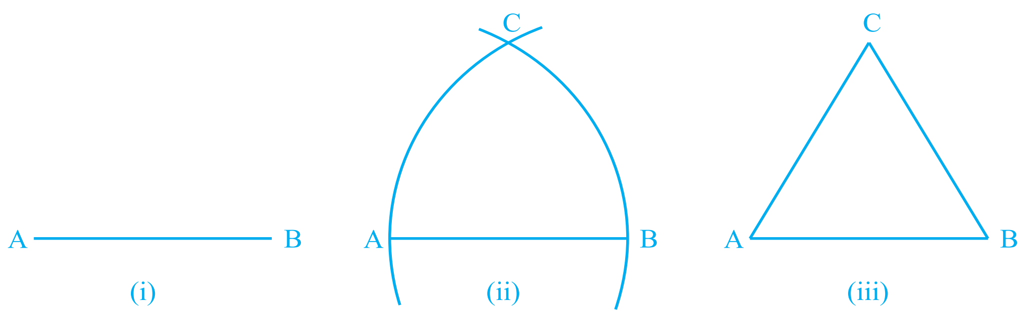
సాధన : పైన ఇవ్వబడిన పటం నుండి AC మరియు AB + BC లు ఏకీభవించును.

యూక్లిడ్ 4వ సామాన్య భావన ద్వారా “ఒక దానితో మరొకటి ఏకీభవించునవి సమానాలు. కావున AB + BC = AC అని చెప్పవచ్చు.

ఇక్కడ మనం రెండు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖ పోవును అని తీసుకొనడాన్ని గమనించండి.

ఉదాహరణ 2 : ఇచ్చిన ఏ రేఖాఖండం పైన అయినా ఒక సమబాహు త్రిభుజం నిర్మించవచ్చు అని నిరూపించండి.

సాధన : పై ప్రవచనంలో ఏదేని పొడవు గల ఒక రేఖాఖండము AB ఇవ్వబడింది. (పటం 5.8 (i) చూడండి)



పటం.5.8

ఇక్కడ మీరు కొంత నిర్మాణం చేయవలసి ఉంది. యూక్లిడ్ 3వ స్వీకృతం నుండి ఇచ్చిన కేంద్రం, వ్యాసార్థాలతో వృత్తాన్ని నిర్మించగలం. కావున A కేంద్రంగా మరియు AB వ్యాసార్థంగా ఒక వృత్తాన్ని గీయండి [పటం 5.8(ii) చూడండి]. అదేవిధంగా B కేంద్రంగా BA వ్యాసార్థంతో మరొక వృత్తాన్ని గీయండి. ఈ రెండు వృత్తాలు C వద్ద ఖండించుకుంటాయి. C ను A మరియు B లతో కలుపగా Δ ABC ఏర్పడుతుంది [పటంలో 5.8 (iii) చూడండి].

ఇపుడు ఈవిధంగా ఏర్పడిన త్రిభుజం సమబాహు త్రిభుజమని నిరూపించాలి. అంటే AB = AC = BC అని చూపాలి.

ఇపుడు AB = AC, అవి అదే వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థాలు కనుక (1)

అదేవిధంగా AB = BC (అదే వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థాలు) (2)

పై రెండు కారణాలు మరియు యూక్లిడ్ సామాన్య భావనల నుండి “ఒకే రాశులకు సమానమైన రాశులు ఒకదానికి మరొకటి సమానాలు” కావున AB = BC = AC.

అందువలన Δ ABC ఒక సమబాహు త్రిభుజము.

A మరియు B కేంద్రాలుగా గల వృత్తాలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి అనే విషయాన్ని ప్రస్తావించకుండా యూక్లిడ్ తన నిరూపణలో వినియోగించడం గమనించండి.

తరచుగా వేర్వేరు ఫలితాల్లో ఉపయోగించిన ఇంకొక సిద్ధాంత నిరూపణను గమనిద్దాం.

Theorem 5.1 : *Two distinct lines cannot have more than one point in common.*

Proof : Here we are given two lines l and m. We need to prove that they have only one point in common.

For the time being, let us suppose that the two lines intersect in two distinct points, say P and Q. So, you have two lines passing through two distinct points P and Q. But this assumption clashes with the axiom that only one line can pass through two distinct points. So, the assumption that we started with, that two lines can pass through two distinct points is wrong.

From this, what can we conclude? We are forced to conclude that two distinct lines cannot have more than one point in common.

EXERCISE 5.1

1. Which of the following statements are true and which are false? Give reasons for your answers.

(i) Only one line can pass through a single point.

(ii) There are an infinite number of lines which pass through two distinct points.

(iii) A terminated line can be produced indefinitely on both the sides.

(iv) If two circles are equal, then their radii are equal.

(v) In Fig. 5.9, if AB = PQ and PQ = XY, then AB = XY.

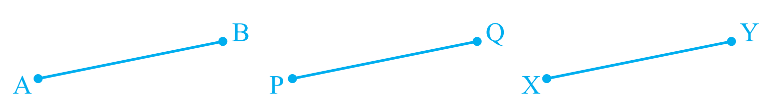


Fig. 5.9

2. Give a definition for each of the following terms. Are there other terms that need to be defined first? What are they, and how might you define them?

(i) parallel lines (ii) perpendicular lines (iii) line segment

(iv) radius of a circle (v) square

3. Consider two 'postulates' given below:

(i) Given any two distinct points A and B, there exists a third point C which is in between A and B.

(ii) There exist at least three points that are not on the same line.

Do these postulates contain any undefined terms? Are these postulates consistent? Do they follow from Euclid's postulates? Explain.

ఉదాహరణ 5.1: *రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటికన్నా ఎక్కువ ఉమ్మడి బిందువులను కలిగి ఉండవు.*

నిరూపణ : దత్తరేఖలు l మరియు m వీటికి ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఉంటుందని మనం నిరూపించాలి.

ఆ రెండు రేఖలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు P మరియు Q ల వద్ద ఖండించుకొంటాయని అనుకోండి. ఇపుడు మనకు P మరియు Q బిందువుల గుండా పోయే రేఖలు రెండు కలవు. ఇవి స్వీకృతం ‘ రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండాపోయే సరళరేఖ ఒకే ఒకటి ఉంటుంది’ కి విరుద్ధంగా ఉంది. రెండు రేఖలు రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోగలవనే మన ఊహ తప్పు.

దీనినుండి మనం ఏమి నిర్ధారించగలం? రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటికన్నా ఎక్కువ ఉమ్మడి బిందువులను కలిగి ఉండవని మనం నిర్ధారించవచ్చు.

అభ్యాసం 5.1

1. క్రింది ప్రవచనాలు ఏవి సత్యమో ఏవి అసత్యమో తెల్పండి. కారణాలు తెల్పండి.

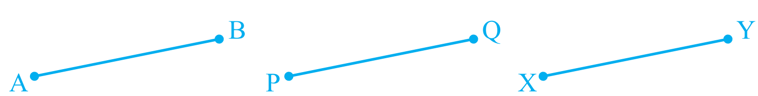
   (i) ఒక బిందువు గుండా ఒకే ఒక రేఖ పోవును.

   (ii) రెండు వేర్వేరు బిందువులను కలుపుతూ అనంతమైన రేఖలు ప్రయాణించును.

   (iii) అంతమయ్యే రేఖను రెండువైపులా నిరవధికంగా పొడిగించవచ్చు.

   (iv) రెండు వృత్తాలు సమానమైతే అపుడు వాటి వ్యాసార్థాలు సమానమగును.

   (v) పటం 5.9 నుండి $AB = PQ$ మరియు $PQ = XY$ అయినపుడు $AB = XY$ అగును.



పటం. 5.9

2. క్రింద ఇవ్వబడిన పదాలను నిర్వచించండి. ఇంకా నిర్వచించాల్సిన పదాలు ఏవైనా ఉన్నాయా? అవి ఏమిటి? వాటిని నీవు ఏవిధంగా నిర్వచిస్తావు?

   (i) సమాంతర రేఖలు (ii) లంబరేఖలు (iii) రేఖాఖండం

   (iv) ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం (v) చతురస్రం

3. క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు స్వీకృతాలను గమనించండి.

   (i) A మరియు B అనేవి రెండు దత్త బిందువులు, వాని మధ్య C అనే బిందువు ఉంటుంది.

   (ii) ఒకే రేఖ మీద లేకుండా కనీసం మూడు బిందువులైనా ఉంటాయి.

   ఇది యూక్లిడ్ స్వీకృతాలను అనుసరించి ఉన్నాయా? వివరించండి.

4. If a point C lies between two points A and B such that AC = BC, then prove that AC = $\frac{1}{2}$AB. Explain by drawing the figure.

5. In Question 4, point C is called a mid-point of line segment AB. Prove that every line segment has one and only one mid-point.

6. In Fig. 5.10, if AC = BD, then prove that AB = CD.

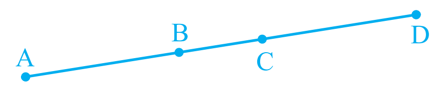


Fig. 5.10

7. Why is Axiom 5, in the list of Euclid's axioms, considered a 'universal truth'? (Note that the question is not about the fifth postulate.)

5.3 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. Though Euclid defined a point, a line, and a plane, the definitions are not accepted by mathematicians. Therefore, these terms are now taken as undefined.

2. Axioms or postulates are the assumptions which are obvious universal truths. They are not proved.

3. Theorems are statements which are proved, using definitions, axioms, previously proved statements and deductive reasoning.

4. Some of Euclid's axioms were :

(1) Things which are equal to the same thing are equal to one another.

(2) If equals are added to equals, the wholes are equal.

(3) If equals are subtracted from equals, the remainders are equal.

(4) Things which coincide with one another are equal to one another.

(5) The whole is greater than the part.

(6) Things which are double of the same things are equal to one another.

(7) Things which are halves of the same things are equal to one another.

5. Euclid's postulates were :

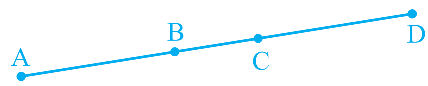
Postulate 1 : A straight line may be drawn from any one point to any other point.

Postulate 2 : A terminated line can be produced indefinitely.

Postulate 3 : A circle can be drawn with any centre and any radius.

Postulate 4 : All right angles are equal to one another.

4. $AC = BC$ అగునట్లు C అను బిందువు A మరియు B బిందువుల మధ్య గలదు. అయిన $AC = \frac{1}{2}AB$ అని చూపండి. పటం గీసి వివరించండి.
5. సమస్య 4లో C బిందువు AB రేఖాఖండానికి మధ్య బిందువు. ప్రతీ రేఖాఖండము ఒకేఒక మధ్య బిందువును కలిగి ఉంటుందని చూపండి.
6. పటం 5.10లో $AC = BD$ అయిన $AB = CD$ అని చూపండి.



పటం. 5.10

7. యూక్లిడ్ యొక్క సామాన్య భావనల జాబితాలో 5వ సామాన్య భావన ఎందుకు సార్వత్రిక సత్యంగా పరిగణింపబడింది? (పై సమస్య 5వ స్వీకృతం గూర్చి కాదని గమనించండి)

5.3 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, క్రింది అంశాలను మీరు అధ్యయనం చేసారు.

1. బిందువు, రేఖ మరియు తలాలను యూక్లిడ్ నిర్వహించినప్పటికీ, ఈ నిర్వచనాలు గణితశాస్త్రజ్ఞులచే ఆమోదింపబడలేదు. అందుచే ఈ పదాలు అనిర్వచిత పదాలుగా పరిగణిస్తాం.
2. స్వీకృతాలనేవి సార్వత్రిక సత్యాలైన పరికల్పనలు. వీటికి నిరూపణలు ఉండవు.
3. నిర్వచనాలు, స్వీకృతాలు, నిరూపించబడిన ప్రవచనాలు మరియు నిగమన తర్కాన్ని ఉపయోగించి నిరూపించబడిన ప్రవచనాలను సిద్ధాంతాలు అంటారు.
4. యూక్లిడ్ స్వీకృతాలలో సామాన్య భావనలు కొన్ని

   (1) ఒకేరాశి సమానమైన రాశులు ఒకదానికొకటి సమానం.

   (2) సమాన రాశులకు, సమాన రాశులను కూడినచో వాటి మొత్తాలు సమానం.

   (3) సమాన రాశుల నుండి సమాన రాశులను తీసివేసినచో మిగిలినవి సమానం.

   (4) ఒక దానితో మరొకటి ఏకీభవించు రాశులు పరస్పరం సమానాలు.

   (5) మొత్తం దానిలో భాగం కంటే పెద్దది.

   (6) సమాన రాశుల రెట్టింపులు ఒకదానికొకటి సమానాలు.

   (7) సమాన రాశులలో సగాలు ఒకదానికొకటి సమానం.

5. **యూక్లిడ్ స్వీకృతాలు :**

   స్వీకృతం 1 : ఏదేని బిందువు నుండి ఏదేని బిందువునకు ఒక సరళరేఖ గీయవచ్చు.

   స్వీకృతం 2 : గీయబడిన నిర్దిష్ట రేఖను నిరవధికంగా పొడిగించవచ్చు.

   స్వీకృతం 3 : ఇచ్చిన కేంద్రం మరియు వ్యాసార్థాలతో వృత్తం నిర్మించవచ్చు.

   స్వీకృతం 4 : అన్ని లంబకోణాలు పరస్పరం సమానాలు.

0962CH06

CHAPTER 6

LINES AND ANGLES

6.1 Introduction

In Chapter 5, you have studied that a minimum of two points are required to draw a line. You have also studied some axioms and, with the help of these axioms, you proved some other statements. In this chapter, you will study the properties of the angles formed when two lines intersect each other, and also the properties of the angles formed when a line intersects two or more parallel lines at distinct points. Further you will use these properties to prove some statements using deductive reasoning (see Appendix 1). You have already verified these statements through some activities in the earlier classes.

In your daily life, you see different types of angles formed between the edges of plane surfaces. For making a similar kind of model using the plane surfaces, you need to have a thorough knowledge of angles. For instance, suppose you want to make a model of a hut to keep in the school exhibition using bamboo sticks. Imagine how you would make it? You would keep some of the sticks parallel to each other, and some sticks would be kept slanted. Whenever an architect has to draw a plan for a multistoried building, she has to draw intersecting lines and parallel lines at different angles. Without the knowledge of the properties of these lines and angles, do you think she can draw the layout of the building?

In science, you study the properties of light by drawing the ray diagrams. For example, to study the refraction property of light when it enters from one medium to the other medium, you use the properties of intersecting lines and parallel lines. When two or more forces act on a body, you draw the diagram in which forces are represented by directed line segments to study the net effect of the forces on the body. At that time, you need to know the relation between the angles when the rays (or line segments) are parallel to or intersect each other. To find the height of a tower or to find the distance of a ship from the light house, one needs to know the angle formed between the horizontal and the line of sight. Plenty of

A6G1J7

అధ్యాయం 6

రేఖలు మరియు కోణాలు

6.1 పరిచయం

ఒక రేఖను గీయడానికి కనీసం రెండు బిందువులు అవసరమని మీరు అధ్యాయం 5 లో నేర్చుకున్నారు. మీరు కొన్ని స్వీకృతాలను కూడా నేర్చుకున్నారు మరియు ఆ స్వీకృతాల సహాయంతో కొన్ని ప్రవచనాలను కూడా నిరూపించారు. ఈ అధ్యాయంలో రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి ఖండించికొన్నపుడు ఏర్పడిన కోణాల ధర్మాలు మరియు ఒక రేఖ రెండు లేదా అంత కంటే ఎక్కువ సమాంతర రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే కోణాల ధర్మాలను కూడా నేర్చుకుంటారు. ఇంకా మీరు నిగమన తార్కికం ద్వారా కొన్ని ప్రవచనాలను నిరూపించడానికి ముందు ముందు ఈ ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు (అనుబంధం-1 చూడండి). క్రింది తరగతులలో మీరు ఇప్పటికే ఈ ప్రవచనాలను కొన్ని కృత్యాల ద్వారా నిరూపించారు.

మీ నిత్య జీవితంలో సమతలాల అంచుల మధ్య ఏర్పడే వివిధ రకాల కోణాలను చూస్తుంటారు. సమతలాలనుపయోగించి ఇదే విధమైన నమూనాను తయారు చేయడానికి మీరు కోణాల గురించి పూర్తి అవగాహన కలిగి ఉండాలి. ఉదాహరణకు, మీరు మీ పాఠశాల ఎగ్జిబిషన్‌లో వెదురు పుల్లలతో ఒక గుడిసె నమూనాను తయారు చేయాలనుకుందాం. మీరు దీనిని ఎలా తయారు చేస్తారో ఊహించండి? మీరు కొన్ని పుల్లలను ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంచి మరియు కొన్ని పుల్లలను ఏటవాలుగా ఉంచుతారు. బహుళఅంతస్థుల భవనం నమూనా గీయడానికి ఒక వాస్తుశిల్పి ఖండన రేఖలు మరియు విభిన్న కోణాల వద్ద సమాంతర రేఖలను గీయవలసి వస్తుంది. రేఖలు మరియు కోణాల ధర్మాల అవగాహన లేకుండా ఆమె భవనం యొక్క నమూనా గీయగలరని మీరు అనుకుంటున్నారా?

మీరు విజ్ఞానశాస్త్రంలో కాంతి రేఖా చిత్రాలను గీయడం ద్వారా కాంతి ధర్మాలను అధ్యయనం చేస్తారు. ఉదాహరణకు, కాంతి ఒక యానకం నుండి మరొక యానకంలోనికి ప్రవేశించినప్పుడు వక్రీభవన ధర్మాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి మీరు ఖండన రేఖలు, సమాంతర రేఖల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు. ఒక వస్తువుపై రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బలాలు పనిచేసినప్పుడు ఫలిత బలాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి మీరు బలాలను దిశాత్మక రేఖాఖండాలతో సూచించే చిత్రాన్ని గీస్తారు. అప్పుడు కిరణాలు (రేఖా ఖండాలు) ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా లేక పరస్పరం ఖండిచుకున్నప్పుడు కోణాల మధ్య సంబంధాన్ని మీరు తెలుసుకోవాల్సిన అవసరం ఉంది. టవర్ యొక్క ఎత్తును కనుగొనడానికి లేదా లైట్ హౌస్ నుండి ఓడ యొక్క దూరాన్ని కనుగొనడానికి క్షితిజ

other examples can be given where lines and angles are used. In the subsequent chapters of geometry, you will be using these properties of lines and angles to deduce more and more useful properties.

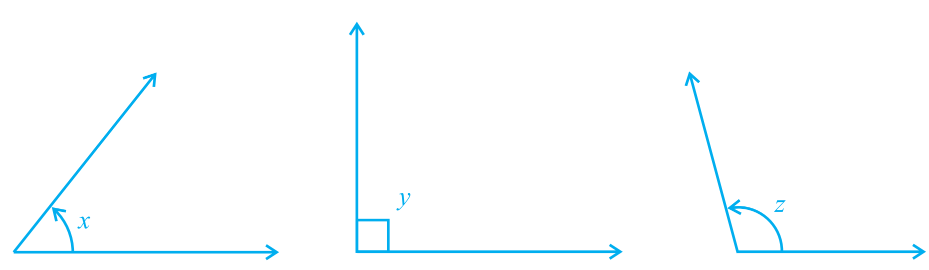
Let us first revise the terms and definitions related to lines and angles learnt in earlier classes.

6.2 Basic Terms and Definitions

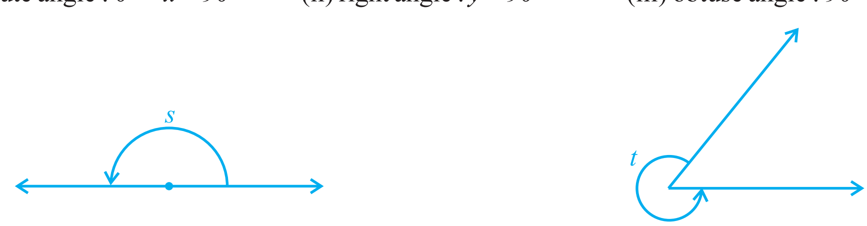
Recall that a part (or portion) of a line with two end points is called a **line-segment** and a part of a line with one end point is called a **ray**. Note that the line segment AB is denoted by $\overline{\text{AB}}$, and its length is denoted by AB. The ray AB is denoted by $\overrightarrow{\text{AB}}$, and a line is denoted by $\overleftrightarrow{\text{AB}}$. However, **we will not use these symbols**, and will denote the line segment AB, ray AB, length AB and line AB by the same symbol, AB. The meaning will be clear from the context. Sometimes small letters l, m, n, etc. will be used to denote lines.

If three or more points lie on the same line, they are called **collinear points**; otherwise they are called **non-collinear points**.

Recall that an **angle** is formed when two rays originate from the same end point. The rays making an angle are called the **arms** of the angle and the end point is called the **vertex** of the angle. You have studied different types of angles, such as acute angle, right angle, obtuse angle, straight angle and reflex angle in earlier classes (see Fig. 6.1).



(i) acute angle : $0° < x < 90°$ (ii) right angle : $y = 90°$ (iii) obtuse angle : $90° < z < 180°$



(iv) straight angle : $s = 180°$ (v) reflex angle : $180° < t < 360°$

Fig. 6.1 : Types of Angles

సమాంతర, దృష్టిరేఖల మధ్య ఏర్పడే కోణాన్ని తెలుసుకోవాలి. సరళ రేఖలు, కోణాలను ఉపయోగించే అనేక ఉదాహరణలు మనం ఇవ్వవచ్చు. జ్యామితి యొక్క తదుపరి అధ్యయాలలో మీరు మరిన్ని ఉపయోగకరమైన ధర్మాలను రాబట్టుటకు రేఖలు, కోణాల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు.

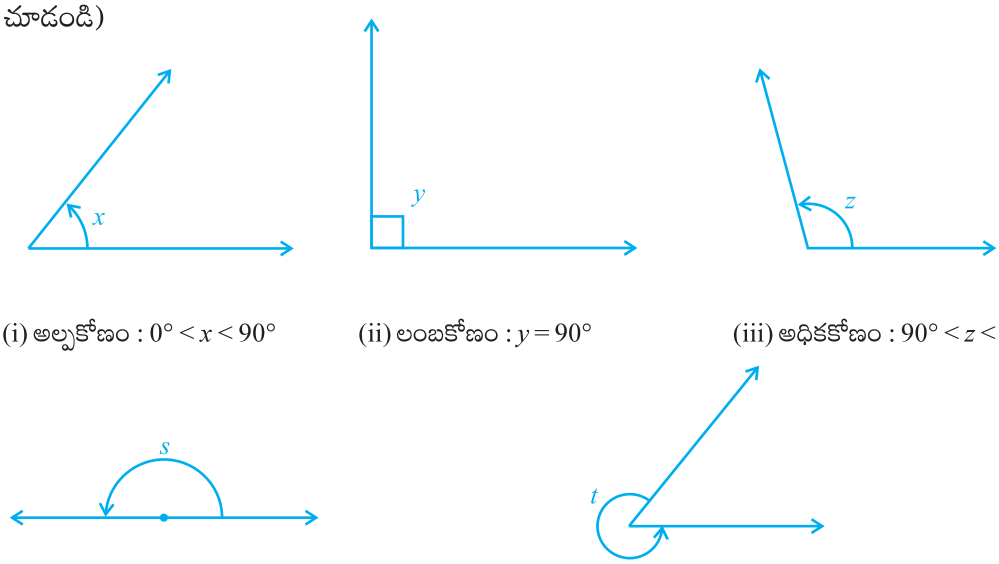
ముందుగా కింది తరగతులలో నేర్చుకున్న రేఖలు, కోణాలకు సంబంధించిన పదాలు, నిర్వచనాలను పునర్విమర్శ చేసుకుందాం.

6.2 మౌళిక పదాలు మరియు నిర్వచనాలు

రెండు చివరి బిందువులు గల ఒక రేఖ యొక్క కొంత భాగాన్ని **రేఖాఖండం** అనీ మరియు ఒకే చివరి బిందువు గల రేఖ యొక్క కొంత భాగాన్ని **కిరణం** అంటారని గుర్తు తెచ్చుకోండి. AB రేఖాఖండాన్ని $\overline{AB}$ తో సూచిస్తాం మరియు దాని పొడవుని AB తో సూచిస్తాం. కిరణం AB ని $\overrightarrow{AB}$ గాను మరియు రేఖను $\overleftrightarrow{AB}$ గానూ సూచిస్తాం. అయినప్పటికీ మనం ఈ గుర్తులను ఉపయోగించము మరియు రేఖా ఖండం AB ని, కిరణం ABని, AB రేఖ పొడవు మరియు AB రేఖలను సూచించడానికి ఒకే రకమైన గుర్తు AB తో సూచిస్తాం. సందర్భానుసారంగా అర్థం మారుతుంది. కొన్ని సార్లు రేఖలను సూచించడానికి l, m, n... మొదలైన చిన్న అక్షరాలను ఉపయోగిస్తాం.

మూడు లేదా అంత కన్నా ఎక్కువ బిందువులు ఒకే సరళరేఖపై ఉంటే ఆ బిందువులను **సరేఖీయ బిందువులని**, కానిచో వాటిని **సరేఖీయాలు** కాని బిందువులు అని అంటారు.

ఒకే అంత్య బిందువు నుండి రెండు కిరణాలు వెలువడినప్పుడు కోణము ఏర్పడుతుందని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఈ కోణాన్ని ఏర్పరిచే కిరణాలు కోణ **భుజాలు** అని, ఆ అంత్య బిందువును కోణ **శీర్షము** అని అంటారు. అల్పకోణం, లంబకోణం, అధికకోణం, సరళకోణం మరియు పరావర్తన కోణం వంటి వివిధ రకాల కోణాల గురించి కింది తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు. (పటం 6.1 చూడండి)



(i) అల్పకోణం : $0° < x < 90°$ (ii) లంబకోణం : $y = 90°$ (iii) అధికకోణం : $90° < z < 180°$

(iv) సరళ కోణం : $s = 180°$ (v) పరావర్తన కోణం : $180° < t < 360°$

పటం 6.1 : కోణాల రకాలు

An **acute** angle measures between 0° and 90°, whereas a **right angle** is exactly equal to 90°. An angle greater than 90° but less than 180° is called an **obtuse angle**. Also, recall that a **straight angle** is equal to 180°. An angle which is greater than 180° but less than 360° is called a **reflex angle**. Further, two angles whose sum is 90° are called **complementary angles**, and two angles whose sum is 180° are called **supplementary angles**.

You have also studied about adjacent angles in the earlier classes (see Fig. 6.2). Two angles are **adjacent**, if they have a common vertex, a common arm and their non-common arms are on different sides of the common arm. In Fig. 6.2, $\angle$ ABD and $\angle$ DBC are adjacent angles. Ray BD is their common arm and point B is their common vertex. Ray BA and ray BC are non common arms. Moreover, when two angles are adjacent, then their sum is always equal to the angle formed by the two non-common arms. So, we can write

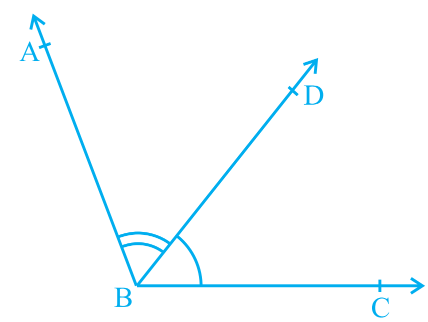


Fig. 6.2 : Adjacent angles

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC.$$

Note that $\angle$ ABC and $\angle$ ABD are not adjacent angles. Why? Because their non-common arms BD and BC lie on the same side of the common arm BA.

If the non-common arms BA and BC in Fig. 6.2, form a line then it will look like Fig. 6.3. In this case, $\angle$ ABD and $\angle$ DBC are called **linear pair of angles**.

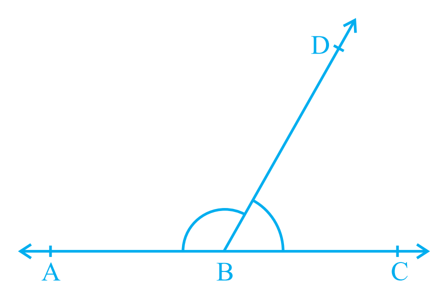


Fig. 6.3 : Linear pair of angles

You may also recall the **vertically opposite angles** formed when two lines, say AB and CD, intersect each other, say at the point O (see Fig. 6.4). There are two pairs of vertically opposite angles.

One pair is $\angle$AOD and $\angle$BOC. Can you find the other pair?

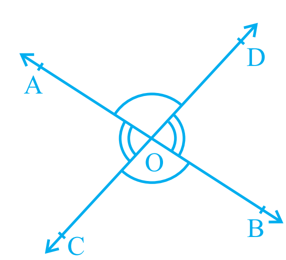
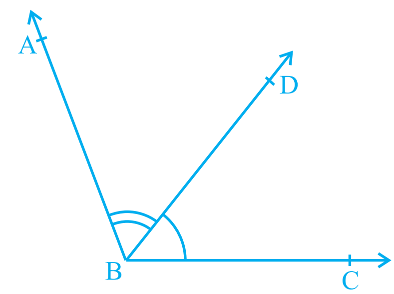


Fig. 6.4 : Vertically opposite angles

అల్పకోణం 0° మరియు 90° డిగ్రీల మధ్య ఉంటుంది. అయితే **లంబకోణం** ఖచ్చితంగా 90° కి సమానంగా ఉంటుంది. 90° కంటే ఎక్కువ 180° కంటే తక్కువగా ఉన్న కోణాన్ని అధిక కోణం అంటారు. అలాగే సరళ కోణం 180° కి సమానం అని గుర్తుంచుకోండి. 180° కంటే ఎక్కువగా ఉండి, 360° కంటే తక్కువగా ఉన్న కోణాన్ని **పరావర్తన కోణం** అంటారు. ఇంకా రెండు కోణాల మొత్తం 90° గా ఉన్న కోణాలను **పూరక కోణాలు** అంటారు. రెండు కోణాల మొత్తం 180° గా ఉన్న కోణాలను **సంపూరక కోణాలు** అంటారు.

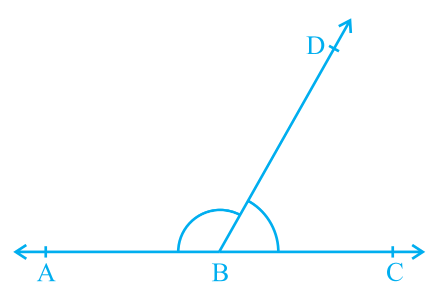
మీరు క్రింది తరగతులలో ఆసన్న కోణాల గురించి కూడా అధ్యయనం చేశారు (పటం 6.2 చూడండి) రెండు కోణాలు ఉమ్మడి శీర్షం, ఉమ్మడి భుజాలను కలిగి మరియు ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు ఉమ్మడి భుజానికి ఇరువైపులా ఉంటే వాటిని **ఆసన్న కోణాలు** అంటారు. పటం 6.2 లో ∠ABD మరియు ∠DBCలు ఆసన్న కోణాలు BD కిరణం వాటి ఉమ్మడి భుజం మరియు B బిందువు వాటి ఉమ్మడి శీర్షం. BA కిరణం మరియు BC కిరణములు ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు. అంతే కాక రెండు కోణాలు ఆసన్న కోణాలైతే వాటి మొత్తం ఉమ్మడి కాని భుజాలతో ఏర్పడిన కోణానికి సమానం. అందువలన



పటం 6.2 : ఆసన్న కోణాలు

∠ ABC = ∠ ABD + ∠ DBC అని రాయవచ్చు.

∠ ABC మరియు ∠ ABD లు ఆసన్న కోణాలు కాదని గమనించండి. ఎందుకు? ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు BD మరియు BC కిరణాలు ఉమ్మడి భుజం BA కి ఒకేవైపున ఉన్నాయి.

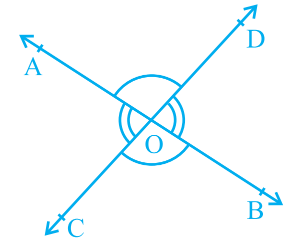


పటం 6.3 : రేఖీయ ద్వయం

పటం. 6.2 లో ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు BA మరియు BC లు ఒక సరళరేఖను ఏర్పరచినప్పుడు అది పటం 6.3 వలె ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో ∠ ABD మరియు ∠ DBC లను **రేఖీయ ద్వయం** అంటాము.

రెండు రేఖలు AB మరియు CD లు పరస్పరం O బిందువు వద్ద ఖండించుకునప్పుడు ఏర్పడు **శీర్షాభిముఖ కోణాల**ను గుర్తు తెచ్చుకోండి (పటం 6.4 చూడండి). ఇక్కడ రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలు ఉన్నాయి.

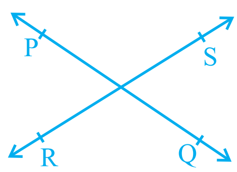
ఒక జత ∠AOD మరియు ∠BOC. మరొక జతను నీవు కనుగొనగలవా?

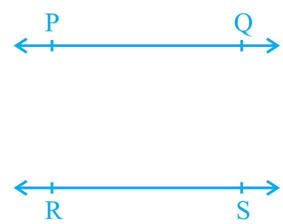


పటం 6.4 : శీర్షాభిముఖ కోణాలు

6.3 Intersecting Lines and Non-intersecting Lines

Draw two different lines PQ and RS on a paper. You will see that you can draw them in two different ways as shown in Fig. 6.5 (i) and Fig. 6.5 (ii).





(i) Intersecting lines (ii) Non-intersecting (parallel) lines

Fig. 6.5 : Different ways of drawing two lines

Recall the notion of a line, that it extends indefinitely in both directions. Lines PQ and RS in Fig. 6.5 (i) are intersecting lines and in Fig. 6.5 (ii) are parallel lines. Note that the lengths of the common perpendiculars at different points on these parallel lines is the same. This equal length is called the *distance between two parallel lines*.

6.4 Pairs of Angles

In Section 6.2, you have learnt the definitions of some of the pairs of angles such as complementary angles, supplementary angles, adjacent angles, linear pair of angles, etc. Can you think of some relations between these angles? Now, let us find out the relation between the angles formed when a ray stands on a line. Draw a figure in which a ray stands on a line as shown in Fig. 6.6. Name the line as AB and the ray as OC. What are the angles formed at the point O? They are $\angle$ AOC, $\angle$ BOC and $\angle$ AOB.

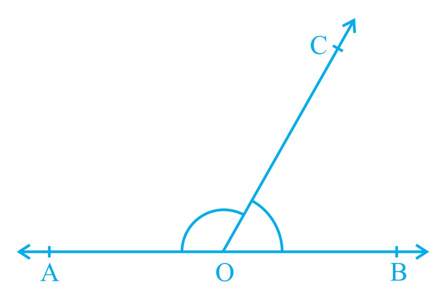


Fig. 6.6 : Linear pair of angles

Can we write $\angle$ AOC + $\angle$ BOC = $\angle$ AOB? (1)

Yes! (Why? Refer to adjacent angles in Section 6.2)

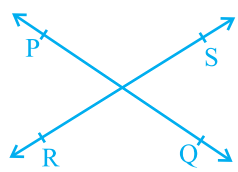
What is the measure of $\angle$ AOB? It is 180°. (Why?) (2)

From (1) and (2), can you say that $\angle$ AOC + $\angle$ BOC = 180°? Yes! (Why?)

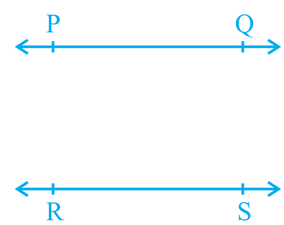
From the above discussion, we can state the following Axiom:

6.3 ఖండన రేఖలు మరియు ఖండించుకొనని రేఖలు

ఒక కాగితం పై PQ మరియు RS అను రెండు విభిన్న రేఖలను గీయండి. పటం 6.5 (i) మరియు పటం 6.5 (ii) లలో చూపిన విధంగా వాటిని రెండు వేర్వేరు విధాలుగా గీయవచ్చునని మీరు గమనించవచ్చు.



(i) ఖండన రేఖలు



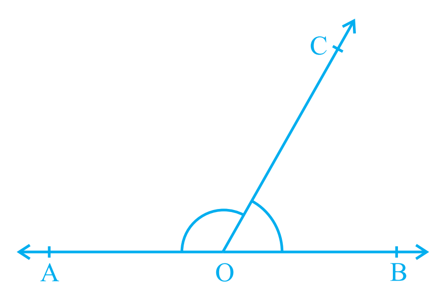
(ii) ఖండించుకొనని (సమాంతర) రేఖలు

పటం 6.5 : రెండు రేఖలను వేర్వేరు విధాలుగా గీయడం.

ఒక సరళరేఖ సంకేతాన్ని బట్టి ఇరువైపులా అనంతంగా పొడగించవచ్చని గుర్తు చేసుకోండి. 6.5 (i) లో PQ మరియు RS లు ఖండన రేఖలు మరియు పటం 6.5 (ii) లో అవి సమాంతర రేఖలు. ఈ సమాంతర రేఖల మీద విభిన్న బిందువుల వద్ద ఉమ్మడి లంబరేఖల పొడవులు సమానమని గమనించండి. ఈ సమాన పొడవును *రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య దూరమని* అంటారు.

6.4 కోణాల జతలు

6.2 విభాగంలో పూరక కోణాలు, సంపూరక కోణాలు, ఆసన్న కోణాలు, రేఖీయ ద్వయం మొదలగు కోణాల జతల నిర్వచనాలు మీరు నేర్చుకున్నారు. ఈ కోణాల మధ్య సంబంధమును ఆలోచించారా? ఇప్పుడు ఒక కిరణము, ఒక సరళరేఖ మీద ఉన్నప్పుడు ఏర్పడే కోణాల మధ్య సంబంధమును కనుగొందాం. పటం 6.6 లో చూపిన విధంగా ఒక కిరణం రేఖ మీద ఉండునట్లుగా పటాన్ని గీయండి. సరళరేఖను AB అని, కిరణంను OC అని పేరు పెట్టండి. O బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు ఏవి? అవి $\angle AOC$, $\angle BOC$ మరియు $\angle AOB$.



పటం 6.6 : రేఖీయ ద్వయం

$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ అని మనం రాయగలమా? (1)

అవును! (ఎందుకు? 6.2 విభాగంలోని ఆసన్న కోణాలను చూడండి).

$\angle AOB$ కోణం ఎంత? అది 180° ఉంటుంది. (ఎందుకు?) (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ అని చెప్పవచ్చా? అవును! (ఎందుకు?)

పై చర్చ నుండి మనము ఈ స్వీకృతమును ప్రవచించవచ్చు

Axiom 6.1 : *If a ray stands on a line, then the sum of two adjacent angles so formed is* 180°.

Recall that when the sum of two adjacent angles is 180°, then they are called a **linear pair of angles**.

In Axiom 6.1, it is given that 'a ray stands on a line'. From this 'given', we have concluded that 'the sum of two adjacent angles so formed is 180°'. Can we write Axiom 6.1 the other way? That is, take the 'conclusion' of Axiom 6.1 as 'given' and the 'given' as the 'conclusion'. So it becomes:

(A) If the sum of two adjacent angles is 180°, then a ray stands on a line (that is, the non-common arms form a line).

Now you see that the Axiom 6.1 and statement (A) are in a sense the reverse of each others. We call each as converse of the other. We do not know whether the statement (A) is true or not. Let us check. Draw adjacent angles of different measures as shown in Fig. 6.7. Keep the ruler along one of the non-common arms in each case. Does the other non-common arm also lie along the ruler?

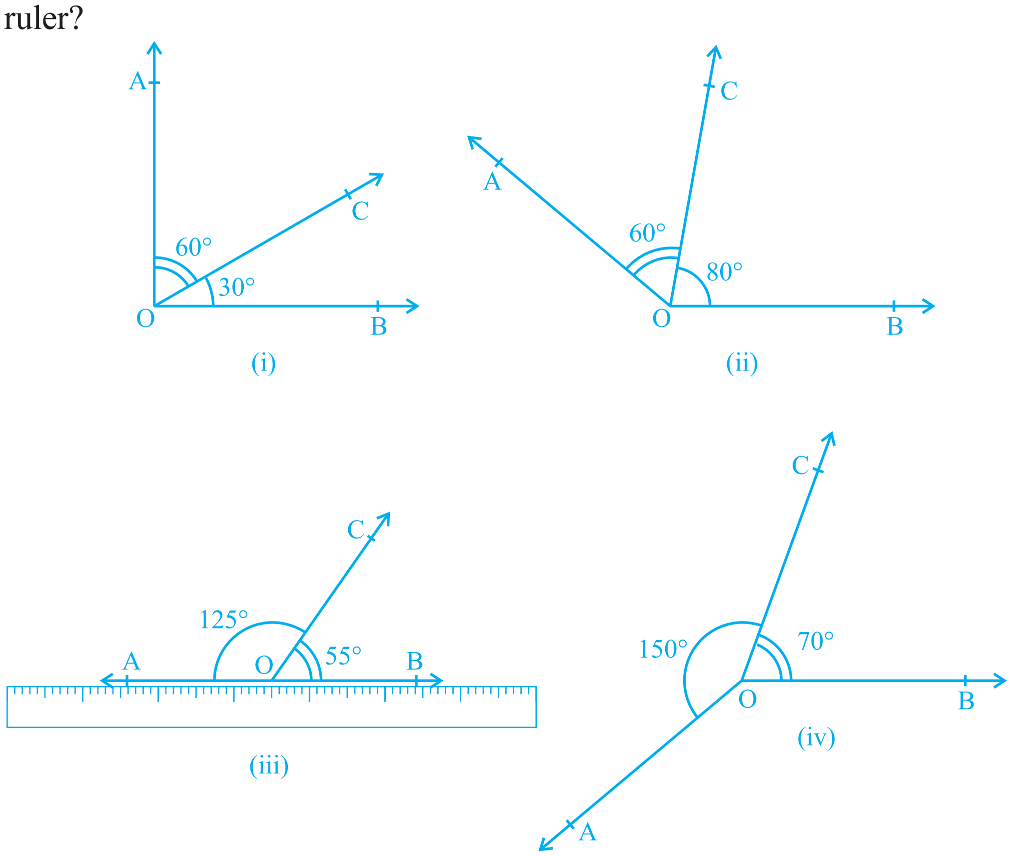


Fig. 6.7 : Adjacent angles with different measures

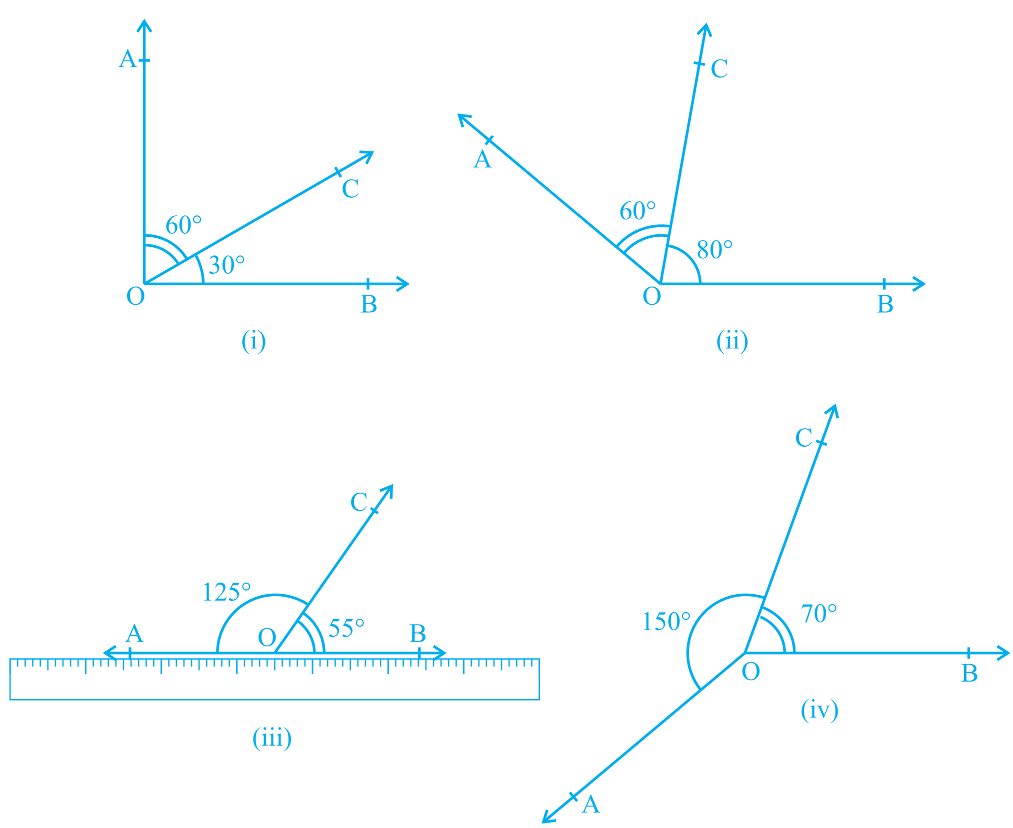
స్వీకృతము 6.1 : ఒక కిరణము ఒక సరళరేఖపై ఉన్నచో, అప్పుడు ఏర్పడిన ఆసన్న కోణాల మొత్తం $180°$.

రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం $180°$ అయినప్పుడు వాటిని **రేఖీయ ద్వయం** అంటామని గుర్తు తెచ్చుకోండి.

స్వీకృతం 6.1లో 'ఒక సరళరేఖ మీద ఒక కిరణం' ఉంటుందని ఇవ్వబడింది. దీని నుండి ఏర్పడిన రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం $180°$అని మనం నిర్ధారించవచ్చు. స్వీకృతం 6.1ను మనం మరొక రకంగా రాయవచ్చా? అంటే స్వీకృతము 6.1 యొక్క 'సారాంశాన్ని' 'దత్తాంశంగాను' మరియు 'దత్తాంశాన్ని' 'సారాంశంగా' తీసుకున్నట్లయితే అది క్రింది విధంగా ఉంటుంది.:

(A) రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం $180°$ అయితే ఒక కిరణం ఒక సరళరేఖ మీద ఉంటుంది. (అంటే ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు సరళరేఖను ఏర్పరచును)

ఇప్పుడు మీరు స్వీకృతము 6.1 మరియు ప్రవచనం (A) లు ఒక విధంగా పరస్పరం విపర్యంగా కనిపిస్తున్నాయి. మనము వాటిని ఒకదానికొకటి విపర్యయం అంటారు. ప్రవచనం (A) సత్యమా? కాదా? అనేది తెలియదు. ఇప్పుడు మనం దానిని సరిచూద్దాం. పటం 6.7లో చూపబడిన విధంగా విభిన్న కొలతలతో ఆసన్న కోణాలను గీయండి. ప్రతి సందర్భంలో స్కేలును ఉమ్మడిగా లేని భుజాలలో ఒక దాని వెంబడి ఉంచండి. మరొక ఉమ్మడిగా లేని భుజం స్కేలు వెంబడి ఉంటుందా?



పటం 6.7 : విభిన్న కొలతలు గల ఆసన్న కోణాలు

You will find that only in Fig. 6.7 (iii), both the non-common arms lie along the ruler, that is, points A, O and B lie on the same line and ray OC stands on it. Also see that $\angle$ AOC + $\angle$ COB = 125° + 55° = 180°. From this, you may conclude that statement (A) is true. So, you can state in the form of an axiom as follows:

Axiom 6.2 : *If the sum of two adjacent angles is* 180°, *then the non-common arms of the angles form a line*.

For obvious reasons, the two axioms above together is called the **Linear Pair Axiom**.

Let us now examine the case when two lines intersect each other.

Recall, from earlier classes, that when two lines intersect, the vertically opposite angles are equal. Let us prove this result now. See Appendix 1 for the ingredients of a proof, and keep those in mind while studying the proof given below.

Theorem 6.1 : *If two lines intersect each other, then the vertically opposite angles are equal.*

Proof : In the statement above, it is given that 'two lines intersect each other'. So, let AB and CD be two lines intersecting at O as shown in Fig. 6.8. They lead to two pairs of vertically opposite angles, namely,

(i) $\angle$ AOC and $\angle$ BOD (ii) $\angle$ AOD and $\angle$ BOC.

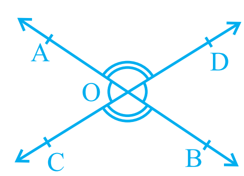


Fig. 6.8 : Vertically opposite angles

We need to prove that $\angle$ AOC = $\angle$ BOD and $\angle$ AOD = $\angle$ BOC.

Now, ray OA stands on line CD.

Therefore, $\angle$ AOC + $\angle$ AOD = 180° (Linear pair axiom) (1)

Can we write $\angle$ AOD + $\angle$ BOD = 180°? Yes! (Why?) (2)

From (1) and (2), we can write

$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

This implies that $\angle$ AOC = $\angle$ BOD (Refer Section 5.2, Axiom 3)

Similarly, it can be proved that $\angle$AOD = $\angle$BOC

Now, let us do some examples based on Linear Pair Axiom and Theorem 6.1.

పటం 6.7 (iii) లో మాత్రమే ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు రెండూ స్కేలు వెంబడి ఉన్నాయని మీరు తెలుసుకోవచ్చు. అంటే A, O మరియు B బిందువులు ఒకే రేఖ మీద ఉండి కిరణం OC దాని మీద ఉంది. అంతేకాక $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ అవుతుంది. దీని నుండి ప్రవచనం (A) సరియైనదని నిర్ధారించవచ్చు. కాబట్టి దానిని ఒక స్వీకృతం రూపంలో కింది విధంగా చెప్పవచ్చు:

స్వీకృతము 6.2 : *రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° అయిన ఆ రెండు కోణాలలో ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు ఒక సరళరేఖను ఏర్పరుస్తాయి.*

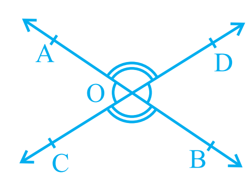
స్పష్టమైన కారణాల వలన పైన పేర్కొన్న రెండు స్వీకృతాలను కలిపి **రేఖీయ ద్వయం స్వీకృతము** అంటారు.

రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించినప్పుడు ఇది ఏ విధంగా ఉంటుందో పరీక్షిద్దాం.

క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న దాని ప్రకారం రెండు సరళరేఖలు ఖండించుకొన్నప్పుడు శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానమని గుర్తు తెచ్చుకోండి. ఈ ఫలితాన్ని మనం ఇప్పుడు నిరూపిద్దాం. నిరూపణకు కావలసిన అంశాలను అనుబంధం – 1లో చూసి కింది ఇవ్వబడిన నిరూపణను అధ్యయనం చేసేటప్పుడు వాటిని గుర్తుంచుకోండి.

సిద్ధాంతం 6.1 : *రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించుకుంటే ఏర్పడిన శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం.*

నిరూపణ : పై వాక్యంలో రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొనునని ఇవ్వబడింది. కాబట్టి పటం 6.8లో చూపబడిన విధంగా AB మరియు CD రేఖలు O వద్ద ఖండించుకున్నాయి అనుకొనుము. అవి రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలను ఏర్పరచును.



పటం 6.8 : శీర్షాభిముఖ కోణాలు

(i) $\angle$ AOC మరియు $\angle$ BOD (ii) $\angle$ AOD మరియు $\angle$ BOC.

$\angle AOC = \angle BOD$ మరియు $\angle AOD = \angle BOC$ అని నిరూపించుకోవాలి
. ఇప్పుడు, కిరణం OA, సరళరేఖ CD పై ఉన్నది.

అందువలన, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (రేఖీయ ద్వయ స్వీకృతం) (1)

అలాగే $\angle AOD + \angle BOD = 180°$? అవును! (ఎందుకు?) (2)

(1) మరియు (2) వరకు మనం వ్రాయవచ్చు.

$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

ఇది దానిని తెలియజేస్తుంది $\angle AOC = \angle BOD$ (విభాగం 5.2 పరిశీలించండి 5.2, స్వీకృతం 3)

ఇదే విధంగా దానిని నిరూపించవచ్చు $\angle AOD = \angle BOC$

ఇప్పుడు, మనం రేఖీయ ద్వయ స్వీకృతం మరియు సిద్ధాంతం 6.1 ఆధారంగా కొన్ని ఉదాహరణలు చేద్దాం.

Example 1 : In Fig. 6.9, lines PQ and RS intersect each other at point O. If $\angle$ POR : $\angle$ ROQ = 5 : 7, find all the angles.

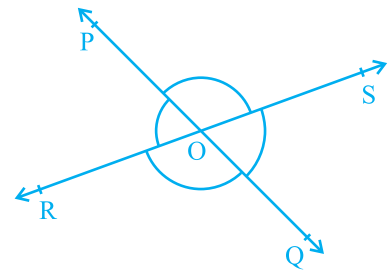


Fig. 6.9

Solution : $\angle$ POR +$\angle$ ROQ = 180°

(Linear pair of angles)

But $\angle$ POR : $\angle$ ROQ = 5 : 7

(Given)

Therefore, $\angle \text{POR} = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

Similarly, $\angle \text{ROQ} = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

Now, $\angle$ POS = $\angle$ROQ = 105° (Vertically opposite angles)

and $\angle$ SOQ = $\angle$POR = 75° (Vertically opposite angles)

Example 2 : In Fig. 6.10, ray OS stands on a line POQ. Ray OR and ray OT are angle bisectors of $\angle$ POS and $\angle$ SOQ, respectively. If $\angle$ POS = x, find $\angle$ ROT.

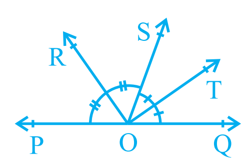


Fig. 6.10

Solution : Ray OS stands on the line POQ.

Therefore, $\angle$ POS + $\angle$ SOQ = 180°

But, $\angle$ POS = x

Therefore, x + $\angle$ SOQ = 180°

So, $\angle$ SOQ = 180° – x

Now, ray OR bisects $\angle$ POS, therefore,

$$\angle \text{ROS} = \frac{1}{2} \times \angle \text{POS}$$

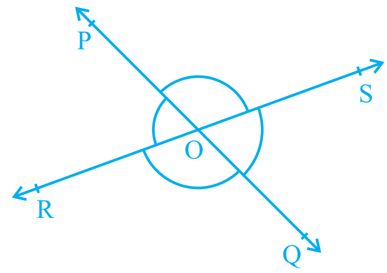
$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

Similarly, $$\angle \text{SOT} = \frac{1}{2} \times \angle \text{SOQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$$

$$= 90° - \frac{x}{2}$$

ఉదాహరణ 1 : పటం 6.9 లో PQ మరియు RS సరళరేఖలు, బిందువు O వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ అయిన అన్ని కోణాల కొలతలు కనుగొనండి?



పటం 6.9

సాధన : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$

(కోణాల రేఖీయ ద్వయం)

కానీ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$

(దత్తాంశము)

కావున, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$

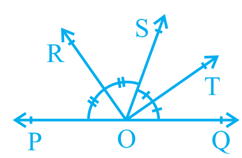
అదే విధంగా, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$

ఇప్పుడు, $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

మరియు $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

ఉదాహరణ 2 : పటం 6.10లో కిరణం OS ఒక సరళరేఖ POQ పై ఉన్నది. కిరణం OR మరియు కిరణం OT లు వరుసగా $\angle POS$ మరియు $\angle SOQ$ ల కోణసమద్విఖండన రేఖలు $\angle POS = x$ అయిన $\angle ROT$ కొలతను కనుగొనండి.

సాధన : కిరణం OS సరళరేఖ POQ పై ఉంది.



పటం 6.10

కావున, $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

కాని, $\angle POS = x$

కావున, $x + \angle SOQ = 180^\circ$

కాబట్టి, $\angle SOQ = 180^\circ - x$

ఇప్పుడు, కిరణం OR, $\angle POS$ ని సమద్విఖండన చేస్తుంది. కాబట్టి,

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

అదేవిధంగా, $$\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$$

$$= 90^\circ - \frac{x}{2}$$

Now, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90°$$

Example 3 : In Fig. 6.11, OP, OQ, OR and OS are four rays. Prove that $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$.

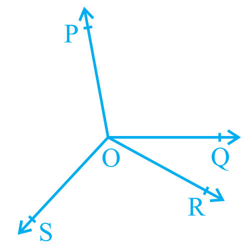


Fig. 6.11

Solution : In Fig. 6.11, you need to produce any of the rays OP, OQ, OR or OS backwards to a point. Let us produce ray OQ backwards to a point T so that TOQ is a line (see Fig. 6.12).

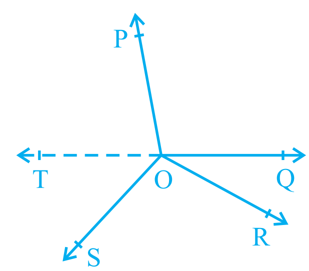


Fig. 6.12

Now, ray OP stands on line TOQ.

Therefore, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (1)

(Linear pair axiom)

Similarly, ray OS stands on line TOQ.

Therefore, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ (2)

But $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

So, (2) becomes

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ (3)

Now, adding (1) and (3), you get

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ (4)

But $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

Therefore, (4) becomes

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$

EXERCISE 6.1

1. In Fig. 6.13, lines AB and CD intersect at O. If $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ and $\angle BOD = 40°$, find $\angle BOE$ and reflex $\angle COE$.

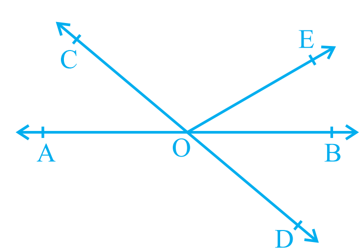


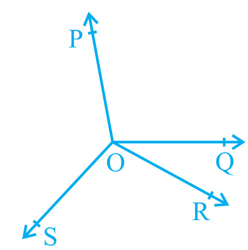
Fig. 6.13

ఇప్పుడు, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90°$$

ఉదాహరణ 3: పటం 6.11లో OP, OQ, OR మరియు OS లు నాలుగు కిరణాలు $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ అని నిరూపించండి.



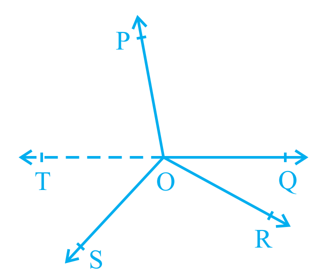
పటం 6.11

సాధన : పటం 6.11లో OP, OQ, OR లేదా OS కిరణాలలో ఏదైనా ఒక దానిని ఒక బిందువు వరకు వెనుకకు పొడిగించాలి. OQ కిరణాన్ని T వరకు వెనుకకు పొడిగిద్దాం. అప్పుడు TOQ ఒక రేఖ అవుతుంది (పటం 6.12 చూడండి).

ఇప్పుడు, OP కిరణము TOQ రేఖపై ఉండును.

కాబట్టి, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (1)

(రేఖీయ ద్వయ స్వీకృతము)



పటం 6.12

అదేవిధంగా, కిరణం OS, రేఖ TOQ పై ఉండును.

కాబట్టి, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ (2)

కాని $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

కావున (2) నుండి

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ (3)

ఇప్పుడు, (1) మరియు (3) కలపగా

$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ (4)

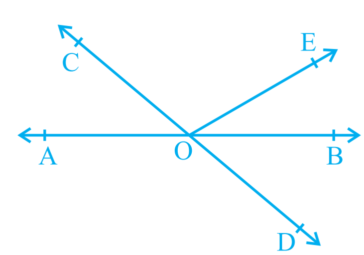
కాని $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

కావున, (4) నుండి

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$$

అభ్యాసం 6.1

1. పటం 6.13 లో AB మరియు CD సరళరేఖలు O బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ మరియు $\angle BOD = 40°$ అయిన $\angle BOE$ మరియు పరావర్తన కోణం $\angle COE$ లను కనుగొనండి.



పటం 6.13

2. In Fig. 6.14, lines XY and MN intersect at O. If $\angle$ POY = 90° and $a : b = 2 : 3$, find c.

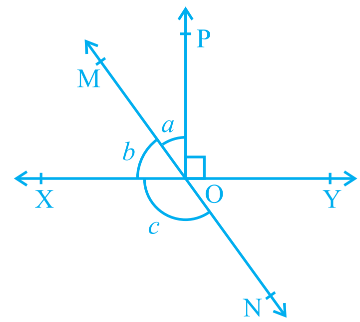


Fig. 6.14

3. In Fig. 6.15, $\angle$ PQR = $\angle$ PRQ, then prove that $\angle$ PQS = $\angle$ PRT.

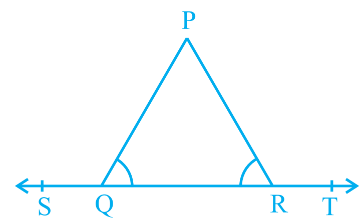


Fig. 6.15

4. In Fig. 6.16, if $x + y = w + z$, then prove that AOB is a line.

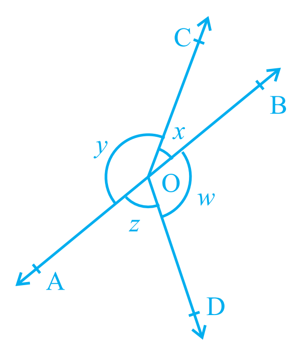


Fig. 6.16

5. In Fig. 6.17, POQ is a line. Ray OR is perpendicular to line PQ. OS is another ray lying between rays OP and OR. Prove that

$$\angle \text{ROS} = \frac{1}{2} (\angle \text{QOS} - \angle \text{POS}).$$

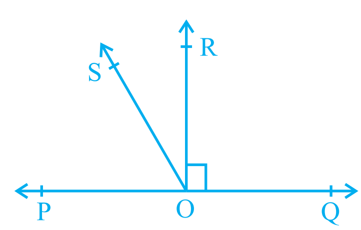
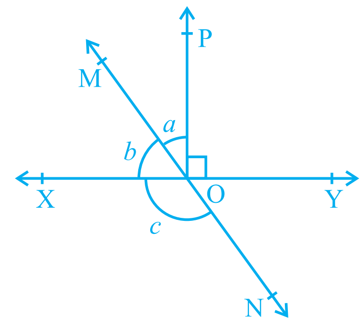


Fig. 6.17

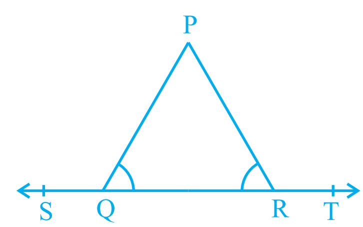
6. It is given that $\angle$ XYZ = 64° and XY is produced to point P. Draw a figure from the given information. If ray YQ bisects $\angle$ ZYP, find $\angle$ XYQ and reflex $\angle$ QYP.

2. పటం 6.14 లో సరళరేఖలు XY మరియు MN లు O వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. $\angle POY = 90°$ మరియు $a : b = 2 : 3$ అయిన c ను కనుగొనండి.



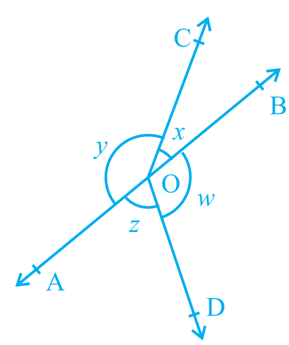
పటం. 6.14

3. పటం 6.15 లో $\angle PQR = \angle PRQ$ అయిన $\angle PQS = \angle PRT$ అని నిరూపించండి.



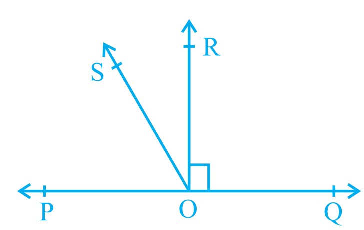
పటం. 6.15

4. పటం 6.16 లో $x + y = w + z$ అయిన AOB ఒక సరళరేఖ అని నిరూపించండి.



పటం. 6.16

5. పటం 6.17లో POQ ఒక సరళరేఖ. కిరణం OR, సరళరేఖ PQ కు లంబంగా ఉన్నది. OP మరియు OR కిరణాల మధ్య OS అనేది మరొక కిరణం అయిన $\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$ అని నిరూపించండి.



పటం. 6.17

6. $\angle XYZ = 64°$ మరియు XY ని P బిందువు వరకు పొడగించారు. $\angle ZYP$ ని YQ కిరణం సమద్విఖండన చేస్తుంది. ఈ సమాచారాన్ని పట రూపంలో చూపండి. అదే విధంగా $\angle XYQ$ మరియు పరావర్తన కోణము $\angle QYP$ లను కనుగొనండి.

6.5 Lines Parallel to the Same Line

If two lines are parallel to the same line, will they be parallel to each other? Let us check it. See Fig. 6.18 in which line $m \parallel$ line l and line $n \parallel$ line l.

Let us draw a line t transversal for the lines, l, m and n. It is given that line $m \parallel$ line l and line $n \parallel$ line l.

Therefore, $\angle 1 = \angle 2$ and $\angle 1 = \angle 3$

(Corresponding angles axiom)

So, $\angle 2 = \angle 3$ (Why?)

But $\angle 2$ and $\angle 3$ are corresponding angles and they are equal.

Therefore, you can say that

Line $m \parallel$ Line n

(Converse of corresponding angles axiom)

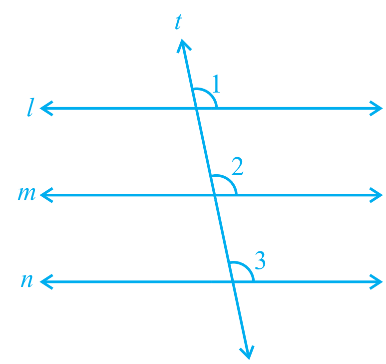


Fig. 6.18

This result can be stated in the form of the following theorem:

Theorem 6.6 : *Lines which are parallel to the same line are parallel to each other.*

Note : The property above can be extended to more than two lines also.

Now, let us solve some examples related to parallel lines.

Example 4 : In Fig. 6.19, if PQ || RS, $\angle$MXQ = 135° and $\angle$MYR = 40°, find $\angle$XMY.

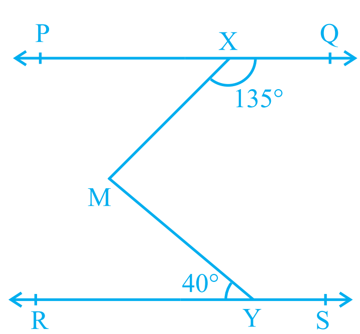


Fig. 6.19

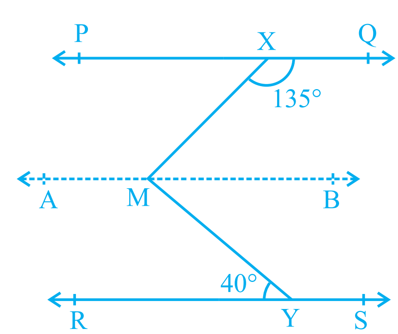


Fig. 6.20

Solution : Here, we need to draw a line AB parallel to line PQ, through point M as shown in Fig. 6.20. Now, AB || PQ and PQ || RS.

6.5 ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖలు

రెండు సరళరేఖలు ఒకే రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయా? దీనిని పరిశీలిద్దాం. పటం 6.18 చూడండి. అవి m రేఖ $\|$ l రేఖ మరియు n రేఖ $\|$ l రేఖ.

l, m మరియు n రేఖలకు t అనే తిర్యగ్రేఖ ని గీద్దాం. m రేఖ $\|$ l రేఖ మరియు n రేఖ $\|$ l రేఖ అని ఇవ్వబడింది.

అందువలన, $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 1 = \angle 3$

(సదృశకోణాల స్వీకృతం)

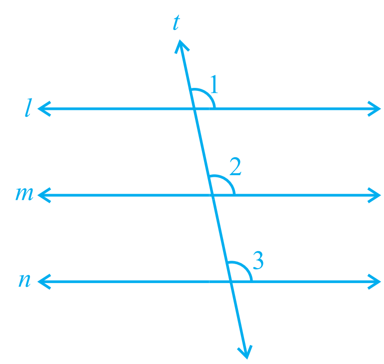
కావున, $\angle 2 = \angle 3$ (ఎందుకు?)

కాని $\angle 2$ మరియు $\angle 3$ సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం.

కాబట్టి,

m రేఖ $\|$ n రేఖ అని మీరు చెప్పవచ్చు.

(సదృశ కోణాల స్వీకృతం యొక్క విపర్యం)



పటం. 6.18

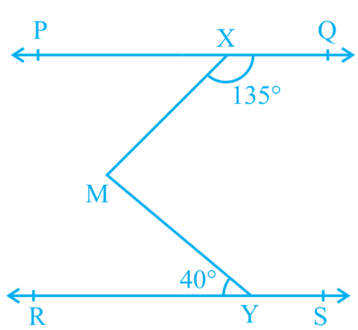
ఈ ఫలితాన్ని కింది సిద్ధాంతం రూపంలో చెప్పవచ్చు:

సిద్ధాంతం 6.6 : *ఒక రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.*

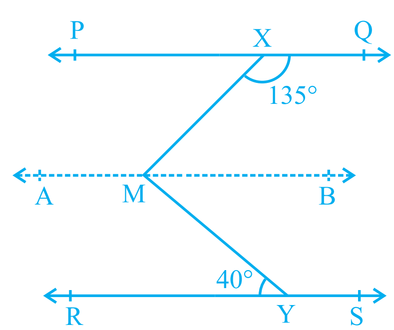
గమనిక : పైన చెప్పబడిన ధర్మం రెండు కంటే ఎక్కువ రేఖలకు కూడా అన్వయించవచ్చు.

ఇప్పుడు సమాంతర రేఖలకు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : పటం 6.19 లో PQ $\|$ RS, $\angle$ MXQ = 135° మరియు $\angle$ MYR = 40°, అయిన $\angle$ XMY ను కనుగొనండి.



పటం. 6.19



పటం. 6.20

సాధన : ఇక్కడ, పటం 6.20 లో చూపిన విధంగా M గుండా PQ రేఖకి సమాంతరంగా AB రేఖను మనం గీయాల్సి వుంది. ఇప్పుడు AB $\|$ PQ మరియు PQ $\|$ RS.

Therefore, $AB \parallel RS$ (Why?)

Now, $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

(AB || PQ, Interior angles on the same side of the transversal XM)

But $\angle QXM = 135°$

So, $135° + \angle XMB = 180°$

Therefore, $\angle XMB = 45°$ (1)

Now, $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, Alternate angles)

Therefore, $\angle BMY = 40°$ (2)

Adding (1) and (2), you get

$$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$$

That is, $\angle XMY = 85°$

Example 5 : If a transversal intersects two lines such that the bisectors of a pair of corresponding angles are parallel, then prove that the two lines are parallel.

Solution : In Fig. 6.21, a transversal AD intersects two lines PQ and RS at points B and C respectively. Ray BE is the bisector of $\angle$ ABQ and ray CG is the bisector of $\angle$ BCS; and BE || CG.

We are to prove that PQ || RS.

It is given that ray BE is the bisector of $\angle$ ABQ.

Therefore, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

Similarly, ray CG is the bisector of $\angle$ BCS.

Therefore, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

But BE || CG and AD is the transversal.

Therefore, $\angle ABE = \angle BCG$

(Corresponding angles axiom) (3)

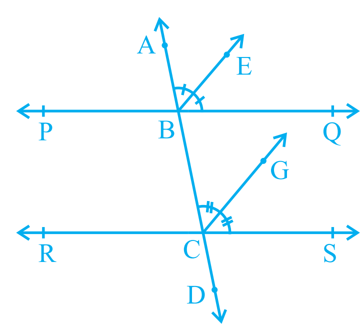


Fig. 6.21

Substituting (1) and (2) in (3), you get

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

That is, $\angle ABQ = \angle BCS$

కాబట్టి, $AB \parallel RS$ (ఎందుకు?)

ఇప్పుడు, $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

(AB || PQ, తిర్యగ్రేఖ XM కి ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు)

కానీ $\angle QXM = 135°$

కావున, $135° + \angle XMB = 180°$

కాబట్టి, $\angle XMB = 45°$ (1)

ఇప్పుడు, $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, ఏకాంతర కోణాలు)

కాబట్టి, $\angle BMY = 40°$ (2)

(1) మరియు (2) కలుపగా

$$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$$

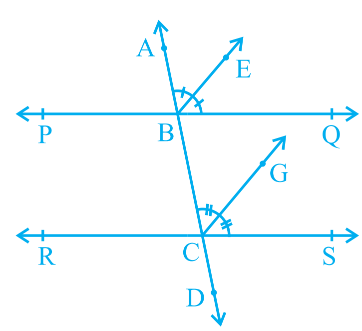
అనగా, $\angle XMY = 85°$

ఉదాహరణ 5 : రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు సదృశ కోణ సమద్విఖండన రేఖల జత సమాంతరంగా ఉంటే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయని నిరూపించండి.

సాధన : పటం 6.21లో AD తిర్యగ్రేఖ PQ మరియు RS అనే రెండు రేఖలను వరుసగా B మరియు C బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. BE కిరణం $\angle ABQ$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ మరియు CG కిరణం $\angle BCS$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ మరియు $BE \parallel CG$.

మనం $PQ \parallel RS$ అని నిరూపించాలి.

BE కిరణం $\angle ABQ$ కోణసమద్విఖండన రేఖ అని ఇవ్వబడింది.



పటం. 6.21

కాబట్టి, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

అదే విధంగా CG కిరణం, $\angle BCS$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ

కాబట్టి, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

కానీ $BE \parallel CG$ మరియు AD తిర్యగ్రేఖ.

కాబట్టి, $\angle ABE = \angle BCG$

(సదృశ కోణాల స్వీకృతం) (3)

(1) మరియు (2) లను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

అంటే, $\angle ABQ = \angle BCS$

But, they are the corresponding angles formed by transversal AD with PQ and RS; and are equal.

Therefore, PQ || RS

(Converse of corresponding angles axiom)

Example 6 : In Fig. 6.22, AB || CD and CD || EF. Also EA ⊥ AB. If ∠ BEF = 55°, find the values of x, y and z.

Solution : $y + 55° = 180°$

(Interior angles on the same side of the transversal ED)

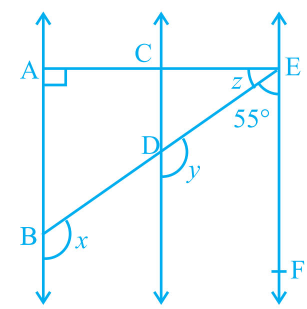


Fig. 6.22

Therefore, $y = 180° – 55° = 125°$

Again $x = y$

(AB || CD, Corresponding angles axiom)

Therefore $x = 125°$

Now, since AB || CD and CD || EF, therefore, AB || EF.

So, $\angle \text{EAB} + \angle \text{FEA} = 180°$ (Interior angles on the same side of the transversal EA)

Therefore, $90° + z + 55° = 180°$

Which gives $z = 35°$

EXERCISE 6.2

1. In Fig. 6.23, if AB || CD, CD || EF and $y : z = 3 : 7$, find x.

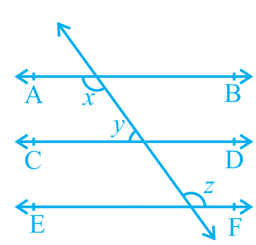


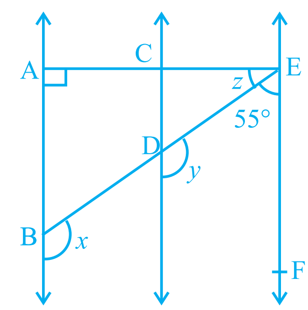
Fig. 6.23

కాని అవి AD తిర్యగ్రేఖ PQ మరియు RS రేఖలతో ఏర్పరచిన సదృశ కోణాలు మరియు అవి సమానం.

కాబట్టి, PQ || RS

(సదృశ కోణాల స్వీకృత విపర్యయం)

ఉదాహరణ 6 : పటం 6.22 లో AB || CD మరియు CD || EF, EA ⊥ AB అయితే $\angle BEF = 55°$ అయినప్పుడు x, y మరియు z విలువలు కనుగొనండి.



పటం. 6.22

సాధన : $y + 55° = 180°$

(ED తిర్యగ్రేఖకు ఒకే ఒక వైపు గల అంతర కోణాలు)

కాబట్టి, $y = 180° – 55° = 125°$

మరియు $x = y$

(AB || CD, సదృశ కోణాల స్వీకృతం)

కాబట్టి $x = 125°$

ఇప్పుడు, AB || CD మరియు CD || EF, కాబట్టి, AB || EF.

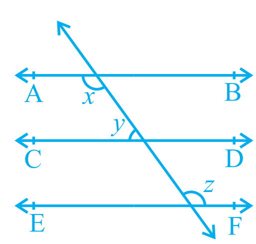
కావున, $\angle EAB + \angle FEA = 180°$ (తిర్యగ్రేఖ EA కు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు)

కాబట్టి, $90° + z + 55° = 180°$

దీని నుండి $z = 35°$

అభ్యాసం 6.2

1. పటం 6.23లో AB || CD, CD || EF మరియు $y : z = 3 : 7$ అయిన x విలువను కనుగొనండి.



పటం. 6.23

2. In Fig. 6.24, if AB || CD, EF ⊥ CD and ∠ GED = 126°, find ∠ AGE, ∠ GEF and ∠ FGE.

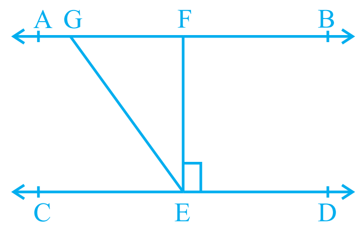


Fig. 6.24

3. In Fig. 6.25, if PQ || ST, ∠ PQR = 110° and ∠ RST = 130°, find ∠ QRS.
[**Hint :** Draw a line parallel to ST through point R.]

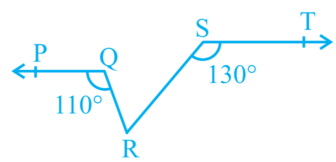


Fig. 6.25

4. In Fig. 6.26, if AB || CD, ∠ APQ = 50° and ∠ PRD = 127°, find *x* and *y*.

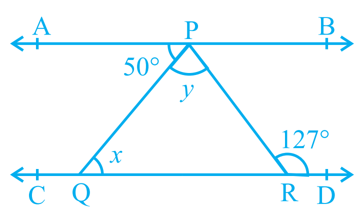


Fig. 6.26

5. In Fig. 6.27, PQ and RS are two mirrors placed parallel to each other. An incident ray AB strikes the mirror PQ at B, the reflected ray moves along the path BC and strikes the mirror RS at C and again reflects back along CD. Prove that AB || CD.

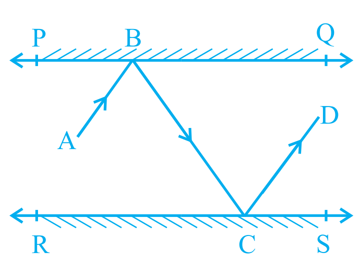
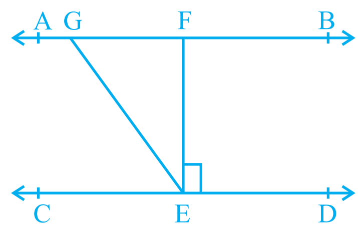


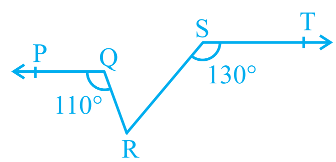
Fig. 6.27

2. పటం. 6.24 లో, AB || CD, EF ⊥ CD మరియు ∠GED = 126°, అయిన ∠AGE, ∠GEF మరియు ∠FGE లను కనుగొనండి.



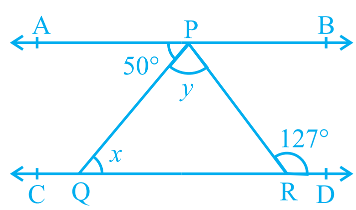
పటం 6.24

3. పటం 6.25లో PQ || ST, ∠PQR = 110° మరియు ∠RST = 130° అయిన ∠QRS కనుగొనండి. [**సూచన :** బిందువు R ద్వారా ST సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయండి.]



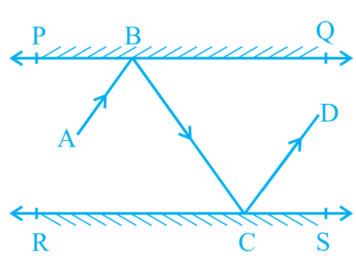
పటం. 6.25

4. పటం 6.26లో AB || CD, ∠APQ = 50° మరియు ∠PRD = 127° అయిన x మరియు y లను కనుగొనండి.



పటం. 6.26

5. పటం 6.27లో PQ మరియు RS లు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంచబడిన దర్పణాలు. పతన కిరణం AB, దర్పణం PQ ను B వద్ద తాకి పరావర్తనం చెందింది. పరావర్తన కిరణం BC మార్గం గుండా ప్రయాణిస్తూ మరొక దర్పణం RS ను C వద్ద తాకి పరావర్తనం చెందింది మరియు ఆ పరావర్తన కిరణం CD గుండా ప్రయాణించింది. అయిన AB || CD అని నిరూపించండి.



పటం. 6.27

6.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. If a ray stands on a line, then the sum of the two adjacent angles so formed is 180° and vice-versa. This property is called as the Linear pair axiom.
2. If two lines intersect each other, then the vertically opposite angles are equal.
3. Lines which are parallel to a given line are parallel to each other.

6.6 సారాంశం

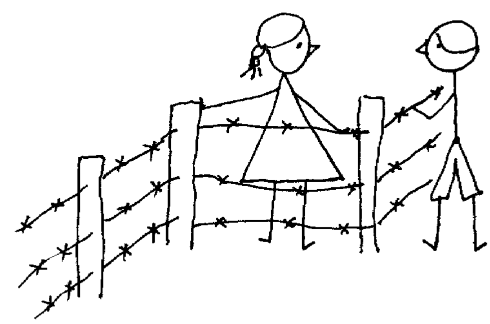
ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేసారు:

1. ఒక కిరణం, రేఖపై ఉన్నట్లయితే, రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° మరియు దాని విపర్యం కూడా నిజం. ఈ ధర్మాన్ని రేఖీయ ద్వయ స్వీకృతం అని అంటారు.
2. రెండు రేఖలు ఒక దానికొకటి ఖండించుకున్నట్లయితే, అప్పుడు ఏర్పడే శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానం.
3. ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖలు, ఒక దానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

APPENDIX 1

PROOFS IN MATHEMATICS

A1.1 Introduction



Suppose your family owns a plot of land and there is no fencing around it. Your neighbour decides one day to fence off his land. After he has fenced his land, you discover that a part of your family's land has been enclosed by his fence. How will you prove to your neighbour that he has tried to encroach on your land? Your first step may be to seek the help of the village elders to sort out the difference in boundaries. But, suppose opinion is divided among the elders. Some feel you are right and others feel your neighbour is right. What can you do? Your only option is to find a way of establishing your claim for the boundaries of your land that is acceptable to all. For example, a government approved survey map of your village can be used, if necessary in a court of law, to prove (claim) that you are correct and your neighbour is wrong.

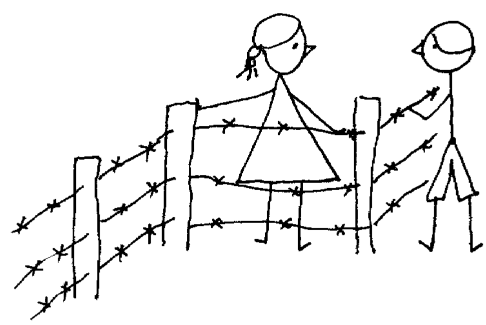
Let us look at another situation. Suppose your mother has paid the electricity bill of your house for the month of August, 2005. The bill for September, 2005, however, claims that the bill for August has not been paid. How will you disprove the claim made by the electricity department? You will have to produce a receipt proving that your August bill has been paid.

You have just seen some examples that show that in our daily life we are often called upon to prove that a certain statement or claim is true or false. However, we also accept many statements without bothering to prove them. But, in mathematics we only accept a statement as true or false (except for some axioms) if it has been proved to be so, according to the logic of mathematics.

అనుబంధం 1

గణితంలో నిరూపణలు

A1.1 పరిచయం



మీ కుటుంబానికి ఒక సొంత నివాస భూమి ఉందనుకోండి మరియు దాని చుట్టూ ఎలాంటి ఫెన్సింగ్ లేదు. మీ పొరుగువాడు ఒక రోజు తన భూమికి కంచె వేయాలని నిర్ణయించుకున్నాడు. అతను తన భూమికి కంచె వేసిన తరువాత, మీ కుటుంబం యొక్క భూమిలో కొంత భాగం అతని కంచె ద్వారా ఆక్రమించబడిందని మీరు కనుగొన్నారు. అతను మీ భూమిని ఆక్రమించడానికి ప్రయత్నించాడని, మీ పొరుగువారికి మీరు ఎలా రుజువు చేస్తారు? సరిహద్దులలో వ్యత్యాసాన్ని పరిష్కరించడానికి గ్రామ పెద్దల సహాయం కోరడం మీ మొదటి దశ కావచ్చు. కాని, ఊరి పెద్దల భిన్నాభిప్రాయాలతో కొంత మంది మీరు చెప్పింది సరైనదని మరియు మరికొందరు మీ పొరుగువాడు సరైనవాడని భావిస్తారు. మీరు ఏమి చేయగలరు? అందరికీ ఆమోదయోగ్యమైన, మీ భూమి యొక్క సరిహద్దుల కోసం మీ హక్కును రుజువుపరిచే మార్గాన్ని కనుగొనడం మీకున్న ఏకైకమార్గం . ఉదాహరణకు, ఒకవేళ అవసరం అయితే, మీరు సరైనవారని మరియు మీ పొరుగువారు సరైనవారు కాదని అని రుజువు చేయడం కొరకు, ప్రభుత్వంచే ఆమోదించిన మీ గ్రామం యొక్క సర్వే మ్యాప్‌ని, కోర్టులో ఉపయోగించవచ్చు.

మనం ఇప్పుడు మరో పరిస్థితిని చూద్దాం. మీ అమ్మగారు 2005 ఆగస్టు నెలకు మీ ఇంటి విద్యుత్ బిల్లును చెల్లించిందనుకోండి. అయితే, వారు సెప్టెంబర్ 2005 నాటి బిల్లులో ఆగస్టుకు సంబంధించిన బిల్లు చెల్లించబడలేదని ఇచ్చారు. విద్యుత్ శాఖ ద్వారా ఇచ్చిన ఈ బిల్లును మీరు ఏవిధంగా తప్పు అని నిరూపిస్తారు? మీ ఆగస్టు నెల బిల్లు చెల్లించబడిందని నిరూపించే రసీదును మీరు సమర్పించాల్సి ఉంటుంది.

మన నిత్యజీవితంలో ఒక నిర్దిష్ట ప్రవచనం లేదా ప్రకటన సత్యమో, అసత్యమో అని రుజువు చేయమని మనల్ని తరచుగా కోరే కొన్ని ఉదాహరణలను మీరు ఇప్పుడే చూశారు. అయినప్పటికి, మనం అనేక ప్రవచనాలను నిరూపించకుండానే అంగీకరిస్తాం. కానీ, గణితశాస్త్రం యొక్క తర్కం ప్రకారం, గణితంలో ఒక వాక్యాన్ని సత్యం లేదా అసత్యం అని మాత్రమే మనం అంగీకరిస్తాం (కొన్ని స్వీకృతాలలో తప్ప).

In fact, proofs in mathematics have been in existence for thousands of years, and they are central to any branch of mathematics. The first known proof is believed to have been given by the Greek philosopher and mathematician Thales. While mathematics was central to many ancient civilisations like Mesopotamia, Egypt, China and India, there is no clear evidence that they used proofs the way we do today.

In this chapter, we will look at what a statement is, what kind of reasoning is involved in mathematics, and what a mathematical proof consists of.

A1.2 Mathematically Acceptable Statements

In this section, we shall try to explain the meaning of a mathematically acceptable statement. A 'statement' is a sentence which is not an order or an exclamatory sentence. And, of course, a statement is not a question! For example,

"What is the colour of your hair?" is not a statement, it is a question.

"Please go and bring me some water." is a request or an order, not a statement.

"What a marvellous sunset!" is an exclamatory remark, not a statement.

However, "The colour of your hair is black" is a statement.

In general, statements can be one of the following:

- *always true*
- *always false*
- *ambiguous*

The word 'ambiguous' needs some explanation. There are two situations which make a statement ambiguous. The first situation is when we cannot decide if the statement is always true or always false. For example, "Tomorrow is Thursday" is ambiguous, since enough of a context is not given to us to decide if the statement is true or false.

The second situation leading to ambiguity is when the statement is subjective, that is, it is true for some people and not true for others. For example, "Dogs are intelligent" is ambiguous because some people believe this is true and others do not.

Example 1 : State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.

(i) There are 8 days in a week.

(ii) It is raining here.

(iii) The sun sets in the west.

వాస్తవానికి, వేల సంవత్సరాలుగా గణితంలో నిరూపణలు ఉనికిలో ఉన్నాయి మరియు అవి గణితం యొక్క ఏ శాఖకు అయిన కేంద్రబిందువుగా ఉన్నాయి. మొదటగా వెలుగులోకి వచ్చిన నిరూపణ "గ్రీకు తత్వవేత్త మరియు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు థేల్స్ చే ఇవ్వబడిందని భావిస్తున్నారు". మెసొపొటేమియా, ఈజిప్టు, చైనా, ఇండియా వంటి అనేక ప్రాచీన నాగరికతలకు గణితశాస్త్రం కేంద్రంగా ఉండగా, నేడు మనం చేసే విధంగా, వారు నిరూపణలను ఉపయోగించారనడానికి స్పష్టమైన ఆధారాలు లేవు.

ఈ అధ్యాయంలో, ఒక ప్రవచనం అంటే ఏమిటి, గణితంలో ఎటువంటి తర్కం ఉంది మరియు ఒక గణిత నిరూపణలో ఏమేమి వుంటాయి అనే విషయాలను చూద్దాం.

A1.2 గణితపరంగా ఆమోదయోగ్యమైన ప్రవచనాలు

ఈ విభాగంలో, గణితపరంగా ఆమోదయోగ్యమైన ప్రవచనం యొక్క అర్థాన్ని వివరించడానికి మనం ప్రయత్నిస్తాం. 'ప్రవచనం 'అనేది ఒక ఆదేశం లేదా ఆశ్చర్యకరమైన వాక్యం కాదు మరియు వాస్తవానికి ఒక ప్రవచనం ఒక ప్రశ్న కూడా కాదు ! ఉదాహరణకు,

"మీ జుట్టు రంగు ఏమిటి?" ఇది ఒక ప్రవచనం కాదు, ఇది ఒక ప్రశ్న.

"దయచేసి వెళ్లి నాకు కొంచెం నీరు తీసుకురండి." ఇది ఒక అభ్యర్థన లేదా ఒక ఆదేశం, ఒక ప్రవచనం కాదు.

"ఎంత అద్భుతమైన సూర్యాస్తమయం!" ఇది ఒక ఆశ్చర్యకరమైన వ్యాఖ్య, ఒక ప్రవచనం కాదు.

అయితే, "మీ జుట్టు యొక్క రంగు నలుపుగా ఉంది" అనేది ఒక ప్రవచనం.

సాధారణంగా, ప్రవచనాలు దిగువ పేర్కొన్నవాటిలో ఏదో ఒకటికి చెందవచ్చు.

- *ఎల్లప్పుడూ సత్యం*
- *ఎల్లప్పుడూ అసత్యం*
- *అస్పష్టమైన*

'అస్పష్టమైన' అనే పదానికి కొంత వివరణ అవసరం. ఒక ప్రవచనం అస్పష్టంగా వుండే రెండు సందర్భాలు ఉన్నాయి. ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యమా లేదా ఎల్లప్పుడూ అసత్యమా అని మనం నిర్ణయించలేకపోవడం మొదటి పరిస్థితి. ఉదాహరణకు, "రేపు గురువారం" అస్పష్టంగా ఉంది, ఎందుకంటే ఆ ప్రవచనం సత్యమా లేదా అసత్యమా అని నిర్ణయించుకోవడానికి మనకు తగిన సందర్భం ఇవ్వబడలేదు.

అస్పష్టతకు దారితీసే రెండవ పరిస్థితి ఏమిటంటే, ప్రవచనం వ్యక్తిగత అభిప్రాయంతో ముడిపడి ఉంది. అంటే, ఇది కొంతమంది వ్యక్తులకు సత్యంగాను మరియు ఇతరులకు అసత్యంగాను ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, "కుక్కలు తెలివైనవి" అనేది అస్పష్టంగా ఉంది. ఎందుకంటే, ఇది కొంతమంది సత్యమని నమ్ముతారు మరియు ఇతరులు నమ్మరు.

ఉదాహరణ 1 : ఈ క్రింది వాక్యాలు ఎల్లప్పుడూ సత్యమా, ఎల్లప్పుడూ అసత్యమా లేదా అస్పష్టమైనవా పేర్కొనండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించుకోండి.

(i) వారంలో 8 రోజులు ఉంటాయి.

(ii) ఇక్కడ వర్షం పడుతూ ఉంది.

(iii) పశ్చిమాన సూర్యుడు అస్తమిస్తాడు.

(iv) Gauri is a kind girl.

(v) The product of two odd integers is even.

(vi) The product of two even natural numbers is even.

Solution :

(i) This statement is always false, since there are 7 days in a week.

(ii) This statement is ambiguous, since it is not clear where 'here' is.

(iii) This statement is always true. The sun sets in the west no matter where we live.

(iv) This statement is ambiguous, since it is subjective–Gauri may be kind to some and not to others.

(v) This statement is always false. The product of two odd integers is always odd.

(vi) This statement is always true. However, to justify that it is true we need to do some work. It will be proved in Section A1.4.

As mentioned before, in our daily life, we are not so careful about the validity of statements. For example, suppose your friend tells you that in July it rains everyday in Manantavadi, Kerala. In all probability, you will believe her, even though it may not have rained for a day or two in July. Unless you are a lawyer, you will not argue with her!

As another example, consider statements we often make to each other like "it is very hot today". We easily accept such statements because we know the context even though these statements are ambiguous. 'It is very hot today' can mean different things to different people because what is very hot for a person from Kumaon may not be hot for a person from Chennai.

But a mathematical statement cannot be ambiguous. *In mathematics, a statement is only acceptable or valid, if it is either true or false.* We say that a statement is true, if it is always true otherwise it is called a false statement.

For example, $5 + 2 = 7$ is always true, so '$5 + 2 = 7$' is a true statement and $5 + 3 = 7$ is a false statement.

(iv) గౌరి దయగల అమ్మాయి.

(v) రెండు బేసి పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక సరిసంఖ్య.

(vi) రెండు సరి సహజ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక సరిసంఖ్య.

సాధన:

(i) వారంలో 7 రోజులే ఉంటాయి. కనుక, ఈ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ అసత్యం.

(ii) ఈ ప్రవచనం అస్పష్టంగా ఉంది, ఎందుకంటే 'ఇక్కడ' అంటే ఎక్కడో అనేది స్పష్టతలేని కారణంగా.

(iii) ఈ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం. మనం ఎక్కడ నివసిస్తున్నా పశ్చిమంలో సూర్యుడు అస్తమిస్తాడు.

(iv) ఈ ప్రవచనం అస్పష్టంగా ఉంది. ఎందుకంటే ఇది వ్యక్తిగత అభిప్రాయంతో ముడిపడి ఉంది. గౌరి కొంతమంది పట్ల దయగా ఉండవచ్చు మరియు కొంతమంది పట్ల దయగా ఉండకపోవచ్చు.

(v) ఈ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ అసత్యం. రెండు బేసి పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ బేసి సంఖ్య.

(vi) ఈ ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం. అయినప్పటికి, అది సత్యమని సమర్ధించుకోవడానికి మనం కొంత పని చేయాల్సిన అవసరం ఉంది. ఇది సెక్షన్ A1.4 లో నిరూపించబడుతుంది.

ముందుగా ప్రస్తావించబడినట్లు, మన దైనందిన జీవితంలో, ప్రవచనాల ప్రామాణికత విషయంలో మనం అంత జాగ్రత్తగా ఉండము. ఉదాహరణకు, జూలైలో కేరళలోని మనంతావాడిలో, ప్రతిరోజూ వర్షాలు కురుస్తాయని మీ స్నేహితురాలు మీకు చెప్పిందనుకుందాం. జూలైలో ఒకటి లేదా రెండు రోజులు వర్షం పడనప్పటికీ, మీరు ఆమెను విశ్వసించే అవకాశం ఉంది. మీరు న్యాయవాది అయితే తప్ప, మీరు ఆమెతో వాదించరు!

మరొక ఉదాహరణగా, "ఈ రోజు చాలా వేడిగా ఉంది" వంటి మనం తరచూ ఒకరు మరొకరితో చేసే వాక్యాలను పరిశీలించండి. ఈ వాక్యాలు అస్పష్టంగా ఉన్నప్పటికీ సందర్భం మనకు తెలుసు కాబట్టి, మనం అటువంటి వాక్యాలను సులభంగా అంగీకరిస్తాం. 'ఈ రోజు చాలా వేడిగా ఉంది' అనేది వేర్వేరు వ్యక్తులకు వేర్వేరు విషయాలను సూచిస్తుంది, ఎందుకంటే కుమావోన్ నుండి వచ్చిన ఒక వ్యక్తికి చాలా వేడిగా ఉన్న విషయం, చెన్నై నుండి వచ్చిన వ్యక్తికి ఉండకపోవచ్చు.

కానీ ఒక గణిత ప్రవచనం అస్పష్టంగా ఉండకూడదు. *గణితంలో, ఒక ప్రవచనం సత్యమా లేదా అసత్యమో అయితే, అది ఆమోదయోగ్యమైనది లేదా చెల్లుబాటు అవుతుంది.* ఒక ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం అయితే సత్యప్రవచనం అని, లేనిచో దానిని అసత్యప్రవచనం అని అంటారు..

ఉదాహరణకు, $5 + 2 = 7$ అనేది ఎల్లప్పుడూ సత్యం, కాబట్టి '$5 + 2 = 7$' అనేది ఒక సత్యప్రవచనం మరియు $5 + 3 = 7$ అనేది ఒక అసత్యప్రవచనం.

Example 2 : State whether the following statements are true or false:

(i) The sum of the interior angles of a triangle is 180°.

(ii) Every odd number greater than 1 is prime.

(iii) For any real number x, $4x + x = 5x$.

(iv) For every real number x, $2x > x$.

(v) For every real number x, $x^2 \geq x$.

(vi) If a quadrilateral has all its sides equal, then it is a square.

Solution :

(i) This statement is true. You have already proved this in Chapter 6.

(ii) This statement is false; for example, 9 is not a prime number.

(iii) This statement is true.

(iv) This statement is false; for example, $2 \times (-1) = -2$, and -2 is not greater than -1.

(v) This statement is false; for example, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, and $\frac{1}{4}$ is not greater than $\frac{1}{2}$.

(vi) This statement is false, since a rhombus has equal sides but need not be a square.

You might have noticed that to establish that a statement is not true according to mathematics, all we need to do is to find one case or example where it breaks down. So in (ii), since 9 is not a prime, it is an example that shows that the statement "Every odd number greater than 1 is prime" is not true. Such an example, that counters a statement, is called a *counter-example.* We shall discuss counter-examples in greater detail in Section A1.5.

You might have also noticed that while Statements (iv), (v) and (vi) are false, they can be restated with some conditions in order to make them true.

Example 3 : Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements.

(i) For every real number x, $2x > x$.

(ii) For every real number x, $x^2 \geq x$.

(iii) If you divide a number by itself, you will always get 1.

(iv) The angle subtended by a chord of a circle at a point on the circle is 90°.

(v) If a quadrilateral has all its sides equal, then it is a square.

ఉదాహరణ 2 : దిగువ పేర్కొన్న ప్రవచనాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలపండి:

(i) ఒక త్రిభుజంలో అంతర కోణాల మొత్తం $180°$.

(ii) 1 కంటే పెద్దదైన ప్రతి బేసి సంఖ్య ఒక ప్రధాన సంఖ్య అగును.

(iii) ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య x కు, $4x + x = 5x$.

(iv) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు, $2x > x$.

(v) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు, $x^2 \geq x$.

(vi) ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు సమానం అయితే అది ఒక చతురస్రం అగును.

సాధన :

(i) ఈ ప్రవచనం సత్యం. ఈ విషయాన్ని మీరు ఇప్పటికే 6వ అధ్యాయంలో నిరూపించారు.

(ii) ఈ ప్రవచనం అసత్యం; ఉదాహరణకు, 9 అనేది ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

(iii) ఈ ప్రవచనం సత్యం.

(iv) ఈ ప్రవచనం అసత్యం; ఉదాహరణకు $2 \times (-1) = -2$, మరియు -2 అనేది -1 కంటే ఎక్కువ కాదు.

(v) ఈ ప్రవచనం అసత్యం; ఉదాహరణకు $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, మరియు $\frac{1}{4}$ అనేది $\frac{1}{2}$ కంటే ఎక్కువ కాదు.

(vi) ఈ ప్రవచనం అసత్యం, ఎందుకంటే ఒక రాంబస్‌కు సమాన భుజాలుంటాయి, అయితే అది చతురస్రమే కానవసరం లేదు.

గణితశాస్త్ర ప్రకారం, ఒక ప్రవచనం నిజం కాదని నిర్ధారించడానికి మనం చేయవలసినది ఒక ఉదాహరణను కనుగొనడమేనని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు. కాబట్టి (ii) లో "1 కంటే పెద్దదైన ప్రతి బేసి సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య" అనే ప్రవచనం సత్యం కాదని చూపించే ఒక ఉదాహరణ, 9 అనేది ప్రధానసంఖ్య కాదు. ఒక ప్రవచనం అసత్యం అని నిరూపించడానికి ఇచ్చే ఉదాహరణను ప్రత్యుదాహరణ అని అంటారు. మనం సెక్షన్ A1.5లో ప్రత్యుదాహరణల గురించి మరింత వివరంగా చర్చిద్దాం.

ప్రవచనాలు (iv), (v) మరియు (vi) అసత్యాలు. కాని వాటిని కొన్ని నియమాలతో తిరిగి సత్యప్రవచనాలుగా మార్చవచ్చుని కూడా మీరు గమనించి ఉండవచ్చు.

ఉదాహరణ 3 : ఈ క్రింది ప్రవచనాలను తగిన నియమాలతో తిరిగి సత్యప్రవచనాలుగా తెలపండి.

(i) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x, $2x > x$.

(ii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x, $x^2 \geq x$.

(iii) ఒక సంఖ్యను అదేసంఖ్యచే భాగించినట్లయితే, మీరు ఎల్లప్పుడూ 1ని పొందుతారు.

(iv) వృత్తంలో ఒక జ్యా, వృత్తంపై ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణం $90°$.

(v) ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు సమానం అయితే అది ఒక చతురస్రం అగును.

Solution :

(i) If $x > 0$, then $2x > x$.

(ii) If $x \leq 0$ or $x \geq 1$, then $x^2 \geq x$.

(iii) If you divide a number except zero by itself, you will always get 1.

(iv) The angle subtended by a diameter of a circle at a point on the circle is 90°.

(v) If a quadrilateral has all its sides and interior angles equal, then it is a square.

EXERCISE A1.1

1. State whether the following statements are always true, always false or ambiguous. Justify your answers.

(i) There are 13 months in a year.

(ii) Diwali falls on a Friday.

(iii) The temperature in Magadi is 26^0 C.

(iv) The earth has one moon.

(v) Dogs can fly.

(vi) February has only 28 days.

2. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers.

(i) The sum of the interior angles of a quadrilateral is 350°.

(ii) For any real number x, $x^2 \geq 0$.

(iii) A rhombus is a parallelogram.

(iv) The sum of two even numbers is even.

(v) The sum of two odd numbers is odd.

3. Restate the following statements with appropriate conditions, so that they become true statements.

(i) All prime numbers are odd.

(ii) Two times a real number is always even.

(iii) For any x, $3x + 1 > 4$.

(iv) For any x, $x^3 \geq 0$.

(v) In every triangle, a median is also an angle bisector.

A1.3 Deductive Reasoning

The main logical tool used in establishing the truth of an **unambiguous** statement is *deductive reasoning.* To understand what deductive reasoning is all about, let us begin with a puzzle for you to solve.

సాధన :

(i) $x > 0$ అయితే అప్పుడు $2x > x$.

(ii) $x \leq 0$ లేదా $x \geq 1$, అయితే అప్పుడు $x^2 \geq x$.

(iii) మీరు సున్నా మినహా ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే భాగించినట్లయితే, మీరు ఎల్లప్పుడూ 1ని పొందుతారు.

(iv) వృత్తం మీద ఒక బిందువు వద్ద, ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసం ఏర్పరచిన కోణం $90°$.

(v) ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు మరియు అంతర కోణాలు సమానం అయితే అప్పుడు అది చతురస్రం అగును.

అభ్యాసం A1.1

1. దిగువ పేర్కొన్న ప్రవచనాలు ఎల్లప్పుడూ సత్యమా, ఎల్లప్పుడూ అసత్యమా లేదా అస్పష్టంగా ఉన్నాయా అనేది తెలియజేయండి. మీ సమాధానాలను సమర్థించండి.

(i) సంవత్సరానికి 13 నెలలు ఉంటాయి.

(ii) దీపావళి శుక్రవారం వస్తుంది.

(iii) మాగాడిలో ఉష్ణోగ్రత 26^0 C ఉంటుంది.

(iv) భూమికి ఒక చంద్రుడు ఉన్నాడు.

(v) కుక్కలు ఎగరగలవు.

(vi) ఫిబ్రవరిలో 28 రోజులు మాత్రమే ఉన్నాయి.

2. దిగువ పేర్కొన్న ప్రవచనాలు సత్యమా లేదా అసత్యమా పేర్కొనండి. మీ సమాధానాలకు కారణాలను తెలపండి.

(i) ఒక చతుర్భుజం యొక్క అంతర కోణాల మొత్తం $350°$.

(ii) ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య x కొరకు, $x^2 \geq 0$.

(iii) రాంబస్ అనేది సమాంతర చతుర్భుజం.

(iv) రెండు సరిసంఖ్యల మొత్తం ఒకసరిసంఖ్య.

(v) రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం ఒక బేసిసంఖ్య.

3. దిగువ ప్రవచనాలను సరియైన నియమాలతో తిరిగి సత్యప్రవచనాలుగా వ్రాయండి.

(i) అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు బేసిసంఖ్యలు.

(ii) ఒక వాస్తవ సంఖ్యకు రెండు రెట్లు ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య.

(iii) ఏదైనా x కు, $3x + 1 > 4$.

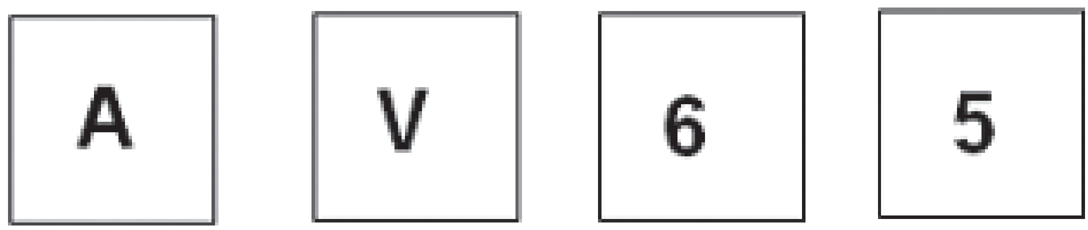
(iv) ఏదైనా x కు, $x^3 \geq 0$.

(v) ప్రతి త్రిభుజంలో, ఒక మధ్యగత రేఖ కోణ సమద్విఖండన రేఖ కూడా అగును.

A1.3 నిగమన నిరూపణ పద్ధతి

నిస్సందేహంగా ప్రవచనం యొక్క సత్యవిలువలు తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగించే ఒక ప్రధాన తార్కిక విధానమే *నిగమన నిరూపణ పద్ధతి.* ఒక పజిల్‌ను సాధించుట ద్వారా నిగమన నిరూపణ అంటే ఏమిటో పూర్తిగా అర్థం చేసుకుందాం.

You are given four cards. Each card has a number printed on one side and a letter on the other side.



Suppose you are told that these cards follow the rule:

"If a card has an even number on one side, then it has a vowel on the other side."

What is the **smallest number** of cards you need to turn over to check if the rule is true?

Of course, you have the option of turning over all the cards and checking. But can you manage with turning over a fewer number of cards?

Notice that the statement mentions that a card with an even number on one side has a vowel on the other. It does not state that a card with a vowel on one side must have an even number on the other side. That may or may not be so. The rule also does not state that a card with an odd number on one side must have a consonant on the other side. It may or may not.

So, do we need to turn over 'A'? No! Whether there is an even number or an odd number on the other side, the rule still holds.

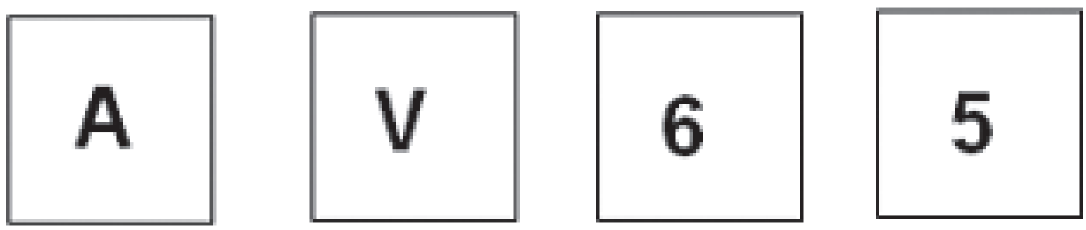
What about '5'? Again we do not need to turn it over, because whether there is a vowel or a consonant on the other side, the rule still holds.

But you do need to turn over V and 6. If V has an even number on the other side, then the rule has been broken. Similarly, if 6 has a consonant on the other side, then the rule has been broken.

The kind of reasoning we have used to solve this puzzle is called **deductive reasoning**. It is called 'deductive' because we arrive at (i.e., deduce or infer) a result or a statement from a previously established statement using logic. For example, in the puzzle above, by a series of logical arguments we deduced that we need to turn over only V and 6.

Deductive reasoning also helps us to conclude that a particular statement is true, because it is a special case of a more general statement that is known to be true. For example, once we prove that the product of two odd numbers is always odd, we can immediately conclude (without computation) that 70001×134563 is odd simply because 70001 and 134563 are odd.

మీకు నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి కార్డుకు ఒక వైపున ఒక సంఖ్య మరియు మరొక వైపున ఒక అక్షరం ముద్రించబడి ఉంటుంది.



"ఒక కార్డుకు ఒక వైపున సరిసంఖ్య ఉంటే, దానికి మరొక వైపున అచ్చు ఉంటుంది."

ఈ కార్డులు ఈ నియమాన్ని పాటిస్తాయని మీకు చెప్పబడిందనుకోండి.

ఈ నియమం సత్యమా, కాదా అని చూడడం కొరకు మీరు త్రిప్పి చూడాల్సిన కనిష్ట కార్డుల సంఖ్య ఎంత?

వాస్తవానికి, అన్ని కార్డులను తిప్పడం మరియు తనిఖీ చేసే అవకాశం మీకు ఉంది. కానీ **తక్కువ సంఖ్యలో** కార్డులను తిప్పడం ద్వారా మీరు నిర్వహించగలరా?

ఒక వైపున సరిసంఖ్య కలిగిన కార్డుకు, మరో వైపున అచ్చు ఉందని ప్రవచనంలో పేర్కొనడం గమనించండి. ఒక వైపున అచ్చుతో ఉన్న కార్డుకు మరొక వైపున సరిసంఖ్య ఉండాలని అక్కడ పేర్కొనలేదు. అది అలా ఉండవచ్చు లేదా ఉండకపోవచ్చు. ఒక వైపున బేసి సంఖ్య ఉన్న కార్డుకు, మరొక వైపున హల్లు ఉండాలనే నియమం కూడా పేర్కొనలేదు. ఇది కావచ్చు లేదా కాకపోవచ్చు.

కాబట్టి, మనం 'A'? ని తిప్పాల్సిన అవసరం ఉందా? లేదు! మరొక వైపు సరిసంఖ్య ఉన్నా లేదా బేసిసంఖ్య ఉన్నా, నియమం అప్పుడు కూడా సత్యమే అవుతుంది.

'5' గురించి ఏమిటి? మళ్ళీ మనం దానిని తిప్పవలసిన అవసరం లేదు, ఎందుకంటే, అవతలివైపున అచ్చు లేదా హల్లు ఉన్నా, నియమం అప్పుడు కూడా సత్యమే అవుతుంది.

కానీ మీరు V మరియు 6 లను తిప్పాల్సి ఉంటుంది. ఒకవేళ V కు అవతలి వైపున సరిసంఖ్య ఉన్నట్లయితే, అప్పుడు నియమం ఉల్లంఘించబడింది. అదేవిధంగా, ఒకవేళ 6 కు అవతలి వైపున ఒక హల్లు ఉన్నట్లయితే,అప్పుడు కూడా ఆ నియమం ఉల్లంఘించబడింది.

ఈ పజిల్‌ను పరిష్కరించడానికి మనం ఉపయోగించిన తార్కికాన్ని **నిగమన నిరూపణ** పద్ధతి అని అంటారు. ఎందుకంటే మనం ఒక ఫలితాన్ని లేదా తర్కాన్ని ఉపయోగించి నిర్ధారించిన ఒక ప్రవచనం నుంచి మరొక ప్రవచనంకు చేరుకుంటాం. ఉదాహరణకు, పై పజిల్ లో, తార్కిక వాదనల పరంపర ద్వారా, మనం కేవలం V మరియు 6 లను మాత్రమే తిప్పాల్సిన అవసరం ఉందని ఊహించాము. దీనిని 'నిగమనం' అని అంటారు.

సత్యం అని తెలిసిన నిర్దిష్ట ప్రవచనం యొక్క ప్రత్యేక సందర్భము కూడా సత్యమే. నిగమన నిరూపణ పద్ధతి కూడా ఒక నిర్దిష్ట ప్రవచనం సత్యమని నిర్ధారణకు రావడానికి కూడా మనకు సహాయపడుతుంది. ఉదాహరణకు, రెండు బేసి సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ బేసిసంఖ్యగా ఉంటుందని మనం రుజువు చేసిన తరువాత, 70001 మరియు 134563లు బేసిసంఖ్యలు కనుక 70001×134563 బేసిసంఖ్య అని మనం వెంటనే (గణన లేకుండా) నిర్ధారణకు రావచ్చు.

Deductive reasoning has been a part of human thinking for centuries, and is used all the time in our daily life. For example, suppose the statements "The flower Solaris blooms, only if the maximum temperature is above 28° C on the previous day" and "Solaris bloomed in Imaginary Valley on 15th September, 2005" are true. Then using deductive reasoning, we can conclude that the maximum temperature in Imaginary Valley on 14th September, 2005 was more than 28° C.

Unfortunately we do not always use correct reasoning in our daily life! We often come to many conclusions based on faulty reasoning. For example, if your friend does not smile at you one day, then you may conclude that she is angry with you. While it may be true that "if she is angry with me, she will not smile at me", it may also be true that "if she has a bad headache, she will not smile at me". Why don't you examine some conclusions that you have arrived at in your day-to-day existence, and see if they are based on valid or faulty reasoning?

EXERCISE A1.2

1. Use deductive reasoning to answer the following:

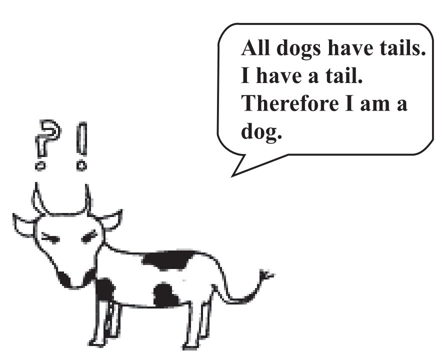
(i) Humans are mammals. All mammals are vertebrates. Based on these two statements, what can you conclude about humans?

(ii) Anthony is a barber. Dinesh had his hair cut. Can you conclude that Antony cut Dinesh's hair?

(iii) Martians have red tongues. Gulag is a Martian. Based on these two statements, what can you conclude about Gulag?

(iv) If it rains for more than four hours on a particular day, the gutters will have to be cleaned the next day. It has rained for 6 hours today. What can we conclude about the condition of the gutters tomorrow?

(v) What is the fallacy in the cow's reasoning in the cartoon below?



నిగమన తార్కిక పద్ధతి శతాబ్దాలుగా మానవ ఆలోచనలో ఒక భాగం, మరియు మన దైనందిన జీవితంలో ఎల్లప్పుడూ ఉపయోగించబడుతుంది. ఉదాహరణకు, “ముందు రోజున గరిష్ట ఉష్ణోగ్రత 28° C కంటే ఎక్కువగా ఉంటేనే సోలారిస్ పువ్వు వికసిస్తుంది, మరియు “2005 సెప్టెంబరు 15 న ఊహాత్మక లోయలో సోలారిస్ వికసించింది” అనే వాక్యాలు నిజమని అనుకోండి. తరువాత నిగమన తార్కిక పద్ధతి ఉపయోగించి, 2005 సెప్టెంబర్ 14న ఊహాత్మక లోయలో గరిష్ట ఉష్ణోగ్రత 28°C కంటే ఎక్కువగా ఉందని మనం నిర్ధారణకు రావచ్చు .

దురదృష్టవశాత్తు మన దైనందిన జీవితంలో మనం ఎల్లప్పుడూ సరైన తర్కాన్ని ఉపయోగించలేము! లోపభూయిష్టమైన తార్కికం ఆధారంగా మనం తరచూ అనేక నిర్ధారణలకు వస్తాం. ఉదాహరణకు, ఒక రోజు మీ స్నేహితురాలు మిమ్మల్ని చూసి చిరునవ్వు నవ్వకపోతే, అప్పుడు ఆమె మీపై కోపంగా ఉందని మీరు నిర్ధారణకు రావచ్చు. “ఆమె నాపై కోపంగా ఉంటే, ఆమె నన్ను చూసి చిరునవ్వు నవ్వదు” అనేది నిజం అయినప్పటికీ, “ఆమెకు తలనొప్పి ఎక్కువగా ఉంటే, ఆమె నన్ను చూసి నవ్వదు” అనేది కూడా నిజం కావచ్చు. మీ దైనందిన జీవితంలో మీరు నిర్ధారించిన కొన్ని ప్రవచనాలు అవి చెల్లుబాటు అయ్యేవా లేదా లోపభూయిష్టమైన తర్కంపై ఆధారపడి ఉన్నాయో లేదో ఎందుకు చూడకూడదు?

అభ్యాసం A1.2

1. నిగమన తార్కిక పద్ధతిని ఉపయోగించి దిగువవాటికి సమాధానం ఇవ్వండి.

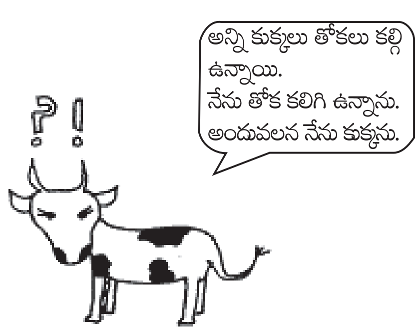
(i) మానవులు క్షీరదాలు. అన్ని క్షీరదాలు సకశేరుకాలు. ఈ రెండు ప్రకటనల ఆధారంగా, మానవుల గురించి మీరు ఏమి నిర్ధారించవచ్చు?

(ii) ఆంథోనీ ఒక మంగలి. దినేష్ జుట్టు కత్తిరించుకున్నాడు. ఆంటోనీ దినేష్ జుట్టును కత్తిరించాడని మీరు నిర్ధారించగలరా?

(iii) అంగారక గ్రహవాసులకు ఎర్రటి నాలుకలు ఉంటాయి. గులాగ్ ఒక అంగారకుడు. ఈ రెండు ప్రవచనాల ఆధారంగా, గులాగ్ గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

(iv) ఒక నిర్దిష్ట రోజులో నాలుగు గంటలకుపైగా వర్షం పడితే, మరుసటి రోజు మురికి కాలువలను శుభ్రం చేయాల్సి ఉంటుంది. ఈ రోజు 6 గంటల పాటు వర్షం కురిసింది. రేపు మురికి కాలువల పరిస్థితి గురించి మనం ఏమి నిర్ధారణకు రావచ్చు?

(v) దిగువ కార్టూన్‌లో ఆవు తార్కికతలో ఉన్న అపోహ ఏమిటి?



2. Once again you are given four cards. Each card has a number printed on one side and a letter on the other side. Which are the only two cards you need to turn over to check whether the following rule holds?

   "If a card has a consonant on one side, then it has an odd number on the other side."

A1.4 Theorems, Conjectures and Axioms

So far we have discussed statements and how to check their validity. In this section, you will study how to distinguish between the three different kinds of statements mathematics is built up from, namely, a theorem, a conjecture and an axiom.

You have already come across many theorems before. So, what is a theorem? A mathematical statement whose truth has been established (proved) is called a *theorem*. For example, the following statements are theorems, as you will see in Section A1.5.

Theorem A1.1 : *The sum of the interior angles of a triangle is* 180º.

Theorem A1.2 : *The product of two even natural numbers is even.*

Theorem A1.3 : *The product of any three consecutive even natural numbers is divisible by* 16.

A *conjecture* is a statement which we believe is true, based on our mathematical understanding and experience, that is, our mathematical intuition. The conjecture may turn out to be true or false. If we can prove it, then it becomes a theorem. Mathematicians often come up with conjectures by looking for patterns and making intelligent mathematical guesses. Let us look at some patterns and see what kind of intelligent guesses we can make.

Example 4 : Take any three consecutive even numbers and add them, say,

$2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$, $20 + 22 + 24 = 66$.

Is there any pattern you can guess in these sums? What can you conjecture about them?

Solution : One conjecture could be :

(i) the sum of three consecutive even numbers is even.

Another could be :

(ii) the sum of three consecutive even numbers is divisible by 6.

2. మరోసారి మీకు నాలుగు కార్డులు ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి కార్డుకు ఒక వైపున ఒక సంఖ్య మరియు మరొక వైపున ఒక అక్షరం ముద్రించబడి ఉంటుంది. “ఒక కార్డుకు ఒక వైపున హల్లు ఉన్నట్లయితే, దానికి మరొక వైపున బేసి సంఖ్య ఉంటుంది.” అనే నియమం సత్యమా కాదా నిరూపించడానికి ఏ రెండు కార్డులను త్రిప్పి చూడాలి?

“కార్డునకు ఒక వైపు హల్లు కలిగి ఉంటే అది రెండవ వైపు బేసి సంఖ్యను కలిగి ఉంటుంది.

B	3	U	8

A1.4 సిద్ధాంతాలు, పరికల్పనలు మరియు స్వీకృతాలు

మనం ఇప్పటివరకు ప్రవచనాలు మరియు వాటి యొక్క సత్య విలువలను ఎలా నిర్ణయించాలనే దాని గురించి చర్చించాం. ఈ విభాగంలో, ఒక సిద్ధాంతం, ఒక పరికల్పన మరియు స్వీకృతాల నుండి నిర్మించబడిన గణిత శాస్త్రంలో మూడు విభిన్న రకాల ప్రవచనాల మధ్య భేదంను ఎలా గుర్తించాలో మీరు నేర్చుకుంటారు.

మీరు ఇంతకు ముందు అనేక సిద్ధాంతాలను చూశారు. కాబట్టి, సిద్ధాంతం అంటే ఏమిటి? నిరూపణ చేయబడిన ఒక గణిత ప్రవచనంను సిద్ధాంతం అంటారు. ఉదాహరణకు, ఈ క్రింది ప్రవచనాలు సిద్ధాంతాలు, మీరు వీటిని సెక్షన్ A1.5. లో వివరంగా చూస్తారు.

సిద్ధాంతం A1.1 : *ఒక త్రిభుజం యొక్క అంతర్గత కోణాల మొత్తం 180^o.*

సిద్ధాంతం A1.2 : *రెండు సరి సహజసంఖ్యల లబ్ధం సరి సంఖ్య.*

సిద్ధాంతం A1.3 : *ఏవైనా మూడు వరుస సరి సహజ సంఖ్యల లబ్ధం 16తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.*

మన గణిత అవగాహన మరియు అనుభవం ఆధారంగా, అంటే మన గణిత అంతర్దృష్టి ఆధారంగా, మనం నిజమని నమ్మే ఒక ప్రవచనమే పరికల్పన. పరికల్పన అనేది సత్యం లేదా అసత్యం కావచ్చు. మనం దానిని నిరూపణ చేస్తే, అది ఒక సిద్ధాంతం అవుతుంది. గణిత శాస్త్రజ్ఞులు తరచుగా నమూనాలను వెతకడం ద్వారా మరియు తెలివైన గణిత అంచనాలు చేయడం ద్వారా పరికల్పనలతో ముందుకు వస్తారు. మనం ఇప్పుడు కొన్ని నమూనాలను పరిశీలిద్దాం మరియు మనం ఎలాంటి తెలివైన పరికల్పన చేయగలమో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : ఏవైనా మూడు వరుస సరిసంఖ్యలను తీసుకొని వాటిని కలపండి, ఉదాహరణకు,

$2 + 4 + 6 = 12,\ 4 + 6 + 8 = 18,\ 6 + 8 + 10 = 24,\ 8 +10 + 12 = 30,\ 20 + 22 + 24 = 66.$

ఈ మొత్తాల్లో మీరు ఊహించగల నమూనా ఏదైనా ఉందా? వాటి గురించి మీరు ఏమి ఊహించవచ్చు?

సాధన : ఒక పరికల్పన ఇలా ఉండవచ్చు.

(i) మూడు వరుస సరిసంఖ్యల మొత్తం సరిసంఖ్య అగును.

మరొకటి ఇలా ఉండవచ్చు:

(ii) మూడు వరుస సరిసంఖ్యల మొత్తం 6 తో నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది.

Example 5 : Consider the following pattern of numbers called the Pascal's Triangle:

Line		Sum of numbers
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

What can you conjecture about the sum of the numbers in Lines 7 and 8? What about the sum of the numbers in Line 21? Do you see a pattern? Make a guess about a formula for the sum of the numbers in line n.

Solution : Sum of the numbers in Line 7 $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

Sum of the numbers in Line 8 $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

Sum of the numbers in Line 21 $= 2^{20}$

Sum of the numbers in Line $n = 2^{n-1}$

Example 6 : Consider the so-called triangular numbers T_n:

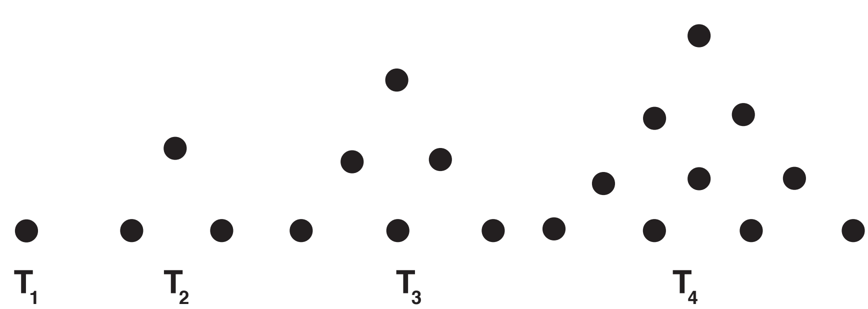


Fig. A1.1

The dots here are arranged in such a way that they form a triangle. Here $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, and so on. Can you guess what T_5 is? What about T_6? What about T_n?

ఉదాహరణ 5 : పాస్కల్ త్రిభుజం అని పిలువబడే సంఖ్యల యొక్క ఈ క్రింది నమూనాను పరిశీలించండి:

వరుస		సంఖ్యల మొత్తం
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

7 మరియు 8వ వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం గురించి మీరు ఏమి ఊహించగలరు? 21వ వరుసలో మొత్తం గురించి నువ్వు ఏమి అనుకున్నావు? మీరు ఈ నమూనా గమనించారా? n వ వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తంకు ఒక సూత్రాన్నిఇ ఊహించండి.

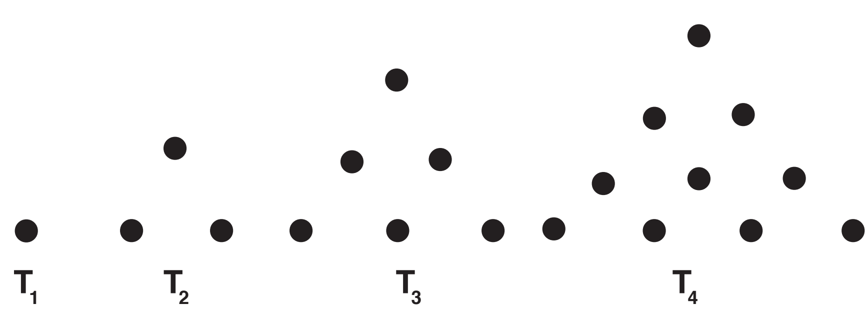
సాధన : 7వ వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8వ వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21వ వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం $= 2^{20}$

nవ వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం $= 2^{n-1}$

ఉదాహరణ 6 : త్రిభుజాకార సంఖ్యలు T_n అని పిలువబడే వాటిని పరిగణనలోకి తీసుకోండి:



పటం. A1.1

ఇక్కడ చుక్కలు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచే విధంగా అమర్చబడి ఉంటాయి. ఇక్కడ $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10$, మరియు మొదలైనవి. T_5 అంటే ఏమిటో ఊహించగలరా? T_6 గురించి ఏమిటి? T_n గురించి ఏమిటి?

Make a conjecture about T_n.

It might help if you redraw them in the following way.

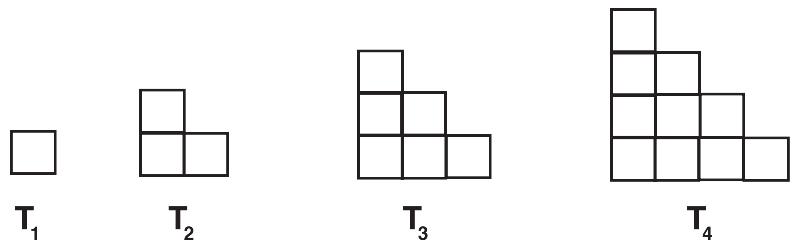


Fig. A1.2

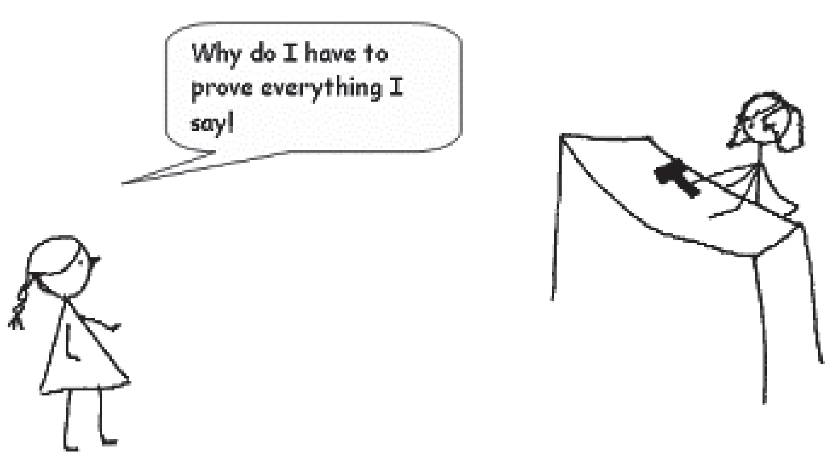
Solution : $T_5 = \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \dfrac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

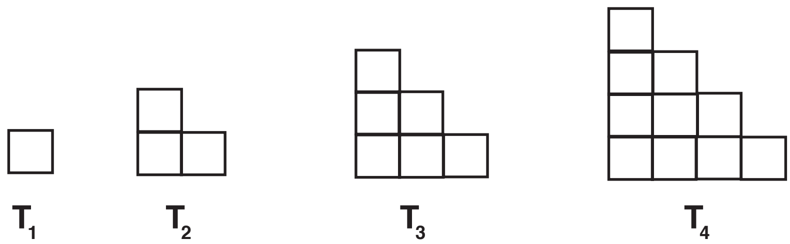
A favourite example of a conjecture that has been open (that is, it has not been proved to be true or false) is the Goldbach conjecture named after the mathematician Christian Goldbach (1690 – 1764). This conjecture states that "*every even integer greater than* 4 *can be expressed as the sum of two odd primes*." Perhaps you will prove that this result is either true or false, and will become famous!

You might have wondered – do we need to prove everything we encounter in mathematics, and if not, why not?



T_n గురించి ఒక పరికల్పన చేయండి.

పై వాటిని ఈ క్రింది విధంగా తిరిగి గీయడం వల్ల అవి మీకు పరిక్పనలో సహాయపడవచ్చు.



పటం. A1.2

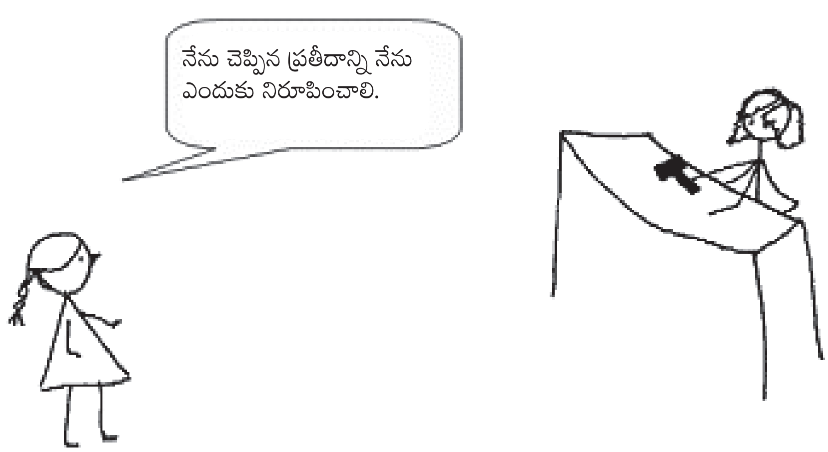
సాధన : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \dfrac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

ఒక పరికల్పన (అంటే, అది నిజమో, అబద్ధమో ఇప్పటివరకు నిరూపించబడలేదు) సరియైన ఉదాహరణ కోసం ఎదురు చూస్తుంది. గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు క్రిస్టియన్ గోల్డ్‌బ్యాక్ (1690 – 1764) పేరు మీద ఉన్న గోల్డ్‌బ్యాక్ పరికల్పన. "*4 కంటే ఎక్కువ ఉన్న ప్రతి సరిపూర్ణాంకాన్ని రెండు బేసి ప్రధానాంకాల మొత్తంగా వ్రాయవచ్చు*" అని ఈ పరికల్పన చెబుతోంది. బహుశా, ఈ ఫలితం సత్యమో, అసత్యమో అని మీరు నిరూపిస్తే, బాగా ప్రసిద్ధి చెందుతారు!

మీరు ఆశ్చర్యపోయి ఉండవచ్చు – గణితంలో మనం ఎదుర్కొనే ప్రతిదాన్ని మనం నిరూపించాల్సిన అవసరం ఉందా, మరియు కాకపోతే ఎందుకు కాదు?



The fact is that every area in mathematics is based on some statements which are assumed to be true and are not proved. These are 'self-evident truths' which we take to be true without proof. These statements are called *axioms*. In Chapter 5, you would have studied the axioms and postulates of Euclid. (We do not distinguish between axioms and postulates these days.)

For example, the first postulate of Euclid states:

A straight line may be drawn from any point to any other point.

And the third postulate states:

A circle may be drawn with any centre and any radius.

These statements appear to be perfectly true and Euclid assumed them to be true. Why? This is because we cannot prove everything and we need to start somewhere. We need some statements which we accept as true and then we can build up our knowledge using the rules of logic based on these axioms.

You might then wonder why we don't just accept all statements to be true when they appear self-evident. There are many reasons for this. Very often our intuition can be wrong, pictures or patterns can deceive and the only way to be sure that something is true is to prove it. For example, many of us believe that if a number is multiplied by another, the result will be larger than both the numbers. But we know that this is not always true: for example, $5 \times 0.2 = 1$, which is less than 5.

Also, look at the Fig. A1.3. Which line segment is longer, AB or CD?

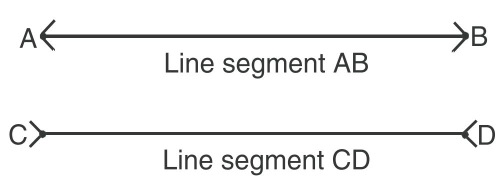


Fig. A1.3

It turns out that both are of exactly the same length, even though AB appears shorter!

You might wonder then, about the validity of axioms. Axioms have been chosen based on our intuition and what appears to be self-evident. Therefore, we expect them to be true. However, it is possible that later on we discover that a particular axiom is not true. What is a safeguard against this possibility? We take the following steps:

(i) Keep the axioms to the bare minimum. For instance, based on only axioms and five postulates of Euclid, we can derive hundreds of theorems.

వాస్తవం ఏమిటంటే, గణితంలో ప్రతీది కొన్ని ప్రవచనాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఇవి నిజమని భావించబడతాయి మరియు నిరూపించబడవు. ఇవి 'స్వీయ - నిర్దేశితమైన సత్యాలు', వీటిని రుజువు లేకుండా సత్యంగా మనం భావిస్తాం. ఈ ప్రవచనాలను స్వీకృతాలు అంటారు. 5 వ అధ్యాయంలో యూక్లిడ్ స్వీకృతాలను, ప్రతిపాదనలను మీరు అధ్యయనం చేసివుంటారు. (మనం ఈ రోజుల్లో స్వీకృతాలు (*axioms*) మరియు ప్రతిపాదనల (*postulates*) మధ్య తేడాను గుర్తించండి).

ఉదాహరణకు, యూక్లిడ్ యొక్క మొదటి స్వీకృతము ఇలా పేర్కొంది:

ఒక బిందువు నుంచి ఏదైనా ఇతర బిందువుకు ఒక సరళరేఖను గీయవచ్చు.

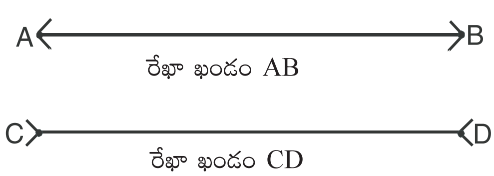
మరియు మూడవ స్వీకృతం ఇలా పేర్కొంది:

ఏదైనా కేంద్రం మరియు వ్యాసార్థాలతో ఒక వృత్తాన్ని గీయవచ్చు.

ఈ ప్రవచనాలు పూర్తిగా సత్యమైనవిగా కనిపిస్తాయి మరియు యూక్లిడ్ అవి సత్యమని భావించాడు. ఎందుకు? ఎందుకంటే మనం ప్రతిదీ నిరూపించలేం మరియు మనం ఎక్కడో ఒక చోట ప్రారంభించాలి. మనకు కొన్ని ప్రవచనాలు అవసరం, వాటిని మనం సత్యంగా అంగీకరిస్తాం మరియు తరువాత ఈ సూత్రీకరణల ఆధారంగా తార్కిక నియమాలను ఉపయోగించి మన జ్ఞానాన్ని పెంపొందించుకోవచ్చు.

అన్ని ప్రవచనాలు స్వీయ-నిర్దేశితంగా కనిపించినప్పుడు అవి సత్యమని మనం ఎందుకు అంగీకరించలేము అని మీరు ఆశ్చర్యపోవచ్చు. దీనికి అనేక కారణాలున్నాయి. చాలా తరచుగా మన అంతర భావన తప్పు కావచ్చు, చిత్రాలు లేదా నమూనాలు మోసగించగలవు మరియు ఏదో సత్యం అని నిర్ధారించుకోవడానికి ఏకైక మార్గం దానిని నిరూపించడం. ఉదాహరణకు, మనలో చాలామంది ఒక సంఖ్యను మరో సంఖ్యతో గుణిస్తే, ఆ ఫలితం ఆ రెండు సంఖ్యల కంటే పెద్దదిగా ఉంటుందని నమ్ముతారు. కానీ ఇది ఎల్లప్పుడూ సత్యం కాదని మనకు తెలుసు: ఉదాహరణకు, $5 \times 0.2 = 1$, ఇది 5 కంటే తక్కువ.

అలాగే, పటం. A1.3 చూడండి. AB లేదా CD , ఏ రేఖాఖండం పొడవుగా ఉంటుంది?



పటం. A1.3

AB పొట్టిగా కనిపించినప్పటికీ, రెండూ కూడా సరిగ్గా ఒకే పొడవుతో ఉన్నాయని తేలింది!

అప్పుడు మీరు స్వీకృతముల ప్రామాణికత గురించి ఆశ్చర్యపోవచ్చు. మన అంతర భావన మరియు స్వీయ-నిర్దేశితంగా కనిపించే వాటి ఆధారంగా స్వీకృతాలు ఎంచుకోబడ్డాయి. అందువల్ల, అవి నిజమని మనం ఆశిస్తున్నాం. ఏదేమైనా, ఒక నిర్దిష్ట స్వీకృతం నిజం కాదని తరువాత మనం కనుగొనే అవకాశం ఉంది. స్వీకృతాలు తయారుచేయునప్పుడు తీసుకోవాల్సిన జాగ్రత్తలు ఏమిటి? మనం ఈ క్రింది దశలను తీసుకుంటాం:

(i) స్వీకృతాలను కనిష్ట స్థాయిలో ఉంచండి. ఉదాహరణకు, యూక్లిడ్ యొక్క ఐదు స్వీకృతాలు మరియు ఐదు ప్రతిపాదనల ఆధారంగా, మనం వందలాది సిద్ధాంతాలను పొందవచ్చు.

(ii) Make sure the axioms are consistent.

We say a collection of axioms is *inconsistent,* if we can use one axiom to show that another axiom is not true. For example, consider the following two statements. We will show that they are inconsistent.

Statement1: No whole number is equal to its successor.

Statement 2: A whole number divided by zero is a whole number.

(Remember, **division by zero is not defined**. But just for the moment, we assume that it is possible, and see what happens.)

From Statement 2, we get $\frac{1}{0} = a$, where a is some whole number. This implies that, 1 = 0. But this disproves Statement 1, which states that no whole number is equal to its successor.

(iii) A false axiom will, sooner or later, result in a contradiction. We say that *there is a contradiction, when we find a statement such that, both the statement and its negation are true*. For example, consider Statement 1 and Statement 2 above once again.

From Statement 1, we can derive the result that $2 \neq 1$.

Now look at $x^2 - x^2$. We will factorise it in two different ways as follows:

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ and

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

So, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.

From Statement 2, we can cancel $(x - x)$ from both sides.

We get $x = 2x$, which in turn implies $2 = 1$.

So we have both the statement $2 \neq 1$ and its negation, $2 = 1$, true. This is a contradiction. The contradiction arose because of the false axiom, that a whole number divided by zero is a whole number.

So, the statements we choose as axioms require a lot of thought and insight. We must make sure they do not lead to inconsistencies or logical contradictions. Moreover, the choice of axioms themselves, sometimes leads us to new discoveries. From Chapter 5, you are familiar with Euclid's fifth postulate and the discoveries of non-Euclidean geometries. You saw that mathematicians believed that the fifth postulate need not be a postulate and is actually a theorem that can be proved using just the first four postulates. Amazingly these attempts led to the discovery of non-Euclidean geometries.

We end the section by recalling the differences between an axiom, a theorem and a conjecture. An **axiom** is a mathematical statement which is assumed to be true

(ii) స్వీకృతాలు స్థిరంగా(consistent) ఉన్నాయని ధృవీకరించుకోండి.
ఒక స్వీకృతాన్ని ఉపయోగించి మరొక స్వీకృతం సత్యం కాదని చూపితే, స్వీకృతాల సేకరణ అస్థిరంగా (inconsistent) ఉందని అంటాం. ఉదాహరణకు, ఈ క్రింది రెండు ప్రవచనాలను పరిశీలించండి. అవి అస్థిరంగా ఉన్నాయని మనం నిరూపిస్తాం.

ప్రవచనం1: ఏ పూర్ణాంకం దాని తరువాత వచ్చే దానికి సమానం కాదు.

ప్రవచనం2: ఏదైనా పూర్ణాంకంను సున్నాతో భాగిస్తే ఒక పూర్ణాంకం వస్తుంది.

(గుర్తుంచుకోండి, **సున్నాతో భాగించడం నిర్వచించబడలేదు**. కానీ ప్రస్తుతానికి, అది సాధ్యమని మనం భావిద్దాం, మరియు ఏమి జరుగుతుందో చూద్దాం.)

ప్రవచనం 2 నుంచి, మనం దీనిని $\frac{1}{0}=a$, ఇక్కడ a ఏదైనా ఒక పూర్ణాంకం. ఇది $1=0$ అని సూచిస్తుంది. కానీ ఇది ప్రవచనం1 అనగా ఏ పూర్ణాంకం, దాని తరువాత వచ్చే దానికి సమానం కాదు అనే దానికి విరుద్ధం.

(iii) ఒక అసత్య స్వీకృతం, వెంటనే లేదా తర్వాత ఒక విరుద్ధమైన భావనకు దారితీస్తుంది. ఒక ప్రవచనం మరియు దాని వ్యతిరేక ప్రవచనం రెండూ సత్యమే అయితే దానిని మనం విరుద్ధమైన భావన అంటాం. ఉదాహరణకు, పైన పేర్కొన్న ప్రవచనం 1 మరియు ప్రవచనం 2 లను మరోసారి పరిగణనలోకి తీసుకోండి.

ప్రవచనం 1 నుంచి, $2 \neq 1$ అనే ఫలితాన్ని మనం పొందవచ్చు.

ఇప్పుడు $x^2 - x^2$ చూడండి. మనం దానిని దిగువ పేర్కొన్నవిధంగా రెండు విభిన్న మార్గాల్లో కారణాంకాలుగా రాస్తాం:

(i) $x^2 - x^2 = x(x-x)$ మరియు

(ii) $x^2 - x^2 = (x+x)(x-x)$

కాబట్టి, $x(x-x) = (x+x)(x-x)$.

ప్రవచనం 2 నుండి, మనం రెండువైపుల నుండి $(x-x)$ ను కొట్టివేయవచ్చు.

మనకు $x = 2x$, వస్తుంది, ఇది $2 = 1$ని ఇస్తుంది.

కావున మనకు ప్రవచనం $2 \neq 1$ మరియు దాని వ్యతిరేక ప్రవచనం $2 = 1$ లు రెండూ సత్యం అగును. ఇది విరుద్ధం. ఏదైనా పూర్ణాంకంను సున్నాతో భాగిస్తే ఒక పూర్ణాంకం వస్తుంది అనే అసత్య స్వీకృతం కారణంగా ఈ విరుద్ధమైన భావన వచ్చింది.

కాబట్టి, స్వీకృతాలుగా మనం ఎన్నుకునే ప్రవచనాలకు చాలా ఆలోచన మరియు అంతర్దృష్టి అవసరం. అవి అస్థిరంగా లేదా తార్కిక విరుద్ధమైన భావనలకు దారి తీయకుండా మనం చూసుకోవాలి. అంతేకాకుండా, స్వయంగా స్వీకృతాలను ఎంపిక చేసుకోవడం కొన్నిసార్లు మనల్ని క్రొత్త ఆవిష్కరణల వైపు నడిపిస్తుంది. అధ్యాయం 5 నుండి, యూక్లిడ్ యొక్క ఐదవ స్వీకృతం మరియు యూక్లీడియన్ కాని జ్యామితి యొక్క ఆవిష్కరణల గురించి మీకు తెలుసు. గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ఐదవ స్వీకృతం ఒక స్వీకృతం కానవసరం లేదని మరియు వాస్తవానికి మొదటి నాలుగు స్వీకృతాలను ఉపయోగించి రుజువు చేయగల ఒక సిద్ధాంతం అని నమ్మారని మీరు చూశారు. ఆశ్చర్యకరంగా, ఈ ప్రయత్నాలు యూక్లీడియన్ కాని జ్యామితిలను కనుగొనడానికి దారితీశాయి.

ఒక స్వీకృతానికి, ఒక పరికల్పనకి, సిద్ధాంతమునకు మధ్య గల తేడాలను గుర్తు చేసుకోవడం ద్వారా మనం ఈ విభాగాన్ని ముగిస్తాం. **స్వీకృతం** అనేది నిరూపణ లేకుండానే సత్యంగా భావించే ఒక గణిత ప్రవచనం.

without proof; a **conjecture** is a mathematical statement whose truth or falsity is yet to be established; and a **theorem** is a mathematical statement whose truth has been logically established.

EXERCISE A1.3

1. Take any three consecutive even numbers and find their product; for example, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$, and so on. Make three conjectures about these products.
2. Go back to Pascal's triangle.

   Line 1 : 1 = 11^0

   Line 2 : 1 1 = 11^1

   Line 3 : 1 2 1 = 11^2

   Make a conjecture about Line 4 and Line 5. Does your conjecture hold? Does your conjecture hold for Line 6 too?
3. Let us look at the triangular numbers (see Fig.A1.2) again. Add two consecutive triangular numbers. For example, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$.

   What about $T_4 + T_5$? Make a conjecture about $T_{n-1} + T_n$.
4. Look at the following pattern:

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

   Make a conjecture about each of the following:

   $111111^2 =$

   $1111111^2 =$

   Check if your conjecture is true.
5. List five axioms (postulates) used in this book.

A1.5 What is a Mathematical Proof?

Let us now look at various aspects of proofs. We start with understanding the difference between verification and proof. Before you studied proofs in mathematics, you were mainly asked to verify statements.

For example, you might have been asked to verify with examples that "the product of two even numbers is even". So you might have picked up two random even numbers,

పరికల్పనలు అనేవి సత్యాలుగా భావిస్తూ ఇంత వరకు నిరూపించబడని గణిత ప్రవచనాలు. **సిద్ధాంతాలు** అనేవి నిరూపించబడిన గణిత ప్రవచనాలు.

అభ్యాసం A1.3

1. ఏవైనా మూడు వరస సరి సంఖ్యలను తీసుకోండి మరియు వాటి లబ్ధాన్ని కనుగొనండి; ఉదాహరణకు, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ మొదలైనవి. ఈ లబ్ధాల గురించి మూడు పరికల్పనలు చేయండి.

2. పాస్కల్ యొక్క త్రిభుజాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

వరుస 1 : $1 = 11^0$

వరుస 2 : $1 \quad 1 = 11^1$

వరుస 3 : $1 \quad 2 \quad 1 = 11^2$

వరుస 4 మరియు వరుస 5 గురించి ఒక పరికల్పన చేయండి. మీ పరికల్పన సమర్ధనీయమా? మీ పరికల్పన వరుస 6 కు కూడా అన్వయించబడుతుందా?

3. త్రిభుజాకార సంఖ్యలను (పటం. A1.2) మళ్ళీ చూద్దాం. రెండు వరస త్రిభుజాకార సంఖ్యలను కలపండి. ఉదాహరణకు, $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$.

$T_4 + T_5$ విలువ ఏమిటి? $T_{n-1} + T_n$ గురించి ఒక పరికల్పన రాయండి.

4. దిగువ నమూనాను గమనించండి:

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

ఈ క్రిందివాటిలో ప్రతి దాని గురించి ఒక పరికల్పన చేయండి:

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

మీ పరికల్పన నిజమో కాదో సరిచూడండి.

5. ఈ పుస్తకంలో ఉపయోగించిన 5 స్వీకృతాల జాబితా రాయండి.

A1.5 గణిత నిరూపణ అంటే ఏమిటి?

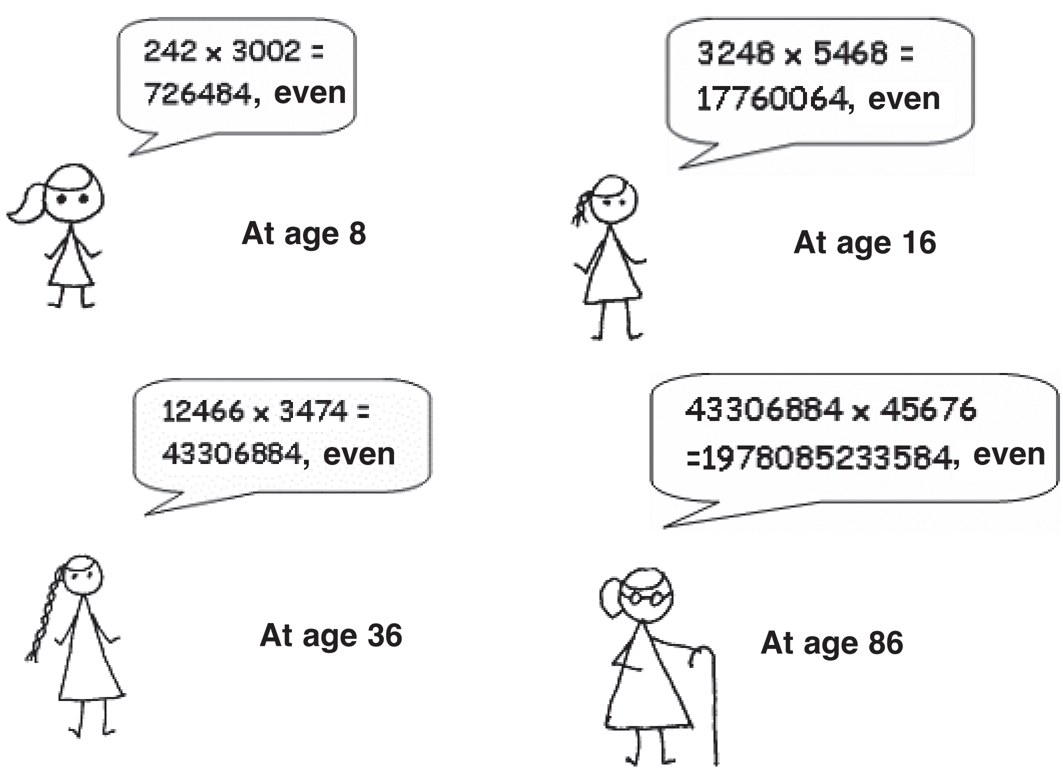
నిరూపణల యొక్క వివిధ అంశాలను మనం ఇప్పుడు చూద్దాం. దీనిని మనం ధృవీకరణ (verification) మరియు నిరూపణ (proof)ల మధ్య వ్యత్యాసాన్ని అర్థం చేసుకోవడం ద్వారా ప్రారంభిస్తాం. మీరు గణితంలో ప్రవచనాలకు నిరూపణలను అధ్యయనం చేయడానికి ముందు ప్రవచనాలను సరిచూస్తారు.

ఉదాహరణకు, "రెండు సరిసంఖ్యల యొక్క లబ్ధం సరిసంఖ్య" అని ఉదాహరణలతో ధృవీకరించమని మిమ్మల్ని అడిగి ఉండవచ్చు. అందువల్ల మీరు రెండు యాదృచ్ఛిక సరిసంఖ్యలను తీసుకొని ఉండవచ్చు,

say 24 and 2006, and checked that 24 × 2006 = 48144 is even. You might have done so for many more examples.

Also, you might have been asked as an activity to draw several triangles in the class and compute the sum of their interior angles. Apart from errors due to measurement, you would have found that the interior angles of a triangle add up to 180°.

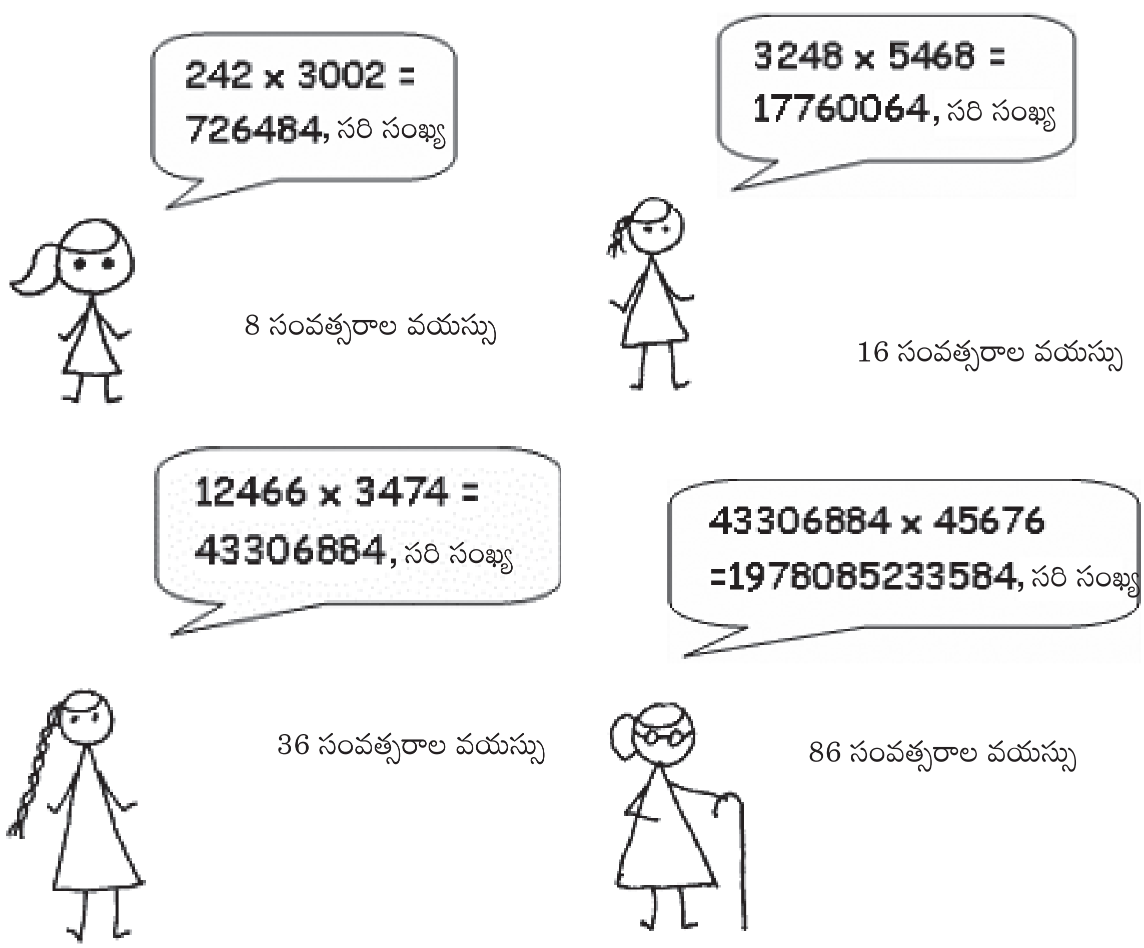
What is the flaw in this method? There are several problems with the process of verification. While it may help you to make a statement you believe is true, you cannot be *sure* that it is true in *all* cases. For example, the multiplication of several pairs of even numbers may lead us to guess that the product of two even numbers is even. However, it does not ensure that the product of all pairs of even numbers is even. You cannot physically check the products of all possible pairs of even numbers. If you did, then like the girl in the cartoon, you will be calculating the products of even numbers for the rest of your life. Similarly, there may be some triangles which you have not yet drawn whose interior angles do not add up to 180°. We cannot measure the interior angles of all possible triangles.



వాటిని 24 మరియు 2006 అనుకుందాం, మరియు $24 \times 2006 = 48144$ సరి సంఖ్య అని సరిచూడదమైనది. ఇలా మీరు మరెన్నో ఉదాహరణలతో సరిచూడవచ్చు.

అదేవిధంగా, తరగతి గదిలో అనేక త్రిభుజాలను గీసి మరియు వాటి అంతర కోణాల మొత్తాన్ని లెక్కించమని అడగవచ్చు. కొలతలలో దోషాలు చూడకుంటే, ఒక త్రిభుజం యొక్క అంతర్గత కోణాలు మొత్తం 180° వరకు వుంటాయని మీరు కనుగొంటారు.

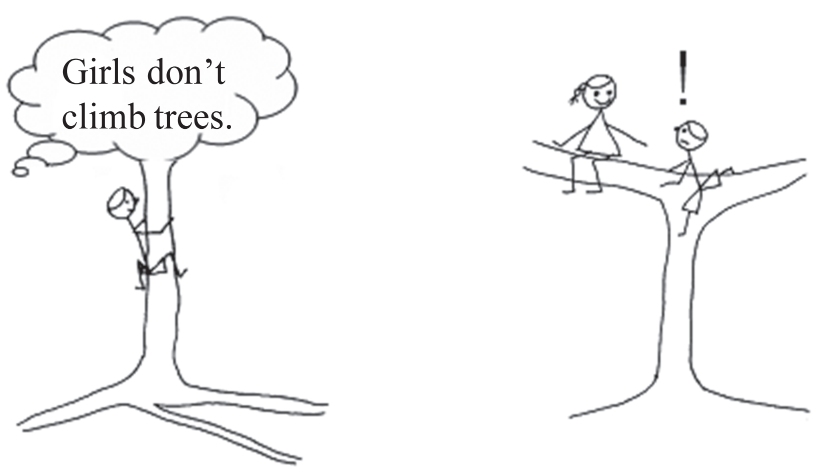
ఈ పద్ధతిలో లోపం ఏమిటి? ధృవీకరణ(verification) ప్రక్రియలో అనేక సమస్యలు ఉన్నాయి. ఇది నిజమని మీరు విశ్వసించే ప్రవచనం వ్రాయడంలో మీకు సహాయపడవచ్చు, అయితే ఇది అన్ని సందర్భాలలో సత్యమని మీరు ఖచ్చితంగా చెప్పలేరు. ఉదాహరణకు, అనేక జతల సరిసంఖ్యల గుణకారం రెండు సరిసంఖ్యల లబ్ధం సరి అని ఊహించడానికి దారితీస్తుంది. అయితే, ఇది సరిసంఖ్యల యొక్క అన్ని జతల లబ్ధం సరిఅని నిర్ధారించదు. మీరు సాధ్యమయ్యే అన్ని జతల సరిసంఖ్యల లబ్ధాలను భౌతికంగా తనిఖీ చేయలేరు. మీరు అలాచేస్తే, కార్టూన్‌లోని అమ్మాయిలాగా, మీరు మీ జీవితాంతం సరిసంఖ్యల లబ్ధాలను లెక్కిస్తారు. అదే విధంగా, మీరు ఇంకా గీయని కొన్ని త్రిభుజాలు ఉండవచ్చు, వాటి అంతర్గత కోణాల మొత్తం 180°. వరకు వుండకపోవచ్చు. సాధ్యమయ్యే అన్ని త్రిభుజాల అంతర్గత కోణాలను మనం కొలవలేం.



Moreover, verification can often be misleading. For example, we might be tempted to conclude from Pascal's triangle (Q.2 of Exercise A1.3), based on earlier verifications, that $11^5 = 15101051$. But in fact $11^5 = 161051$.

So, you need another approach that does not depend upon verification for some cases only. There is another approach, namely 'proving a statement'. A process which can establish the truth of a mathematical statement based purely on logical arguments is called a *mathematical proof*.

In Example 2 of Section A1.2, you saw that to establish that a mathematical statement is false, it is enough to produce a single counter-example. So while it is not enough to establish the validity of a mathematical statement by checking or verifying it for thousands of cases, it is enough to produce one counter-example to *disprove* a statement (i.e., to show that something is false). This point is worth emphasising.



To show that a mathematical statement is false, it is enough to find a single counter-example.

So, $7 + 5 = 12$ is a counter-example to the statement that the sum of two odd numbers is odd.

Let us now look at the list of basic ingredients in a proof:

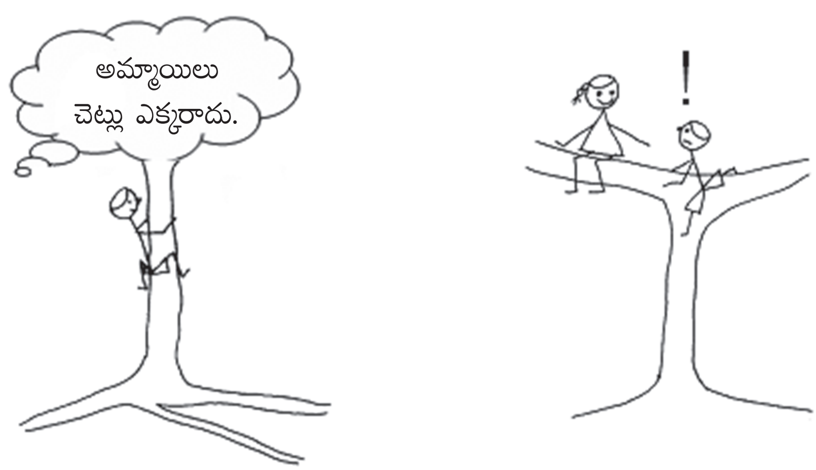
(i) To prove a theorem, we should have a rough idea as to how to proceed.

(ii) The information already given to us in a theorem (i.e., the hypothesis) has to be clearly understood and used.

అంతేకాక, ధృవీకరణ తరచుగా తప్పుదోవ పట్టించే విధంగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, పాస్కల్ త్రిభుజం (అభ్యాసము A1.3, Q.2) నుండి, మునుపటి ధృవీకరణల ఆధారంగా, $11^5 = 15101051$. అని మనం తొందరపడి వ్రాయవచ్చు. కానీ వాస్తవానికి $11^5 = 161051$ అవుతుంది.

అందువల్ల, కొన్ని సందర్భాలకు సరిచూచుటపై ఆధారపడని మరో మార్గం మీకు అవసరం అవుతుంది. ఆ మరో విధానమే 'ఒక ప్రవచనంను నిరూపణ చేయడం'. ఒక గణిత ప్రవచనం యొక్క సత్యాన్ని కేవలం తార్కిక వాదనల ఆధారంగా నిర్ధారించగల ప్రక్రియను *గణిత నిరూపణ* అని అంటారు.

సెక్షన్ A1.2 యొక్క ఉదాహరణ 2 లో, ఒక గణిత ప్రవచనం అసత్యమని నిర్ధారించడానికి, ఒక ప్రత్యుదాహరణ ఇస్తే సరిపోతుందని మీరు చూశారు. కాబట్టి, ఒక గణిత ప్రవచనం యొక్క ప్రామాణికతను వేల సంఖ్యలో వివిధ సందర్భాలకు తనిఖీ చేయడం లేదా ధృవీకరించడం ద్వారా దాని చెల్లుబాటును నిర్ణయించలేక పోయినప్పటికీ, ఒక ప్రవచనంను *అసత్యం* అని నిరూపించడానికి ఒక ప్రత్యుదాహరణను ఇస్తే సరిపోతుంది. ఈ అంశాన్ని నొక్కి చెప్పాల్సిన అవసరం ఉంది.



ఒక గణిత ప్రవచనం అసత్యమని చూపడానికి, ఒకే ఒక ప్రత్యుదాహరణను కనుగొంటే సరిపోతుంది.

అందువల్ల, 7 + 5 = 12 అనేది రెండు బేసి సంఖ్యల యొక్క మొత్తం బేసిసంఖ్య అనే ప్రవచనంకు ఒక ప్రత్యుదాహరణ .

ఇప్పుడు మనం ఒక గణిత నిరూపణకు కావలిసిన ప్రాథమిక అంశాల జాబితాను చూద్దాం:

(i) ఒక సిద్ధాంతాన్ని ఎలా నిరూపణ చేయాలో మనకు ప్రాథమిక (rough) ఆలోచన ఉండాలి.

(ii) ఒక సిద్ధాంతంలో మనకు ముందే ఇవ్వబడిన సమాచారం (అంటే, దత్తాంశం)ను స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవాలి మరియు నిరూపణలో ఉపయోగించాలి.

For example, in Theorem A1.2, which states that the product of two even numbers is even, we are given two even natural numbers. So, we should use their properties. In the Factor Theorem (in Chapter 2), you are given a polynomial $p(x)$ and are told that $p(a) = 0$. You have to use this to show that $(x - a)$ is a factor of $p(x)$. Similarly, for the converse of the Factor Theorem, you are given that $(x - a)$ is a factor of $p(x)$, and you have to use this hypothesis to prove that $p(a) = 0$.

You can also use constructions during the process of proving a theorem. For example, to prove that the sum of the angles of a triangle is 180°, we draw a line parallel to one of the sides through the vertex opposite to the side, and use properties of parallel lines.

(iii) A proof is made up of a successive sequence of mathematical statements. Each statement in a proof is logically deduced from a previous statement in the proof, or from a theorem proved earlier, or an axiom, or our hypothesis.

(iv) The conclusion of a sequence of mathematically true statements laid out in a logically correct order should be what we wanted to prove, that is, what the theorem claims.

To understand these ingredients, we will analyse Theorem A1.1 and its proof. You have already studied this theorem in Chapter 6. But first, a few comments on proofs in geometry. We often resort to diagrams to help us prove theorems, and this is very important. However, each statement in the proof has to be established **using only logic**. Very often, we hear students make statements like "Those two angles are equal because in the drawing they look equal" or "that angle must be 90^0, because the two lines look as if they are perpendicular to each other". Beware of being deceived by what you see (remember Fig A1.3)! .

So now let us go to Theorem A1.1.

Theorem A1.1 : *The sum of the interior angles of a triangle is* 180°.

Proof : Consider a triangle ABC (see Fig. A1.4).

We have to prove that $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ (1)

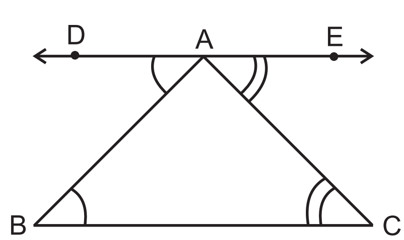


Fig A 1.4

ఉదాహరణకు, రెండు సరిసంఖ్యల లబ్ధం సరిసంఖ్య అని చెప్పే సిద్ధాంతం A1.2 లో , మనకు రెండు సరి సహజ సంఖ్యలు ఇవ్వబడ్డాయి. కాబట్టి, మనం వాటి ధర్మాలను ఉపయోగించి దీనిని నిరూపించాలి. కారణాంక సిద్ధాంతం(అధ్యాయం 2) లో, మీకు ఒక బహుపది $p(x)$ ఇవ్వబడింది మరియు $p(a) = 0$ అని చెప్పబడింది. $(x - a)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అని చూపించడం కొరకు మీరు దీనిని ఉపయోగించాల్సి ఉంటుంది. అదేవిధంగా, కారణాంక సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయానికి సంబంధించి, $(x - a)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అని మీకు ఇవ్వబడింది, మరియు $p(a) = 0$ అని నిరూపణ చేయడానికి మీరు ఈ దత్తాంశంను ఉపయోగించాల్సి ఉంటుంది.

ఒక సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించే ప్రక్రియలో మీరు నిర్మాణాలను కూడా ఉపయోగించవచ్చు. ఉదాహరణకు, ఒక త్రిభుజం యొక్క కోణాల మొత్తం $180°$ అని నిరూపణ చేయడం కొరకు, మనం భుజానికి ఎదురుగా ఉండే శీర్షం గుండా ఒక భుజానికి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీస్తాం మరియు సమాంతర రేఖల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తాం.

(iii) ఒక నిరూపణ అనేది గణిత ప్రవచనాల యొక్క వరుస క్రమంతో రూపొందించబడింది. నిరూపణలోని ప్రతి ప్రవచనం, తార్కికంగా నిరూపణలోని ముందు ప్రవచనం నుండి లేదా ఇంతకు ముందు నిరూపణ చేయబడిన ఒక సిద్ధాంతము నుండి లేదా ఒక స్వీకృతము నుండి లేదా మన దత్తాంశం నుండి గ్రహించబడుతుంది.

(iv) మనం నిరూపించాలనుకున్నది అంటే సిద్ధాంతం ఏమి చెబుతుందో అది తార్కికంగా సరైన క్రమంలో గణితశాస్త్ర పరంగా నిర్దేశించిన సత్యమైన ప్రవచనాల వరుసగా వుండాలి.

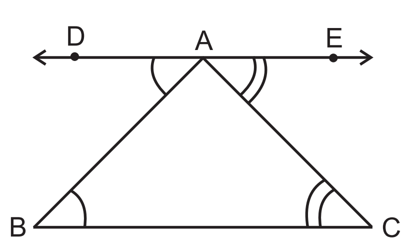
ఈ విషయాలను అర్థం చేసుకోవడానికి, మనం సిద్ధాంతం A1.1 మరియు దాని నిరూపణను విశ్లేషిస్తాం. ఈ సిద్ధాంతాన్ని మీరు ఇప్పటికే 6వ అధ్యాయంలో అధ్యయనం చేశారు. కానీ మొదట, జ్యామితిలో నిరూపణలపై కొన్ని వ్యాఖ్యలు, సిద్ధాంతాలను నిరూపించడంలో మనకు తరచుగా పటాలు సహాయపడతాయి మరియు ఇది చాలా ముఖ్యమైన విషయం. అయితే, నిరూపణలోని ప్రతి ప్రవచనంను కేవలం **తర్కంను ఉపయోగించి** వ్రాయాల్సి ఉంటుంది. చాలా తరచుగా, విద్యార్థులు "ఆ రెండు కోణాలు సమానం అంటారు. ఎందుకంటే గీసినపుడు సమానంగా కనిపిస్తున్నాయి" లేదా "ఆ కోణం తప్పనిసరిగా $90°$ ఉండాలి, ఎందుకంటే రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉన్నట్లుగా కనిపిస్తున్నాయి". మీరు కనబడేదాన్ని చూసి మోసపోవటం గురించి జాగ్రత్తగా ఉండండి (పటం A1.3 గుర్తుకుతెచ్చుకోండి)!

కాబట్టి, ఇప్పుడు మనం సిద్ధాంతం A1.1కు వెళ్దాం.

సిద్ధాంతం A1.1 : *ఒక త్రిభుజం యొక్క అంతర కోణాల మొత్తం* $180°$.

ఋజువు : ABC అనే త్రిభుజాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకుందాం (పటం A1.4 చూడండి).

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ అని మనం నిరూపణ చేయాలి. (1)



పటం A 1.4

Construct a line DE parallel to BC passing through A. (2)

DE is parallel to BC and AB is a transversal.

So, $\angle$ DAB and $\angle$ ABC are alternate angles. Therefore, by Theorem 6.2, Chapter 6, they are equal, i.e. $\angle \text{DAB} = \angle \text{ABC}$ (3)

Similarly, $\angle \text{CAE} = \angle \text{ACB}$ (4)

Therefore, $\angle \text{ABC} + \angle \text{BAC} + \angle \text{ACB} = \angle \text{DAB} + \angle \text{BAC} + \angle \text{CAE}$ (5)

But $\angle \text{DAB} + \angle \text{BAC} + \angle \text{CAE} = 180°$, since they form a straight angle. (6)

Hence, $\angle \text{ABC} + \angle \text{BAC} + \angle \text{ACB} = 180°$. (7)

Now, we comment on each step of the proof.

Step 1 : Our theorem is concerned with a property of triangles, so we begin with a triangle.

Step 2 : This is the key idea – the intuitive leap or understanding of how to proceed so as to be able to prove the theorem. Very often geometric proofs require a construction.

Steps 3 and 4 : Here we conclude that $\angle \text{DAE} = \angle \text{ABC}$ and $\angle \text{CAE} = \angle \text{ACB}$, by using the fact that DE is parallel to BC (our construction), and the previously proved Theorem 6.2, which states that if two parallel lines are intersected by a transversal, then the alternate angles are equal.

Step 5 : Here we use Euclid's axiom (see Chapter 5) which states that: "If equals are added to equals, the wholes are equal" to deduce

$$\angle \text{ABC} + \angle \text{BAC} + \angle \text{ACB} = \angle \text{DAB} + \angle \text{BAC} + \angle \text{CAE}.$$

That is, the sum of the interior angles of the triangle are equal to the sum of the angles on a straight line.

Step 6 : Here we use the Linear pair axiom of Chapter 6, which states that the angles on a straight line add up to 180°, to show that $\angle \text{DAB} + \angle \text{BAC} + \angle \text{CAE} = 180°$.

Step 7 : We use Euclid's axiom which states that "things which are equal to the same thing are equal to each other" to conclude that $\angle \text{ABC} + \angle \text{BAC} + \angle \text{ACB} = \angle \text{DAB} + \angle \text{BAC} + \angle \text{CAE} = 180°$. Notice that Step 7 is the claim made in the theorem we set out to prove.

We now prove Theorems A1.2 and A1.3 without analysing them.

Theorem A1.2 : *The product of two even natural numbers is even.*

Proof : Let x and y be any two even natural numbers.

We want to prove that xy is even.

A గుండా BC కి సమాంతరంగా DE రేఖను నిర్మించండి. (2)

DE అనేది BCకి సమాంతరంగా ఉంటుంది మరియు AB అనేది తిర్యగ్రేఖ.

కాబట్టి, $\angle DAB$ మరియు $\angle ABC$ అనేవి ఏకాంతర కోణాలు. అందువల్ల, సిద్ధాంతం 6.2, అధ్యాయం 6 ద్వారా, అవి సమానం, అంటే $\angle DAB = \angle ABC$ (3)

అదేవిధంగా, $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

అందువల్ల, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

కానీ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$, ఎందుకంటే అవి ఒక సరళకోణాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. (6)

అందువల్ల, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$. (7)

ఇప్పుడు, నిరూపణ యొక్క ప్రతి సోపానంపై మనం వ్యాఖ్యానిస్తాం.

సోపానం 1: మన సిద్ధాంతం త్రిభుజాల ధర్మానికి సంబంధించినది, కాబట్టి మనం త్రిభుజంతో ప్రారంభిస్తాం.

సోపానం 2: ఇది కీలకమైన ఆలోచన – సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించగలిగేలా ఎలా కొనసాగించాలో సహజమైన అవగాహనతో వుండాలి. చాలా తరచుగా జ్యామితీయ నిరూపణలకు నిర్మాణం అవసరం.

సోపానాలు 3 మరియు 4: ఇక్కడ మనం DE అనేది BCకు సమాంతరంగా (మన నిర్మాణం) ఉన్నదనే వాస్తవాన్ని ఉపయోగించడం ద్వారా $\angle DAE = \angle ABC$ మరియు $\angle CAE = \angle ACB$ లను పొందవచ్చు మరియు రెండు సమాంతర రేఖలు, ఒక తిర్యగ్రేఖచే ఖండించబడినట్లయితే, అప్పుడు ఏర్పడే ఏకాంతర కోణాలు సమానం అనే ఇంతకు ముందు నిరూపణ చేయబడ్డ సిద్ధాంతం 6.2, ద్వారా చెప్పవచ్చును.

సోపానం 5: "సమానాలను సమాన విలువలను జోడిస్తే, ఏర్పడే మొత్తాలు సమానం" అనే యూక్లిడ్ యొక్క స్వీకృతాన్ని (అధ్యాయం 5 చూడండి) ఉపయోగించి

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ గా వ్రాయవచ్చు.

అనగా, త్రిభుజం యొక్క అంతర కోణాల మొత్తం, ఒక సరళరేఖపై ఉన్న కోణాల మొత్తానికి సమానం.

సోపానం 6: మనం ఇక్కడ సరళరేఖపైఒక బిందువు వద్ద కోణాల మొత్తం 180°అనే అధ్యాయం 6లోని రేఖీయద్వయం స్వీకృతంను ఉపయోగించి $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$గా వ్రాసాం.

సోపానం 7: $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ అని వ్రాయడానికి "ఏదైనా ఒకదానికి సమానమైన రెండు అంశాలు ఒకదానికొకటి సమానం" అని పేర్కొన్న యూక్లిడ్ యొక్క స్వీకృతంను మనం ఉపయోగిస్తాం. మనం నిరూపించడానికి ఏర్పాటు చేసిన సిద్ధాంతంలో సోపానం7 అనేది నిర్దిష్ట ప్రవచనం అని గమనించండి.

ఇప్పుడు మనం సిద్ధాంతాలను A1.2 మరియు A1.3 లను విశ్లేషించకుండానే వాటిని రుజువు చేస్తాం.

సిద్ధాంతం A1.2 : *రెండు సరి సహజ సంఖ్యల లబ్ధం ఒక సరిసంఖ్య.*

రుజువు : x మరియు y లు ఏవైనా రెండు సరి సహజ సంఖ్యలు అనుకుందాం.

xy అనేది సరిసంఖ్య అని మనం నిరూపణ చేయాలి.

Since x and y are even, they are divisible by 2 and can be expressed in the form

$x = 2m$, for some natural number m and $y = 2n$, for some natural number n.

Then $xy = 4\,mn$. Since $4\,mn$ is divisible by 2, so is xy.

Therefore, xy is even.

Theorem A1.3 : *The product of any three consecutive even natural numbers is divisible by 16.*

Proof : Any three consecutive even numbers will be of the form $2n$, $2n + 2$ and $2n + 4$, for some natural number n. We need to prove that their product $2n(2n + 2)(2n + 4)$ is divisible by 16.

Now, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$.

Now we have two cases. Either n is even or odd. Let us examine each case.

Suppose n is even : Then we can write $n = 2m$, for some natural number m.

And, then $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$.

Therefore, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ is divisible by 16.

Next, suppose n is odd. Then $n + 1$ is even and we can write $n + 1 = 2r$, for some natural number r.

We then have :
$$\begin{aligned} 2n(2n + 2)(2n + 4) &= 8n(n + 1)(n + 2) \\ &= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1) \\ &= 16r(2r - 1)(2r + 1) \end{aligned}$$

Therefore, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ is divisible by 16.

So, in both cases we have shown that the product of any three consecutive even numbers is divisible by 16.

We conclude this chapter with a few remarks on the difference between how mathematicians discover results and how formal rigorous proofs are written down. As mentioned above, each proof has a key intuitive idea (sometimes more than one). Intuition is central to a mathematician's way of thinking and discovering results. Very often the proof of a theorem comes to a mathematician all jumbled up. A mathematician will often experiment with several routes of thought, and logic, and examples, before she/he can hit upon the correct solution or proof. It is only after the creative phase subsides that all the arguments are gathered together to form a proper proof.

It is worth mentioning here that the great Indian mathematician Srinivasa Ramanujan used very high levels of intuition to arrive at many of his statements, which

x మరియు y లు సరిసంఖ్యలు. కనుక, అవి 2 చే భాగించబడతాయి మరియు వాటిని ఏదైనా సహజ సంఖ్య m కు $x = 2m$, మరియు ఏదైనా సహజ సంఖ్య n కు $y = 2n$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు.

అప్పుడు $xy = 4\,mn$ అనేది 2 తో భాగించబడుతుంది కనుక, xy కూడా 2 తో భాగింపబడుతుంది .

అందువల్ల, xy అనేది సరిసంఖ్య అగును.

సిద్ధాంతం A1.3 : *ఏవైనా మూడు వరుస సరి సహజ సంఖ్యల లబ్ధం 16తో భాగింపబడుతుంది.*

రుజువు : ఏదైనా సహజ సంఖ్య n కు, ఏవైనా మూడు వరుస సరిసహజ సంఖ్యలు $2n, 2n + 2$ మరియు $2n + 4$, రూపంలో ఉంటాయి. వాటి లబ్ధం $2n(2n + 2)(2n + 4)$ అనేది 16తో భాగింపబడుతుందని మనం నిరూపణ చేయాల్సి ఉంటుంది.

ఇప్పుడు, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2).$

ఇప్పుడు మనకు రెండు సందర్భాలు ఉన్నాయి. n అనేది సరి లేదా బేసి. మనం ఇప్పుడు ప్రతి సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం.

n అనేది సరిసంఖ్య అనుకుందాం: అప్పుడు మనం ఏదైనా సహజ సంఖ్య m కు $n = 2m$ అని వ్రాయవచ్చు.

మరియు, అప్పుడు $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2).$

అందువల్ల, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ అనేది 16తో భాగింపబడుతుంది.

తరువాత, n అనేది బేసి అనుకుందాం. అప్పుడు $n+1$ అనేది సరి మరియు ఏదైనా సహజ సంఖ్య r కు మనం $n+1=2r$ అని వ్రాయవచ్చు.

అప్పుడు మనకు : $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$

$$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$$

అందువల్ల, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ అనేది 16తో భాగింపబడుతుంది.

కాబట్టి, రెండు సందర్భాల్లోనూ ఏవైనా మూడు వరుస సరి సంఖ్యల లబ్ధం 16 తో భాగింపబడుతుందని మనం నిరూపించాం.

గణితశాస్త్రజ్ఞులు ఫలితాలను ఎలా కనుగొంటారు మరియు లాంఛనప్రాయమైన కఠినమైన నిరూపణలు ఎలా రాయబడతాయనే దాని మధ్య వ్యత్యాసంపై కొన్ని వ్యాఖ్యానాలతో ఈ అధ్యాయాన్ని ముగిస్తాం. పైన పేర్కొన్నట్లుగా, ప్రతి నిరూపణకు కీలక సహజసిద్ధమైన ఆలోచన (కొన్నిసార్లు ఒకటి కంటే ఎక్కువ) ఉంటుంది. ఒక గణిత శాస్త్రజ్ఞుని ఆలోచనా విధానానికి మరియు ఫలితాలను కనుగొనే విధానానికి అంతర్దృష్టి కేంద్ర బిందువు అగును. చాలా తరచుగా ఒక సిద్ధాంతం యొక్క నిరూపణ ఒక గణిత శాస్త్రజ్ఞుడికి వస్తుంది. ఒక గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు తరచుగా ఆమె/అతను సరైన పరిష్కారం లేదా నిరూపణను రాయడానికి ముందు అనేక ఆలోచనా మార్గాలు మరియు తర్కం మరియు ఉదాహరణలతో ప్రయోగాలు చేస్తాడు. సృజనాత్మక దశ తగ్గిన తరువాత మాత్రమే అన్ని వాదనలు ఒకచోట చేరి సరైన నిరూపణను ఏర్పరుస్తాయి.

గొప్ప భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు శ్రీనివాస రామానుజన్ తన అనేక సత్యములని పేర్కొన్న ప్రవచనాలను స్పష్టంగా తెలుసుకోవడానికి చాలా ఉన్నత స్థాయి అంతర్దృష్టిని ఉపయోగించాడని ఇక్కడ పేర్కొనదగింది.

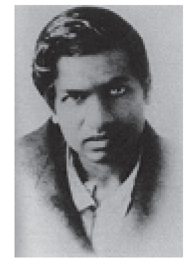
he claimed were true. Many of these have turned out be true and are well known theorems. However, even to this day mathematicians all over the world are struggling to prove (or disprove) some of his claims (conjectures).

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)
Fig. A1.5

EXERCISE A1.4

1. Find counter-examples to disprove the following statements:
   (i) If the corresponding angles in two triangles are equal, then the triangles are congruent.
   (ii) A quadrilateral with all sides equal is a square.
   (iii) A quadrilateral with all angles equal is a square.
   (iv) For integers a and b, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
   (v) $2n^2 + 11$ is a prime for all whole numbers n.
   (vi) $n^2 - n + 41$ is a prime for all positive integers n.
2. Take your favourite proof and analyse it step-by-step along the lines discussed in Section A1.5 (what is given, what has been proved, what theorems and axioms have been used, and so on).
3. Prove that the sum of two odd numbers is even.
4. Prove that the product of two odd numbers is odd.
5. Prove that the sum of three consecutive even numbers is divisible by 6.
6. Prove that infinitely many points lie on the line whose equation is $y = 2x$.
   (*Hint* : Consider the point $(n, 2n)$ for any integer n.)
7. You must have had a friend who must have told you to think of a number and do various things to it, and then without knowing your original number, telling you what number you ended up with. Here are two examples. Examine why they work.
   (i) Choose a number. Double it. Add nine. Add your original number. Divide by three. Add four. Subtract your original number. Your result is seven.
   (ii) Write down any three-digit number (for example, 425). Make a six-digit number by repeating these digits in the same order (425425). Your new number is divisible by 7, 11 and 13.

వీటిలో అనేకం సత్యమని తేలింది మరియు బాగా తెలిసిన సిద్ధాంతాలు. ఏదేమైనా, ఈ రోజు వరకు ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఉన్న గణిత శాస్త్రజ్ఞులు అతని వాదనలలో కొన్ని పరికల్పనలను నిరూపించడానికి (లేదా ఖండించడానికి) చాలా కష్టపడుతున్నారు.



శ్రీనివాస రామానుజన్

(1887–1920)

పటం. A1.5

అభ్యాసం A1.4

1. దిగువ ప్రవచనాలు అసత్యములని చూపడానికి ఒక ప్రత్యుదాహరణను కనుగొనండి:

(i) రెండు త్రిభుజాలలో అనురూప కోణాలు సమానం అయితే, అప్పుడు ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

(ii) అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉన్న చతుర్భుజం ఒక చతురస్రం అగును.

(iii) అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉన్న చతుర్భుజం ఒక చతురస్రం అగును.

(iv) పూర్ణసంఖ్యలు a మరియు b, లకు $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(v) పూర్ణాంకం n లన్నింటికి $2n^2 + 11$ అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య అగును.

(vi) పూర్ణసంఖ్య n లన్నింటికి $n^2 - n + 41$ అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య అగును.

2. మీకు ఇష్టమైన నిరూపణను తీసుకొని, సెక్షన్ A1.5లో చర్చించిన మార్గాల్లో సోపానాల వారీగా విశ్లేషించండి (ఏమి ఇవ్వబడింది, ఏదినిరూపణ చేయబడింది, ఏ సిద్ధాంతాలు మరియు స్వీకృతములు ఉపయోగించారు, మొదలైనవి).

3. రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం సరి అని రుజువు చేయండి.

4. రెండు బేసి సంఖ్యల లబ్ధం బేసి అని రుజువు చేయండి.

5. మూడు వరుస సరి సంఖ్యల మొత్తం 6 తో నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుందని నిరూపణ చేయండి.

6. $y = 2x$ అనే సమీకరణం గల రేఖపై అనంతంగా అనేక బిందువులు ఉన్నాయని నిరూపణ చేయండి. (సూచన: ఏదైనా పూర్ణసంఖ్య n కు, బిందువు $(n, 2n)$ ను తీసుకోండి.)

7. మీరు ఒక సంఖ్య గురించి ఆలోచించి దానిపై రకరకాల పనులు చేయమనిచెప్పి, ఆ పై మీ అసలు సంఖ్య తెలియకుండా, మీరు ఏ సంఖ్యతో ముగించారో చెప్పడానికి తప్పనిసరిగా మీకు ఒక స్నేహితుడు ఉండాలి. ఇక్కడ రెండు ఉదాహరణలు ఉన్నాయి. అవి ఎందుకు పని చేస్తున్నాయో పరిశీలించండి.

(i) ఒక సంఖ్యను ఎంచుకోండి. దానిని రెట్టింపు చేయండి. తొమ్మిదిని కలపండి. మీ అసలు సంఖ్యను కలపండి. మూడుతో భాగించండి. నాలుగు కలపండి. మీ అసలు సంఖ్యను తీసివేయండి. మీ ఫలితం ఏడు.

(ii) ఏదైనా మూడు అంకెల సంఖ్యను రాయండి (ఉదాహరణకు, 425). ఈ అంకెలను అదే క్రమంలో పునరావృతం చేయడం ద్వారా ఆరు అంకెల సంఖ్యను రూపొందించండి (425425). మీ కొత్త సంఖ్య 7, 11 మరియు 13 లతో భాగింపబడుతుంది.

A1.6 Summary

In this Appendix, you have studied the following points:

1. In mathematics, a statement is only acceptable if it is either always true or always false.

2. To show that a mathematical statement is false, it is enough to find a single counter-example.

3. Axioms are statements which are assumed to be true without proof.

4. A conjecture is a statement we believe is true based on our mathematical intuition, but which we are yet to prove.

5. A mathematical statement whose truth has been established (or proved) is called a theorem.

6. The main logical tool in proving mathematical statements is deductive reasoning.

7. A proof is made up of a successive sequence of mathematical statements. Each statement in a proof is logically deduced from a previouly known statement, or from a theorem proved earlier, or an axiom, or the hypothesis.

A1.6 సారాంశం

ఈ అనుబంధంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. గణితంలో, ఒక ప్రవచనం ఎల్లప్పుడూ సత్యం లేదా ఎల్లప్పుడూ అసత్యం అయితేనే ఆమోదించబడుతుంది.

2. ఒక గణిత ప్రవచనం అసత్యమని చూపడానికి, ఒకే ఒక ప్రత్యుదాహరణను కనుగొంటే సరిపోతుంది.

3. స్వీకృతాలు అనేవి నిరూపణ లేకుండా సత్యం అని భావించబడే ప్రవచనాలు.

4. ఒక పరికల్పన అనేది ఇంకా నిరూపించబడని మనం గణిత అంతర్దృష్టి ఆధారంగా సత్యం అని నమ్మే ప్రవచనం.

5. నిరూపణ చేయబడిన ఒక గణిత ప్రవచనాన్ని ఒక సిద్ధాంతం అంటారు.

6. గణిత ప్రవచనాలను నిరూపణ చేయడంలో ప్రధాన తార్కిక సాధనం నిగమన నిరూపణ పద్ధతి.

7. ఒక నిరూపణ గణిత ప్రవచనాల యొక్క వరుస క్రమంతో రూపొందించబడింది. నిరూపణలోని ప్రతి ప్రవచనం తార్కికంగా ముందుగా తెలిసిన ప్రవచనం నుండి లేదా ఇంతకు ముందు రుజువు చేయబడిన ఒక సిద్ధాంతం నుండి లేదా ఒక స్వీకృతం లేదా పరికల్పన నుండి గ్రహించబడుతుంది.

ANSWERS/HINTS

EXERCISE 1.1

1. Yes. $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ etc., denominator q can also be taken as negative integer.

2. There can be infinitely many rationals betwen numbers 3 and 4, one way is to take them

$3 = \frac{21}{6+1}, 4 = \frac{28}{6+1}$. Then the six numbers are $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$.

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$. Therefore, five rationals are : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$

4. (i) True, since the collection of whole numbers contains all the natural numbers.

(ii) False, for example -2 is not a whole number.

(iii) False, for example $\frac{1}{2}$ is a rational number but not a whole number.

EXERCISE 1.2

1. (i) True, since collection of real numbers is made up of rational and irrational numbers.

(ii) False, no negative number can be the square root of any natural number.

(iii) False, for example 2 is real but not irrational.

2. No. For example, $\sqrt{4} = 2$ is a rational number.

3. Repeat the procedure as in Fig. 1.8 several times. First obtain $\sqrt{4}$ and then $\sqrt{5}$.

జవాబులు / సూచనలు

అభ్యాసం 1.1

1. అవును. $0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}$ మొ॥. హారము q ను ఋణపూర్ణ సంఖ్యగా కూడా తీసుకోవచ్చు.

2. 3 మరియు 4 అంకెల మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు. వాటిని కనుగొను ఒక విధానం

$3=\frac{21}{6+1}, 4=\frac{28}{6+1}$. అప్పుడు 6 సంఖ్యలు $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$.

3. $\frac{3}{5}=\frac{30}{50}, \frac{4}{5}=\frac{40}{50}$. ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలు : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$

4. (i) సత్యం (ఎందువలననగా) పూర్ణాంకాలు అన్నీ సహజ సంఖ్యలను కలిగి ఉండును.

(ii) అసత్యం. ఉదాహరణకు -2 పూర్ణాంకం కాదు.

(iii) అసత్యం. ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}$ అకరణీయ సంఖ్య కాని పూర్ణాంకం కాదు.

అభ్యాసం 1.2

1. (i) సత్యం. వాస్తవ సంఖ్యలు అనేవి కరణీయ మరియు అకరణీయ సంఖ్యల సమ్మేళనం.

(ii) అసత్యం. ఏ సహజసంఖ్యకు ఋణసంఖ్య వర్గమూలం కానేరదు.

(iii) అసత్యం ఉదాహరణకు 2 వాస్తవ సంఖ్య కాని కరణీయ సంఖ్య కాదు.

2. కాదు. ఉదాహరణకు $\sqrt{4}=2$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

3. పటం 1.8లో విధానాన్ని అనేకసార్లు పునరావృతం చేయాలి. మొదట $\sqrt{4}$ తరువాత $\sqrt{5}$ పొందుతారు.

EXERCISE 1.3

1. (i) 0.36, terminating. (ii) $0.\overline{09}$, non-terminating repeating.

   (iii) 4.125, terminating. (iv) $0.\overline{230769}$, non-terminating repeating.

   (v) $0.\overline{18}$ non-terminating repeating. (vi) 0.8225 terminating.

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$,

   $\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [Let $x = 0.666...$ So $10x = 6.666...$ or, $10x = 6 + x$ or, $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

   (ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [Let $x = 0.9999...$ So $10\,x = 9.999...$ or, $10\,x = 9 + x$ or, $x = 1$]

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. The prime factorisation of q has only powers of 2 or powers of 5 or both.

7. 0.01001000100001. . ., 0.202002000200002. . ., 0.003000300003. . .

8. 0.75075007500075000075. . ., 0.767076700767000767. . ., 0.808008000800008. . .

9. (i) and (v) irrational; (ii), (iii) and (iv) rational.

EXERCISE 1.4

1. (i) Irrational (ii) Rational (iii) Rational (iv) Irrational

   (v) Irrational

2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. There is no contradiction. Remember that when you measure a length with a scale or any other device, you only get an approximate rational value. So, you may not realise that either c or d is irrational.

4. Refer Fig. 1.17.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

అభ్యాసం 1.3

1. (i) 0.36 అంతమయ్యే దశాంశం (ii) $0.\overline{09}$, అంతంకాని ఆవృత దశాంశం (ఆవృతం)

(iii) 4.125, అంతమయ్యే దశాంశం (iv) $0.\overline{230769}$, అంతం కాని – ఆవృత దశాంశం

(v) $0.\overline{18}$ అంతం కాని ఆవృతం అగు దశాంశం (vi) 0.8225 అంతమయ్యే దశాంశం

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$, $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$,

$\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [$x = 0.666...$ అనుకొనుము అపుడు $10x = 6.666...$ లేదా, $10x = 6 + x$ లేదా , $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]

(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [Let $x = 0.9999....$.అనుకొనుము అపుడు $10\,x = 9.999...$ లేదా, $10\,x = 9 + x$ లేదా, $x =$ 1]

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q యొక్క కారణాంక విభజన కేవలం 2 యొక్క ఘాతాంకంగా గాని లేదా 5 యొక్క ఘాతాంకంగా గాని లేదా రెండింటిని కలిగి ఉండును.

7. 0.01001000100001. . ., 0.202002000200002. . ., 0.003000300003. . .

8. 0.75075007500075000075. . ., 0.767076700767000767. . ., 0.808008000800008. . .

9. (i) మరియు (v) కరణీయ సంఖ్యలు; (ii), (iii) మరియు (iv) లు అకరణీయ సంఖ్యలు

అభ్యాసం 1.4

1. (i) కరణీయ సంఖ్య (ii) అకరణీయ సంఖ్య (iii) అకరణీయ సంఖ్య

(iv) కరణీయ సంఖ్య (v) కరణీయ సంఖ్య

2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. ఇచట ఎటువంటి విరుద్ధత లేదు. ఎపుడైనా నీవు ఒక దూరాన్ని స్కేలుతో గాని లేదా ఇతర పరికరంతో గాని కొలిచినపుడు సుమారు విలువను మాత్రమే పొందగలవని గుర్తుంచుకో. కావున c లేదా d గాని కరణీయ సంఖ్యలని భావించవద్దు.

4. పటం 1.17 ను పరిశీలించండి.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

EXERCISE 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.** (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

EXERCISE 2.1

1. (i) and (ii) are polynomials in one variable, (v) is a polynomial in three variables,

(iii), (iv) are not polynomials, because in each of these exponent of the variable is not a whole number.

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}\,y^{100}$ (You can write some more polynomials with different coefficients.)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) quadratic (ii) cubic (iii) quadratic (iv) linear

(v) linear (vi) quadratic (vii) cubic

EXERCISE 2.2

1. (i) 3 (ii) –6 (iii) –3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) Yes (ii) No (iii) Yes (iv) Yes

(v) Yes (vi) Yes

(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ is a zero, but $\frac{2}{\sqrt{3}}$ is not a zero of the polynomial (viii) No

4. (i) –5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

EXERCISE 2.3

అభ్యాసం 1.5

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.**(i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

అభ్యాసం 2.1

1. (i) మరియు (ii) అనునవి ఏకచరరాశిలో బహుపదులు (v) అనునది 3 చరరాశులలో బహుపది.

(iii), (iv) అనునవి బహుపదులు కావు. ఎందుకంటే ఈ బహుపదిలో ప్రతీ చరరాశి యొక్క ఘాతాంకం పూర్ణాంకం కాదు.

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}\,y^{100}$ (నీవు వేర్వేరు గుణకాలతో మరికొన్ని బహుపదులను రాయవచ్చును)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) వర్గ (ii) ఘన (iii) వర్గ (iv) రేఖీయ

(v) రేఖీయ (vi) వర్గ (vii) ఘన

అభ్యాసం 2.2

1. (i) 3 (ii) –6 (iii) –3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును (iv) అవును

(v) అవును (vi) అవును

(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ అనునది శూన్య విలువ కాని $\frac{2}{\sqrt{3}}$ అనునది బహుపదికి శూన్య విలువ కాదు.

(viii) కాదు

4. (i) –5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

అభ్యాసం 2.3

1. $(x + 1)$ is a factor of (i), but not the factor of (ii), (iii) and (iv).

2. (i) Yes (ii) No (iii) Yes

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x - 1)(4x - 1)$(ii)$(x + 3)(2x + 1)$ (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iv) $(x + 1)(3x - 4)$

5. (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$

(iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

EXERCISE 2.4

1. (i) $x^2 + 14x + 40$(ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$

(iv)$y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x + y)(3x + y)$(ii)$(2y - 1)(2y - 1)$(iii)$\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$

(ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$

(iv)$9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

1. $(x + 1)$ అనునది (i) కు కారణాంకం, కాని (ii), (iii) మరియు (iv) లకు కారణాంకం కాదు.

2. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును

3. (i) -2 (ii) $-(2+\sqrt{2})$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x - 1)(4x - 1)$ (ii) $(x + 3)(2x + 1)$ (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iv) $(x + 1)(3x - 4)$

5. (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$

(iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

అభ్యాసం 2.4

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$

(iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$

(ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$

(iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$ (ii) $(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$ (iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$

(v) $\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y + 5z)\,(9y^2 + 25z^2 - 15yz)$ (ii) $(4m - 7n)\,(16m^2 + 49n^2 + 28mn)$

11. $(3x + y + z)\,(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

12. Simiplify RHS.

13. Put $x + y + z = 0$ in Identity VIII.

14. (i) -1260. Let $a = -12$, $b = 7$, $c = 5$. Here $a + b + c = 0$. Use the result given in Q13.

(ii) 16380

15. (i) One possible answer is : Length = $5a - 3$, Breadth = $5a - 4$

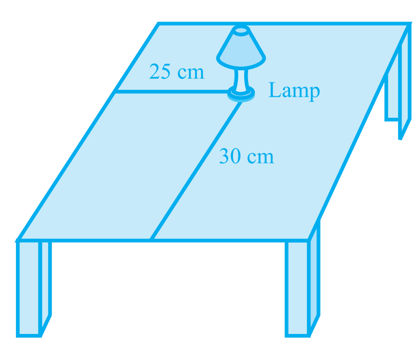
(ii) One possible answer is : Length = $7y - 3$, Breadth = $5y + 4$

16. (i) One possible answer is : 3, x and $x - 4$.

(ii) One possible answer is : $4k$, $3y + 5$ and $y - 1$.

EXERCISE 3.1

1. Consider the lamp as a point and table as a plane. Choose any two perpendicular edges of the table. Measure the distance of the lamp from the longer edge, suppose it is 25 cm. Again, measure the distance of the lamp from the shorter edge, and suppose it is 30 cm. You can write the position of the lamp as (30, 25) or (25, 30), depending on the order you fix.



7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$ (iv)$(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$

(v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y+5z)(9y^2+25z^2-15yz)$ (ii) $(4m-7n)(16m^2+49n^2+28mn)$

11. $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

12. RHS ను సాధించండి.

13. VIII ను కనుగొనుటలో $x+y+z=0$ గా తీసుకోండి.

14. (i) -1260 , $a=-12$, $b=7$, $c=5$ అనుకోండి. ఇచట $a+b+c=0$. Q13 లో ఇచ్చిన ఫలితాన్ని ఉపయోగించండి.

(ii) 16380

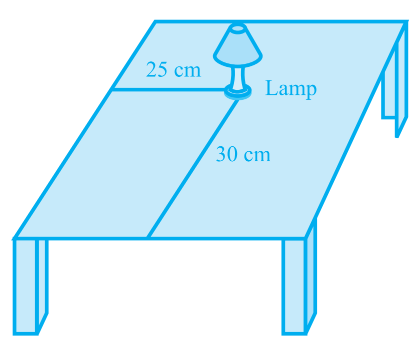
15. (i) సాధ్యపడే సమాధానం, పొడవు $=5a-3$, వెడల్పు $=5a-4$

(ii) సాధ్యపడే సమాధానం పొడవు $=7y-3$, వెడల్పు $=5y+4$

16. (i) సాధ్యమయ్యే సమాధానం 3, x మరియు $x-4$.

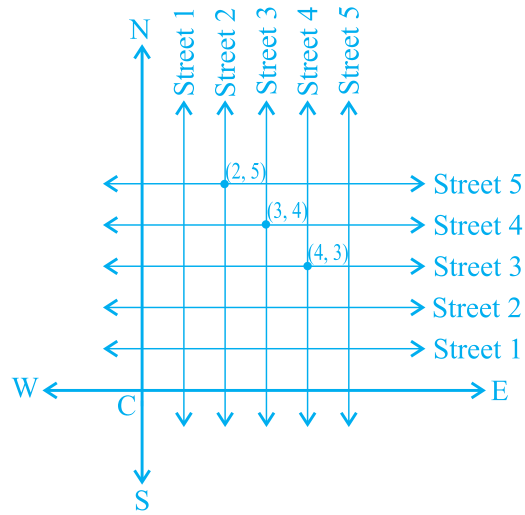
(ii) సాధ్యమయ్యే సమాధానం $4k$, $3y+5$ మరియు $y-1$.

అభ్యాసం 3.1



1. బల్లను ఒక సమతలంగా మరియు దీపాన్ని ఒక బిందువుగా అనుకోండి. బల్ల యొక్క ఏవైనా రెండు లంబంగా ఉన్న అంచులను తీసుకోండి. పొడవు అంచు నుండి దీపానికి గల దూరాన్ని కొలవండి. అది ఒక 25 సెం.మీ. అనుకోండి. మరలా చిన్న అంచు నుండి దీపానికి గల దూరాన్ని కొలవండి. అది 30 సెం.మీ. అనుకోండి. ఇపుడు దీపం స్థానాన్ని (30,25) లేదా (25,30) గా రాయవచ్చు. అది మీరు తీసుకున్న వరుసపై ఆధారపడి ఉండును.

2. The Street plan is shown in figure given below.



Both the cross-streets are marked in the figure above. They are *uniquely* found because of the two reference lines we have used for locating them.

EXERCISE 3.2

1. (i) The x - axis and the y - axis (ii) Quadrants (iii) The origin

2. (i) $(-5, 2)$ (ii) $(5, -5)$ (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) -3 (vii) $(0, 5)$ (viii) $(-3, 0)$

EXERCISE 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0$; $a = 2$, $b = 3$, $c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$; $a = 1$, $b = \frac{-1}{5}$, $c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0$; $a = -2$, $b = 3$, $c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0$; $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$

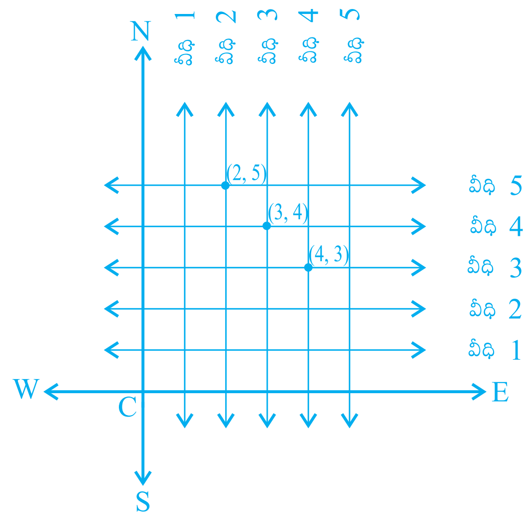
(v) $2x + 5y + 0 = 0$; $a = 2$, $b = 5$, $c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0$; $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0$; $a = 0$, $b = 1$, $c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0$; $a = -2$, $b = 0$, $c = 5$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన పటంలో వీధి ప్రణాళిక చూపబడినది.



పై పటంలో క్రాస్ స్ట్రీట్ (cross-streets) వీధులు రెండూ గుర్తింపబడ్డాయి. అవి ప్రత్యేకంగా కనిపిస్తాయి. ఎందుకంటే వాటిని సూచించుటకు రెండు వేర్వేరు సరళరేఖలను ఉపయోగించాము.

అభ్యాసం 3.2

1. (i) x - అక్షం మరియు y - అక్షం (ii) పాదములు (iii) మూల బిందువు

2. (i) $(-5, 2)$ (ii) $(5, -5)$ (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) -3 (vii) $(0, 5)$ (viii) $(-3, 0)$

అభ్యాసం 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\bar{5} = 0;\ a = 2,\ b = 3,\ c = -9.3\bar{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0;\ a = 1,\ b = \frac{-1}{5},\ c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0;\ a = -2,\ b = 3,\ c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0;\ a = 1,\ b = -3,\ c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0;\ a = 2,\ b = 5,\ c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0;\ a = 3,\ b = 0,\ c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0;\ a = 0,\ b = 1,\ c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0;\ a = -2,\ b = 0,\ c = 5$

EXERCISE 4.2

1. (iii), because for every value of x, there is a corresponding value of y and vice-versa.

2. (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, –1)

(ii) $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) No (ii) No (iii) Yes (iv) No (v) No

4. 7

EXERCISE 5.1

1. (i) False. This can be seen visually by the student.

(ii) False. This contradicts Axiom 5.1.

(iii) True. (Postulate 2)

(iv) True. If you superimpose the region bounded by one circle on the other, then they coincide. So, their centres and boundaries coincide. Therefore, their radii will coincide.

(v) True. The first axiom of Euclid.

3. There are several undefined terms which the student should list. They are consistent, because they deal with two different situations - (i) says that given two points A and B, there is a point C lying on the line in between them; (ii) says that given A and B, you can take C not lying on the line through A and B.

These 'postulates' do not follow from Euclid's postulates. However, they follow from Axiom 5.1.

4. $AC = BC$

So, $AC + AC = BC + AC$ (Equals are added to equals)

i.e., $2AC = AB$ (BC + AC coincides with AB)

Therefore, $AC = \frac{1}{2} AB$

5. Make a temporary assumption that different points C and D are two mid-points of AB. Now, you show that points C and D are not two different points.

6. $AC = BD$ (Given) (1)

$AC = AB + BC$ (Point B lies between A and C) (2)

$BD = BC + CD$ (Point C lies between B and D) (3)

అభ్యాసం 4.2

1. (iii) ఎందుకంటే ప్రతీ x విలువకు దానికి అనుగుణమైన y విలువ ఉండును మరియు ప్రతీ y విలువకు దానికి అనుగుణమైన x విలువ ఉంటుంది.

2. (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, –1)

(ii) $(1, 9-\pi), (0, 9), (-1, 9+\pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును (iv) కాదు (v) కాదు

4. 7

అభ్యాసం 5.1

1. (i) అసత్యం. ఇది విద్యార్థికి దృశ్యపరంగా అనుభవం అవుతుంది.

(ii) అసత్యం. ఇది 5.1 సామాన్య భావనకు విరుద్ధం.

(iii) సత్యం. (2వ స్వీకృతం)

(iv) సత్యం. రెండు సమాన వృత్తాలను ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచినపుడు అవి ఏకీభవిస్తాయి. కావున వాటి కేంద్రాలు మరియు వృత్త పంధులు కూడా ఏకీభవించును. అందువలన వాని వృత్త వ్యాసార్ధాలు కూడా ఏకీభవిస్తాయి.

(v) సత్యం. యూక్లిడ్ మొదటి సామాన్య భావన.

3. ఇచట అనేక అనిర్వచిత పదాలను విద్యార్థి జాబితా రూపంలో చూడవచ్చు. అవి సంశతమైనది. ఎందుకంటే రెండు వేర్వేరు సందర్భాలను పరీశాలించగా (i) నుండి ఇవ్వబడిన A మరియు B బిందువుల గుండా పోయే రేఖపై A, B ల మధ్య C అను బిందువు కలదు అని తెలుస్తుంది. (ii) నుండి A మరియు B గుండా పోయే రేఖపై లేకుండా C అను బిందువు ను తీసుకొనవచ్చు అని తెలియును.

ఈ స్వీకృతాలు యూక్లిడ్ స్వీకృతాలను అనుసరించి లేవు. అయితే అవి సామాన్య భావన 5.1ను అనుసరించి ఉన్నాయి.

4. $AC = BC$

కావున $AC + AC = BC + AC$ (సమాన రాశులను సమానరాశులకు కూడగా)

కాబట్టి $2AC = AB$ ($BC + AC = AB$ అని ఏకీభవిస్తుంది)

Therefore, $AC = \frac{1}{2} AB$

5. C మరియు D అనునవి AB కు రెండు వేర్వేరు మధ్య బిందువులు అనుకోండి. ఇపుడు C మరియు D అనేవి రెండు వేర్వేరు బిందువులు కావు అని చూపాలి.

6. $AC = BD$ (ఇవ్వబడింది) (1)

$AC = AB + BC$ (B బిందువు A మరియు C ల మధ్య కలదు) (2)

$BD = BC + CD$ (C బిందువు B మరియు D ల మధ్య కలదు) (3)

Substituting (2) and (3) in (1), you get

$$AB + BC = BC + CD$$

So, $AB = CD$ (Subtracting equals from equals)

7. Since this is true for any thing in any part of the world, this is a universal truth.

EXERCISE 6.1

1. 30°, 250° **2.** 126° **4.** Sum of all the angles at a point = 360°

5. $\angle$ QOS = $\angle$ SOR + $\angle$ ROQ and $\angle$ POS = $\angle$ POR – $\angle$ SOR. **6.** 122°, 302°

EXERCISE 6.2

1. 126° **2.** 126°, 36°, 54° **3.** 60° **4.** 50°, 77°

5. Angle of incidence = Angle of reflection. At point B, draw BE $\perp$ PQ and at point C, draw CF $\perp$ RS.

EXERCISE 7.1

1. They are equal. **6.** $\angle$ BAC = $\angle$ DAE

EXERCISE 7.2

6. $\angle$ BCD = $\angle$ BCA + $\angle$ DCA = $\angle$ B + $\angle$ D **7.** each is of 45°

EXERCISE 7.3

3. **(ii)** From (i), $\angle$ ABM = $\angle$ PQN

EXERCISE 8.1

3. (i) From Δ DAC and Δ BCA, show $\angle$ DAC = $\angle$ BCA and $\angle$ ACD = $\angle$ CAB, etc.

(ii) Show $\angle$ BAC = $\angle$ BCA, using Theorem 8.4.

EXERCISE 8.2

2. Show PQRS is a parallelogram. Also show PQ || AC and PS || BD. So, $\angle$ P = 90°.

5. AECF is a parallelogram. So, AF || CE, etc.

(2) మరియు (3) లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$AB + BC = BC + CD$$

కావున, $AB = CD$ (సమాన రాశుల నుండి సమాన రాశులను తీసివేయగా)

7. ఎందుకంటే ప్రపంచంలో ప్రతీ విషయానికి ఇది సత్యం. ఇది సార్వత్రిక సత్యం.

అభ్యాసం 6.1

1. $30°, 250°$ **2.** $126°$ **4.** ఒక బిందువు వద్ద అన్ని కోణాల మొత్తం = $360°$

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ మరియు $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. **6.** $122°, 302°$

అభ్యాసం 6.2

1. $126°$ **2.** $126°, 36°, 54°$ **3.** $60°$ **4.** $50°, 77°$

5. పతన కోణం విలువ = పరావర్తన కోణం విలువ. B బిందువు వద్ద $BE \perp PQ$ అగునట్లు BEను మరియు C $CF \perp RS$ అగునట్లు CF ను గీయండి.

అభ్యాసం 7.1

1. అవి సమానాలు **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

అభ్యాసం 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ **7.** ప్రతీకోణం విలువ $45°$

అభ్యాసం 7.3

3. **(ii)** నుండి (i), $\angle ABM = \angle PQN$

అభ్యాసం 8.1

3. (i) ΔDAC మరియు ΔBCA ల నుండి $\angle DAC = \angle BCA$ మరియు $\angle ACD = \angle CAB$ మొ॥ అని చూపాలి.

(ii) సిద్ధాంతం 8.4 ను ఉపయోగించి $\angle BAC = \angle BCA$ అని చూపండి.

అభ్యాసం 8.2

2. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపాలి. అంతేకాకుండా $PQ \parallel AC$ మరియు $PS \parallel BD$ అని చూపాలి. కావున, $\angle P = 90°$.

5. AECF అనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. కావున, $AF \parallel CE$ మొ॥

EXERCISE 9.1

1. Prove exactly as Theorem 9.1 by considering chords of congruent circles.

2. Use SAS axiom of congruence to show the congruence of the two triangles.

EXERCISE 9.2

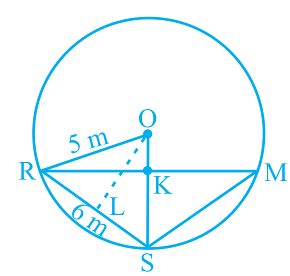
1. 6 cm. First show that the line joining centres is perpendicular to the radius of the smaller circle and then that common chord is the diameter of the smaller circle.

2. If AB, CD are equal chords of a circle with centre O intersecting at E, draw perpendiculars OM on AB and ON on CD and join OE. Show that right triangles OME and ONE are congruent.

3. Proceed as in Example 2.

4. Draw perpendicular OM on AD.

5. Represent Reshma, Salma and Mandip by R, S and M respectively. Let KR = x m (see figure).



Area of Δ ORS $= \frac{1}{2} x \times 5$. Also, area of Δ ORS =

$\frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4$.

Find x and hence RM.

6. Use the properties of an equilateral triangle and also Pythagoras Theorem.

EXERCISE 9.3

1. 45°
2. 150°, 30°
3. 10°
4. 80°
5. 110°
6. $\angle$BCD = 80° and $\angle$ECD = 50°
7. Draw perpendiculars AM and BN on CD (AB || CD and AB < CD). Show ΔAMD $\cong$ ΔBNC. This gives $\angle$C = $\angle$D and, therefore, $\angle$A + $\angle$C = 180°.

EXERCISE 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $900\sqrt{3}\,\text{cm}^2$
2. ₹ 1650000
3. $20\sqrt{2}\ \text{m}^2$
4. $21\sqrt{11}\,\text{cm}^2$
5. 9000 cm²
6. $9\sqrt{15}\ \text{cm}^2$

అభ్యాసం 9.1

1. సిద్ధాంతం 9.1 ప్రకారం సర్వసమాన వృత్తాల జ్యాలను పరిగణలోకి తీసుకుని నిరూపణ చేయాలి.

2. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అని చూపుటకు భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించాలి.

అభ్యాసం 9.2

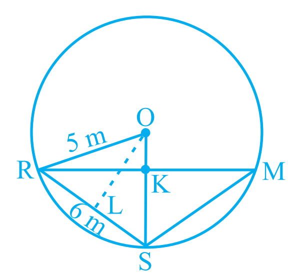
1. 6 సెం.మీ. మొదటగా వృత్త కేంద్రాలను కలుపు రేఖ చిన్నవృత్త వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటుందని చూపాలి మరియు ఉమ్మడి జ్యా చిన్న వృత్త వ్యాసం అని చూపాలి.

2. O కేంద్రంగా గల వృత్తం యొక్క రెండు సమాన జ్యా లు E వద్ద ఖండించుకొన్నట్లైతే AB కు లంబం OM మరియు CD కు లంబం ON ను గీయాలి మరియు OEను కలపండి. లంబకోణ త్రిభుజాలు OME మరియు ONEలు సర్వసమానమని చూపాలి.

3. ఉదాహరణకు 2ను అనుసరించండి.

4. AD మీద OM లంబాన్ని గీయండి.

5. రేష్మ, సల్మ మరియు మన్‌దీప్‌లను R, S మరియు M లతో సూచించండి. KR $= x$ m అనుకోండి. (పటాన్ని చూడండి). Δ ORS వైశాల్యం $= \frac{1}{2} x \times 5$. మరియు Δ ORS వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4$.



x మరియు RM విలువలను కనుగొనండి.

6. సమబాహు త్రిభుజ ధర్మాలు మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించండి.

అభ్యాసం 9.3

1. 45° **2.** 150°, 30° **3.** 10°

4. 80° **5.** 110° **6.** $\angle$BCD $=$ 80° మరియు $\angle$ECD $=$ 50°

7. CDమీద AM మరియు BN లంబాలను గీయండి. (AB || CD మరియు AB < CD).
Δ AMD $\cong$ Δ BNC అని చూపాలి. దీనినుండి $\angle$C $=$ $\angle$D మరియు $\angle$A $+$ $\angle$C $=$ 180°.

అభ్యాసం 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900,3 cm² **2.** ₹ 1650000 **3.** $20\sqrt{2}$ m²

4. $21\sqrt{11}$ cm² **5.** 9000 cm² **6.** $9\sqrt{15}$ cm²

EXERCISE 11.1

1. 165 cm^2 **2.** 1244.57 m^2 **3.** (i) 7 cm (ii) 462 cm^2

4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280 **5.** 63 m **6.** ₹ 1155

7. 5500 cm^2 **8.** ₹ 384.34 (approx.)

EXERCISE 11.2

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2

2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5 m^2

3. 942 cm^2 **4.** 1 : 4 **5.** ₹ 27.72

6. 3.5 cm **7.** 1 : 16 **8.** 173.25 cm^2

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

EXERCISE 11.3

1. (i) 264 cm^3(ii) 154 cm^3 **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}l$

3. 10 cm **4.** 8 cm **5.** 38.5 kl

6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2 **7.** 100π cm^3 **8.** 240π cm^3; 5 : 12

9. 86.625x m^3, 99.825 m^2

EXERCISE 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ cm^3 (ii) 1.05 m^3 (approx.)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ cm^3 (ii) 0.004851 m^3 **3.** 345.39 g (approx.)

4. $\frac{1}{64}$ **5.** 0.303l (approx.) **6.** 0.06348 m^3 (approx.)

7. $179\frac{2}{3}$ cm^3 **8.** (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (approx.) **9.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 mm^3 (approx.)

అభ్యాసం 11.1

1. 165 cm^2 **2.** 1244.57 m^2 **3.** (i) 7 cm (ii) 462 cm^2

4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280 **5.** 63 m **6.** ₹ 1155

7. 5500 cm^2 **8.** ₹ 384.34 (సుమారుగా)

అభ్యాసం 11.2

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2

2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5 m^2

3. 942 cm^2 **4.** 1 : 4 **5.** ₹ 27.72

6. 3.5 cm **7.** 1 : 16 **8.** 173.25 cm^2

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

అభ్యాసం 11.3

1. (i) 264 cm^3(ii) 154 cm^3 **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}l$

3. 10 cm **4.** 8 cm **5.** 38.5 kl

6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2 **7.** 100π cm^3 **8.** 240π cm^3; 5 : 12

9. 86.625x m^3, 99.825 m^2

అభ్యాసం 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ cm^3 (ii) 1.05 m^3 (సుమారుగా)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ cm^3 (ii) 0.004851 m^3 **3.** 345.39 g (సుమారుగా)

4. $\frac{1}{64}$ **5.** 0.303l (సుమారుగా) **6.** 0.06348 m^3 (సుమారుగా)

7. $179\frac{2}{3}$ cm^3 **8.** (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (సుమారుగా) **9.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 mm^3 (సుమారుగా)

EXERCISE 12.1

1. (ii)Reproductive health conditions.

3. (ii)Party A **4.** (ii) Frequency polygon (iii) No **5.** (ii) 184

8.

Age (in years)	Frequency	Width	Length of the rectangle
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

Now, you can draw the histogram, using these lengths.

9. (i)

Number of letters	Frequency	Width of interval	Length of rectangle
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

Now, draw the histogram.

(ii) 6 - 8

అభ్యాసం 12.1

1. (ii) పునరుత్పత్తికి సంబంధించిన ఆరోగ్య సమస్యలు.

3. (ii) పార్టీ A **4.** (ii) పౌన:పున్య బహుభుజి (iii) కాదు **5.** (ii) 184

8.

వయస్సు (సం॥లో)	తరచుదనం	వెడల్పు	దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

ఇపుడు ఈ పొడవులనుపయోగించి మీరు సోపానరేఖా చిత్రం హిస్టోగ్రామ్ గీయవలెను.

9. (i)

అక్షరాల సంఖ్య	తరచుదనం	వెడల్పు	దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

ఇపుడు హిస్టోగ్రామ్ సోపానరేఖా చిత్రం గీయాలి.

(ii) 6 - 8

EXERCISE A1.1

1. (i) False. There are 12 months in a year.

(ii) Ambiguous. In a given year, Diwali may or may not fall on a Friday.

(iii) Ambiguous. At some time in the year, the temperature in Magadi, may be 26° C.

(iv) Always true.

(v) False. Dogs cannot fly.

(vi) Ambiguous. In a leap year, February has 29 days.

2. (i) False. The sum of the interior angles of a quadrilateral is 360°.

(ii) True (iii) True (iv) True

(v) False, for example, $7 + 5 = 12$, which is not an odd number.

3. (i) All prime numbers greater than 2 are odd.

(ii) Two times a natural number is always even. (iii) For any $x > 1$, $3x + 1 > 4$.

(iv) For any $x \geq 0$, $x^3 \geq 0$.

(v) In an equilateral triangle, a median is also an angle bisector.

EXERCISE A1.2

1. (i) Humans are vertebrates. (ii) No. Dinesh could have got his hair cut by anybody else. (iii) Gulag has a red tongue. (iv) We conclude that the gutters will have to be cleaned tomorrow. (v) All animals having tails need not be dogs. For example, animals such as buffaloes, monkeys, cats, etc. have tails but are not dogs.

2. You need to turn over B and 8. If B has an even number on the other side, then the rule has been broken. Similarly, if 8 has a consonant on the other side, then the rule has been broken.

EXERCISE A1.3

1. Three possible conjectures are:

(i) The product of any three consecutive even numbers is even. (ii) The product of any three consecutive even numbers is divisible by 4. (iii) The product of any three consecutive even numbers is divisible by 6.

2. Line 4: $1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$; Line 5: $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$; the conjecture holds for Line 4 and Line 5; No, because $11^5 \neq 15101051$.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. Student's own answer. For example, Euclid's postulates.

అభ్యాసం A1.1

1. (i) అసత్యం. ఒక సంవత్సరానికి 12 నెలలు.

(ii) సందిగ్ధత: ఒక సం॥లో దీపావళి శుక్రవారం రావచ్చు, రాకపోవచ్చు.

(iii) సందిగ్ధత : సం॥లో ఒకరోజు మగధి ఉష్ణోగ్రత 26° C ఉండవచ్చు.

(iv) ఎల్లప్పుడూ సత్యం.

(v) అసత్యం. కుక్కలు ఎగుర లేవు.

(vi) సందిగ్ధత : లీఫ్ సం॥లో ఫిబ్రవరి నెలకు 29 రోజులుండును.

2. (i) అసత్యం. చతుర్భుజంలో అంతరకోణాల మొత్తం 360°.

(ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) సత్యం

(v) అసత్యం. ఉదాహరణకు $7 + 5 = 12$ బేసి సంఖ్య కాదు.

3. (i) 2 కంటె పెద్దదైన ప్రధాన సంఖ్యలన్నీ బేసి సంఖ్యలు.

(ii) ఒక సహజసంఖ్యకు రెట్టింపు ఎల్లపుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది.

(iii) $x > 1$ అయ్యేట్లు x యొక్క ఏ విలువకైనా $3x + 1 > 4$ అవుతుంది.

(iv) $x \geq 0$ అయ్యేట్లు x యొక్క ఏ విలువకైనా $x^3 \geq 0$ అవుతుంది.

(v) సమబాహు త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖయే కోణ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.

అభ్యాసం A1.2

1. (i) మానవులు సకశేరుకాలు (వెన్నుముక గల జీవులు) (ii) కాదు. దినేష్ జుట్టును మరెవరైనా కత్తిరించి ఉండకపోవచ్చు. (iii) గులాగ్ ఎర్రటి నాలుకను కలిగి ఉంది. (iv) కాలువలు రేపు శుభ్రం చేయాలని మేము నిర్ధారించాం. (v) తోకలున్న అన్ని జంతువులు కుక్కలు కానవసరం లేదు. ఉదాహరణకు గేదెలు, కోతులు, పిల్లులు మొదలగునవి తోకలు కలిగి ఉండును.

2. నీవు B మరియు 8ని మార్చాల్సి ఉంది. ఒకవేళ Bకు మరొకవైపు సరి సంఖ్య ఉంటే అపుడు నియమం పాటించబడదు. అదేవిధంగా ఒకవేళ Bకు వేరొకవైపు స్థిరరాశి ఉంటే అపుడు నియమం పాటించబడదు.

అభ్యాసం A1.3

1. మూడు సాధ్యమయ్యే పరికల్పనలు.

(i) ఏవైనా 3 వరుస సరిసంఖ్యల లబ్ధం సరి సంఖ్య. (ii) ఏవైనా 3 వరుస సరి సంఖ్యల లబ్ధం 4చే భాగించబడుతుంది. (iii) ఏవైనా 3 వరుస సరి సంఖ్యల లబ్ధం 6చే భాగించబడుతుంది.

2. 4వ వరుస : $1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$; 5వ వరుస : $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$; 4వ వరుస మరియు 5వ వరుసలకు పరికల్పన వర్తిస్తుంది. $11^5 \neq 15101051$ కావును వర్తించదు.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. విద్యార్థుల స్వంత సమాధానం. ఉదాహరణకు యూక్లిడ్ స్వీకృతాలు.

EXERCISE A1.4

1. (i) You can give any two triangles with the same angles but of different sides.

   (ii) A rhombus has equal sides but may not be a square.

   (iii) A rectangle has equal angles but may not be a square.

   (iv) For $a = 3$ and $b = 4$, the statement is not true.

   (v) For $n = 11$, $2n^2 + 11 = 253$ which is not a prime.

   (vi) For $n = 41$, $n^2 - n + 41$ is not a prime.

2. Student's own answer.

3. Let x and y be two odd numbers. Then $x = 2m + 1$ for some natural number m and $y = 2n + 1$ for some natural number n.

   $x + y = 2(m + n + 1)$. Therefore, $x + y$ is divisible by 2 and is even.

4. See Q.3. $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.

   Therefore, xy is not divisible by 2, and so it is odd.

5. Let $2n$, $2n + 2$ and $2n + 4$ be three consecutive even numbers. Then their sum is $6(n + 1)$, which is divisible by 6.

7. (i) Let your original number be n. Then we are doing the following operations:

   $$n \to 2n \to 2n + 9 \to 2n + 9 + n = 3n + 9 \to \frac{3n+9}{3} = n + 3 \to n + 3 + 4 = n + 7 \to n + 7 - n = 7.$$

   (ii) Note that $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Take any three digit number say, abc. Then $abc \times 1001 = abcabc$. Therefore, the six digit number $abcabc$ is divisible by 7, 11 and 13.

EXERCISE A2.1

1. **Step 1: Formulation :**

   The relevant factors are the time period for hiring a computer, and the two costs given to us. We assume that there is no significant change in the cost of purchasing or hiring the computer. So, we treat any such change as irrelevant. We also treat all brands and generations of computers as the same, i.e. these differences are also irrelevant.

   The expense of hiring the computer for x months is ₹ $2000x$. If this becomes more than the cost of purchasing a computer, we will be better off buying a computer. So, the equation is

   $$2000x = 25000 \qquad (1)$$

అభ్యాసం A1.4

1. (i) సమాన కోణాలు కలిగి వేర్వేరు భుజాలు కలిగిన ఏవైనా 2 త్రిభుజాలను నీవు ఇవ్వవచ్చు.

   (ii) రాంబస్ అనునది సమాన భుజాలను కలిగి ఉండును కాని చతురస్రం కాకపోవచ్చు.

   (iii) దీ॥చ॥ సమాన కోణాలను కలిగి ఉండును. కాని చతురస్రం కాకపోవచ్చు.

   (iv) $a = 3$ మరియు $b = 4$ లకు ప్రవచనం సత్యం కాదు.

   (v) $n = 11$ అయిన $2n^2 + 11 = 253$ ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

   (vi) $n = 41$ అయిన $n^2 - n + 41$ ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

2. విద్యార్థుల స్వయం(స్వంత) సమాధానం.

3. x మరియు y అనునవి రెండు బేసి సంఖ్యలు అనుకోండి. అపుడు $x = 2m + 1$. m ఒక సహజ సంఖ్య మరియు $y = 2n + 1$ n ఒక సహజ సంఖ్య.

   $x + y = 2(m + n + 1)$. $x + y$ 2 తో భాగించబడును మరియు సరి సంఖ్య

4. Q.3 ను చూడండి. $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.

   xy అనునది '2' తో భాగించబడదు. కావున ఇది బేసి సంఖ్య.

5. $2n$, $2n + 2$ మరియు $2n + 4$ అనునవి మూడు వరుస సరిసంఖ్యలు. అపుడు వాని మొత్తం $6(n + 1)$ అనునది '6' తో భాగింపబడును.

7. (i) మీ యొక్క అసలు సంఖ్య n అనుకోండి. అపుడు మనం క్రింది విధంగా చేస్తాం.

   $$n \to 2n \to 2n + 9 \to 2n + 9 + n = 3n + 9 \to \frac{3n+9}{3} = n + 3 \to n + 3 + 4 = n + 7 \to n + 7 - n = 7.$$

   (ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ అని గమనించండి. ఏదైనా 3 అంకెల సంఖ్య abc అనుకోండి. అపుడు $abc \times 1001 = abcabc$ కావున '6' అంకెలసంఖ్య $abcabc$ అనేది 7, 11 మరియు 13 లతో భాగించబడును.

అభ్యాసం A2.1

1. **సూత్రీకరణ : 1వ దశ:**

కంప్యూటర్‌ను అద్దెకు తీసుకొను కాలవ్యవధికి సంబంధించి కారకాలు మరియు రెండు ఖర్చులు మాకు ఇవ్వబడ్డాయి. కంప్యూటర్‌ను ఖరీదు చేయడానికి అయ్యే ఖర్చు మరియు అద్దెకు తీసుకొనుటకు అయ్యే ఖర్చులలో పెద్దగా మార్పులేదని మేము అనుకొంటున్నాం. కావున అటువంటి ఏ మార్పునైనా అసంబంధమైనదిగా పరిగణిస్తాం. అంతేకాకుండా అన్ని బ్రాండ్లు మరియు అన్ని తరాల కంప్యూటర్లను ఒకేరకమైనవిగా పరిగణిస్తాం. అనగా ఈ మార్పులు కూడా అసంబంధమైనవి.

కంప్యూటర్‌ను x నెలలు అద్దెకు తీసుకొనుటకు అగు ఖర్చు ₹ $2000x$. ఒకవేళ కంప్యూటర్‌ను ఖరీదు చేయుటకు అయ్యే ఖర్చు కంటే ఎక్కువైతే అపుడు కంప్యూటర్‌ను ఖరీదు చేయుట మంచిదని భావిస్తాం. కావున సమీకరణం

$$2000\,x = 25000 \tag{1}$$

Step 2 : Solution : Solving (1), $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

Step 3 : Interpretation : Since the cost of hiring a computer becomes more **after** 12.5 months, it is cheaper to buy a computer, if you have to use it for more than 12 months.

2. **Step1 : Formulation :** We will assume that cars travel at a constant speed. So, any change of speed will be treated as irrelevant. If the cars meet after x hours, the first car would have travelled a distance of $40x$ km from A and the second car would have travelled $30x$ km, so that it will be at a distance of $(100 - 30x)$ km from A. So the equation will be $40x = 100 - 30x$, i.e., $70x = 100$.

   Step 2 : Solution : Solving the equation, we get $x = \frac{100}{70}$.

   Step 3 : Interpretation : $\frac{100}{70}$ is approximately 1.4 hours. So, the cars will meet after 1.4 hours.

3. **Step1 : Formulation :** The speed at which the moon orbits the earth is

$$\frac{\text{Length of the orbit}}{\text{Time taken}}.$$

   Step 2 : Solution : Since the orbit is nearly circular, the length is $2 \times \pi \times 384000$ km $= 2411520$ km

   The moon takes 24 hours to complete one orbit.

   So, speed $= \frac{2411520}{24} = 100480$ km/hour.

   Step 3 : Interpretation : The speed is 100480 km/h.

4. **Formulation :** An assumption is that the difference in the bill is only because of using the water heater.

   Let the average number of hours for which the water heater is used $= x$

   Difference per month due to using water heater = ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240

   Cost of using water heater for one hour = ₹ 8

   So, the cost of using the water heater for 30 days $= 8 \times 30 \times x$

   Also, the cost of using the water heater for 30 days = Difference in bill due to using water heater

   So, $240x = 240$

   Solution : From this equation, we get $x = 1$.

   Interpretation : Since $x = 1$, the water heater is used for an average of 1 hour in a day.

2వ దశ : సాధన : (1) ను సాధించగా $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

3వ దశ : వివరణ: 12.5 నెలల తర్వాత కంప్యూటర్‌ను అద్దెకు తీసుకొనుటకు అయ్యే ఖర్చు ఎక్కువ అవుతుంది. కావున కంప్యూటర్‌ను 12 నెలలు కంటే ఎక్కువ వినియోగించాల్సి వస్తే దానిని ఖరీదు చేయడానికి అయ్యే ఖర్చే చౌకగా ఉంటుంది.

2. **సూత్రీకరణ : 1వ దశ :** కార్లు స్థిరవేగంతో ప్రయాణిస్తున్నాయని అనుకుందాం. కావున వేగంలో ఏ మార్పునైనా అసంబంధమైనదిగా భావిస్తాం. ఒకవేళ x గంటల తర్వాత ఆ కార్లు ఒకచోట కలిస్తే అపుడు మొదటి కారు A నుండి $40x$ కి.మీ. దూరం ప్రయాణిస్తుంది మరియు 2వ కారు $30x$ దూరం ప్రయాణిస్తుంది. అపుడు A నుండి $(100 - 30x)$ కి.మీ. అవుతుంది.

2వ దశ : సాధన : సమీకరణాన్ని సాధించగా $x = \frac{100}{70}$ పొందుతాం.

3వ దశ : వివరణ : $\frac{100}{70} = 1.4$ గం॥ (సుమారుగా) కావున 2 కార్లు 1.4గంటల తర్వాత కలుస్తాయి.

3. **సూత్రీకరణ : 1వ దశ:** చంద్రుడు భూమి చుట్టూ తిరిగే వేగం = $\dfrac{\text{కక్ష్య పొడవు}}{\text{పట్టిన సమయం}}$.

2వ దశ : సాధన : కక్ష్య దాదాపుగా వృత్తాకారంలో ఉన్నందున పొడవు $2 \times \pi \times 384000$ కి.మీ.
$= 2411520$ కి.మీ.

చంద్రుడు ఒక పరిభ్రమణం చేయుటకు పట్టేకాలం 24గం॥

కావున వేగం $= \frac{2411520}{24} = 100480$ కి.మీ/గం॥

2వ దశ : వివరణ : పరిభ్రమణ వేగం 100480 కి.మీ./గం॥

4. **సూత్రీకరణ :** వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగించడం వలన మాత్రమే బిల్లులో తేడా వచ్చిందని అనుకుందాం. వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగించిన సరాసరి గంటల సంఖ్య $= x$ అనుకోండి.

వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగం వలన ఒక నెలకు తేడా = ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240

1గం॥ వాటర్ హీటర్ వినియోగించుటకు అయ్యే ఖర్చు = ₹ 8

కావున, వాటర్ హీటర్‌ను 30 రోజులకు వినియోగించుటకు అయ్యే ఖర్చు $= 8 \times 30 \times x$

వాటర్ హీటర్‌ను 30 రోజులు వినియోగించుటకు అగు ఖర్చు = వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగించటం వలన కరెంట్ బిల్లులో వచ్చిన తేదా

కావున, $240x = 240$

సాధన : ఈ సమీకరణం నుండి $x = 1$ అవుతుంది.

వివరణ : $x = 1$ నుండి వాటర్ హీటర్ ఒక రోజుకు సరాసరి 1గం॥ వినియోగింపబడుతుంది.

EXERCISE A2.2

1. We will not discuss any particular solution here. You can use the same method as we used in last example, or any other method you think is suitable.

EXERCISE A2.3

1. We have already mentioned that the formulation part could be very detailed in real-life situations. Also, we do not validate the answer in word problems. Apart from this word problem have a ‘correct answer’. This need not be the case in real-life situations.
2. The important factors are (ii) and (iii). Here (i) is not an important factor although it can have an effect on the number of vehicles sold.

అభ్యాసం A2.2

1. ఒక ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని ఇక్కడ చర్చించాం. చివరి ఉదాహరణలో సూచించని విధానాన్ని గాని దీనికి సరిపోయే వేరే విధానాన్ని గాని మీరు ఉపయోగించవచ్చు.

అభ్యాసం A2.3

1. సూత్రీకరణ భాగం అనునది నిజ జీవిత పరిస్థితులకు వివరంగా ఉందని మనం ఇదివరకే పేర్కొన్నాం. పద సమస్యల సమాధానాన్ని కూడా ధృవీకరించలేం. ఇదికాకుండా పదసమస్యకు సరైన సమాధానం కలదు. నిజ జీవిత పరిస్థితుల్లో ఈవిధంగా ఉండాల్సిన అవసరం లేదు.

2. ముఖ్యమైన కారకాలు (ii) మరియు (iii) ఇక్కడ (i) అనేది ముఖ్యమైన కారకం కాదు. అయినప్పటికీ అమ్మబడిన వాహనాల సంఖ్య పై ఇది ప్రభావం చూపుతుంది.

Class IX

Suggested Pedagogical Processes	Learning Outcomes
The learners may be provided with opportunities individually or in groups and encouraged to—	**The learner—**
• work with real numbers and consolidate the concepts of numbers learnt in earlier classes. Some such opportunities could be: ▪ to observe and discuss real numbers.	• **applies** logical reasoning in classifying real numbers, proving their properties and using them in different situations.
▪ to recall and observe the processes involved in different mathematical concepts studied earlier and find situations in which they come across irrational numbers. For example, finding the length of the diagonal of a square with side, say, 2 units or area of a circle with a given radius, etc.	• **identifies/classifies** polynomials among algebraic expressions and factorises them by applying appropriate algebraic identities.
▪ to observe the properties of different types of numbers, such as, the denseness of the numbers, by devising different methods based on the knowledge of numbers gained in earlier classes. One of them could be by representing them on the number line.	• **relates** the algebraic and graphical representations of a linear equation in one or two variables and applies the concept to daily life situations.
▪ to facilitate in making mental estimations in different situations, such as, arranging numbers like 2, $2^{1/2}$, $2^{3/2}$, $2^{5/2}$, etc., in ascending (or descending) order in a given time frame or telling between which two integers the numbers like, $\sqrt{17}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{59}$, $-\sqrt{2}$, etc., lie. • apply relevant results to factorise the polynomials. • draw and compare the graphs of linear equations in one or two variables.	• **identifies** similarities and differences among different geometrical shapes. • **derives** proofs of mathematical statements particularly related to geometrical concepts, like parallel lines, triangles, quadrilaterals, circles, etc., by applying axiomatic approach and solves problems using them.
• discuss the proofs of mathematical statements using axioms and postulates. • play the following games related to geometry. ▪ For Euclid's axioms, if one group says, If equals are added to equals,	• **finds** areas of all types of triangles by using appropriate formulae and apply them in real life situations. • **constructs** different geometrical shapes like bisectors of line segments, angles and triangles under given

then the results are equal. The other group may be encouraged to provide example such as, If $a = b$, then $a + 3 = b + 3$, another group may extend it further as $a + 3 + 5 = b + 3 + 5$, and so on.

  - By observing different objects in the surroundings one group may find the similarities and the other group may find the differences with reference to different geometrical shapes— lines, rays, angles, parallel lines, perpendicular lines, congruent shapes, non-congruent shapes, etc., and justify their findings logically.

- work with algebraic identities using models and explore the use of algebraic identities in familiar contexts.
- discuss in groups about the properties of triangles and construction of geometrical shapes such as, triangles, line segment and its bisector, angle and its bisector under different conditions
- find and discuss ways to fix position of a point in a plane and different properties related to it.
- engage in a survey and discuss about different ways to represent data pictorially such as, bar graphs, histograms (with varying base lengths) and frequency polygons.
- collect data from their surroundings and calculate central tendencies such as, mean, mode or median.
- explore the features of solid objects from daily life situations to identify them as cubes, cuboids, cylinders, etc.
- play games involving throwing a dice, tossing a coin, etc., and find their chance of happening.
- do a project of collecting situations corresponding to different numbers representing probabilities.
- visualise the concepts using Geogebra and other ICT tools.

conditions and provides reasons for the processes of such constructions.

- **develops** strategies to locate points in a Cartesian plane.
- **identifies and classifies** the daily life situations in which mean, median and mode can be used.
- **analyses** data by representing it in different forms like, tabular form (grouped or ungrouped), bar graph, histogram (with equal and varying width and length), and frequency polygon.
- **calculates** empirical probability through experiments and describes its use in words.
- **derives** formulae for surface areas and volumes of different solid objects like, cubes, cuboids, right circular cylinders/ cones, spheres and hemispheres and applies them to objects found in the surroundings.
- **solves** problems that are not in the familiar context of the child using above learning. These problems should include the situations to which the child is not exposed earlier.

ROUGH WORK