State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

9th Class MATHEMATICS Semester (సెమిస్టర్) - 2

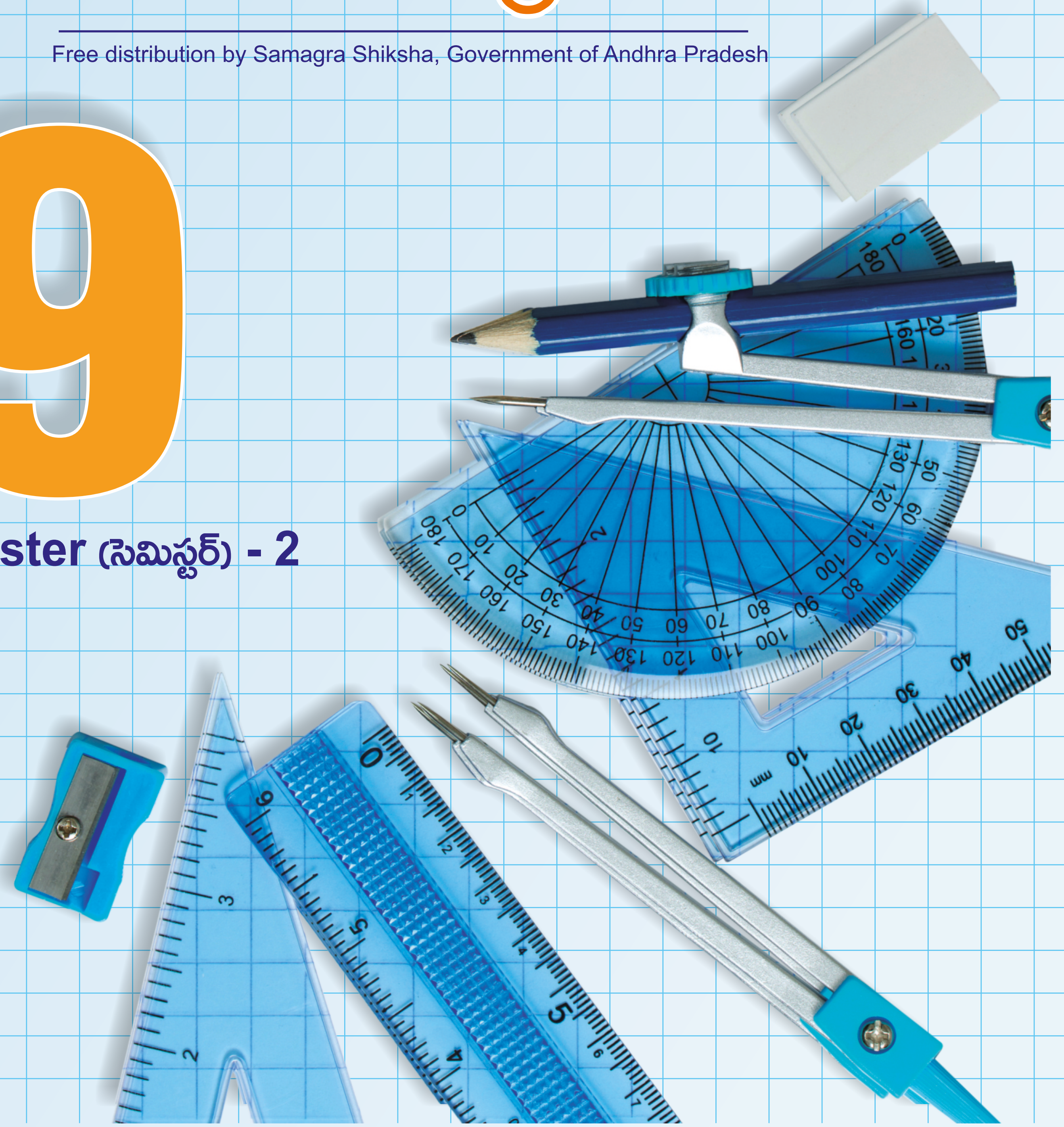
MATHEMATICS

గణితం శాస్త్రం

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Class 9

Semester (సెమిస్టర్) - 2



सत्यमेव जयते

CONSTITUTION OF INDIA

Preamble

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC and to secure to all its citizens:

JUSTICE
Social, economic and political;

LIBERTY
of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY
of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY
assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation;

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY
this twenty-sixth day of November, 1949, do
HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION

భారత రాజ్యాంగం - పౌర విధులు

1. రాజ్యాంగమునకు బద్ధుడై వుండుట, దాని ఆదర్శాలను, సంస్థలను, జాతీయ పతాకమును,జాతీయ గీతమును గౌరవించుట;
2. జాతీయ స్వాతంత్ర్య పోరాటమునకు స్ఫూర్తినిచ్చిన ఉన్నతాదర్శములను మనస్సుయందు ఉంచుకొని వాటిని అనుసరించుట;
3. భారత సార్వభౌమత్వం, ఐక్యత, అఖండతను సమర్థించుట మరియు సంరక్షించుట.
4. దేశమును రక్షించుట మరియు కోరినపుడు జాతికి సేవ చేయుట;
5. భారత ప్రజల మధ్య మత, భాష, ప్రాంతీయ, వర్గ వైవిధ్యములను అధిగమించి, సామరస్యమును, సోదర భావమును పెంపొందించుట, స్త్రీల గౌరవం తగ్గించు ఆచారములను విడనాడుట;
6. మన ఉమ్మడి సంస్కృతినీ, సుసంపన్న సంప్రదాయాలను గౌరవించి రక్షించుట;
7. అడవులు, సరస్సులు, నదులు, అడవి జంతువులతో సహా ప్రాకృతిక పరిసరాలను కాపాడి అభివృద్ధి చేయుట మరియు సమస్త జీవుల యెడల కరుణార్ద్రత కలిగి వుండుట.
8. శాస్త్రీయ దృక్పథాన్ని, మానవతావాదాన్ని, జిజ్ఞాసను, సంస్కరణ తత్వాన్ని పెంపొందించుకొనటం;
9. ప్రజల ఆస్తిని సంరక్షించుట, హింసను విడనాడుట;
10. ప్రయత్నాలు, సాధనల ఉన్నతస్థాయిలను నిరంతరం అందుకొనునట్లుగా వైయక్తిక, సమిష్టి కార్య రంగాలన్నింటిలో శ్రేష్ఠత కోసం, కృషి చేయుట ప్రాథమిక కర్తవ్యమై వుండవలెను.
11. ఆరు నుండి పద్నాలుగు సంవత్సరముల వయస్సు కలిగిన బాలునికి లేదా బాలికకు తల్లి తండ్రి లేదా సంరక్షకునిగావున్న వ్యక్తి తనబిడ్డ లేదా సందర్భానుసారము తన సంరక్షితునికి విద్యార్జనకు అవకాశములు కల్పించవలెను.

(అధికరణం 51 A)

విద్యాహక్కు చట్టం

6 నుండి 14 సంవత్సరముల పిల్లలందరికి ఉచిత నిర్బంధ ఎలిమెంటరీ విద్యనందించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇది ఏప్రిల్ 1, 2010 నుండి అమల్లోకి వచ్చింది.

చట్టంలోని ముఖ్యాంశాలు:

- పిల్లలందరికి అందుబాటులో పాఠశాలలను ఏర్పాటుచేయాలి.
- పాఠశాలలకు మౌలిక వసతులను కల్పించాలి.
- పిల్లలందరిని వయస్సుకు తగిన తరగతిలో చేర్పించాలి.
- వయస్సుకు తగ్గ తరగతిలో చేర్చిన తర్వాత తోటి వారితో సమానంగా ఉండటానికి ప్రత్యేకశిక్షణ ఇప్పించాలి.
- ప్రత్యేక అవసరాలు కల్గిన పిల్లలకు సాధారణ పిల్లలతోపాటు విద్యకొనసాగించడానికి తగువసతులు ఏర్పాట్లు చేయాలి.
- బడిలో చేర్చుకోడానికి ఎలాంటి పరీక్షలు నిర్వహించరాదు. ఎటువంటి రుసుము, చార్జీలు వసూలు చేయరాదు.
- బడిలో చేరిన పిల్లల పేరు తీసివేయడం, అదే తరగతిలో కొనసాగించడం చేయరాదు.
- పిల్లల్ని శారీరకంగా, మానసికంగా హింసించరాదు.
- వయస్సు నిర్ధారణ పత్రం, ఇతర ధృవీకరణ పత్రాలు లేవనే కారణం చేత పిల్లలకు బడిలో ప్రవేశాన్ని నిరాకరించరాదు.
- తగిన అర్హతలున్న వారిని మాత్రమే ఉపాధ్యాయులుగా నియమించాలి.
- పిల్లలు నిర్దేశించిన సామర్థ్యాలు సాధించేలా బోధనాభ్యసనం, మూల్యాంకనం ఉండాలి.
- ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పిల్లలకు ఎలాంటి బోర్డు పరీక్షలు నిర్వహించరాదు.
- పద్నాలుగు సంవత్సరాలు పూర్తయినప్పటికినీ, ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పాఠశాలలో పిల్లలు కొనసాగవచ్చును.
- బలహీన వర్గాలకు, ప్రతికూల పరిస్థితులను ఎదుర్కొంటున్న బృందాలకు చెందిన పిల్లలు ఏ విధమైన వివక్షతకు గురికాకుండా చూడాలి.
- రాజ్యాంగంలో పొందుపరిచిన విలువలకు అనుగుణంగా, విద్యార్థులను భయం, ఆందోళనకు గురిచేయని రీతిలో వారి సర్వతోముఖాభివృద్ధికి తోడ్పడే పాఠ్యప్రణాళిక రూపొందించాలి.

MATHEMATICS
Class IX (Semester - 2)

Text Book Development Committee

Sri **Praveen Prakash** IAS
Principal Secretary to Government
Department of School Education, AP

Sri. **S. Suresh Kumar** IAS
Commissioner of School Education , AP

Sri. **B. Srinivasa Rao** IAS
State Project Director, Samagra Shiksha, AP

Sri. **K. Ravindranath Reddy** MA., B.Ed.
Director, Government Textbook Press, AP

Dr. **B. Pratap Reddy** MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP

Programme Co-ordinators

Dr. **G. Kesava Reddy,** MSc, MSc, MEd, MPhil, PhD
Prof. C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri. **K. Satish Babu**
Professor, SCERT, AP

Sri. **S. Satish**
Leturer in Mathematics, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. **Ch.V.S. Ramesh Kumar**
Faculty, SCERT, AP

State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

First Published - 2023
New Impression - 2024

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 220 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Textbook Press
Amaravati
Andhra Pradesh

Translators

Sri G. Bhaskar Reddy, SA (Maths),
ZPHS, Venkatagiri, Tirupati

Sri A. Appanna, Lecturer (D),
DIET, Srikakulam

Sri P. Ravi Sankar, SA (Maths),
ZPHS, Komaragiri, Kakinada

Smt. Y. Jaya Bharati, SA (Maths),
ZPHS (G), Giddalur, Prakasam

Sri. Sd. Shahinsha, SA (Maths), MPLHS,
Ch.R. Palem, Bhimavaram, West Godavari

Dr. Ch. Ramesh, SA (Maths),
MPUPS, Vallabharaopalem, Guntur

Sri K. Madhusudhan, TGT (Maths),
APMS, Bandi Atmakur, Nandyal

Sri. H. Aruna siva Prasad, SA (Maths),
ZPHS, Mangalapalli, Chittoor

Smt. M. Sandhya Rani, SA (Maths),
KGBV, Gurla, Vizianagaram

Smt. P. Vijaya Kumari, TGT (Maths),
APMS, Dechavaram, Guntur

Sri. N. Prasad Babu, SA (Maths),
ZPHS, Agiripalli, Eluru

Editors for Translation

Dr. **D.S.N. Sastry,** Rtd. Principal,
AJ College of Education, Machilipatnam

Sri. **Kesiraju Srinivas**
Professor, SCERT, A.P

Dr. **P. Satyanarayana Sarma,** Rtd. Lecturer,
Montessori College of Education, Vijayawada

Sri. **M. Somasekhara Brahmanandam**
Faculty, SCERT, A.P

Sri. **S. Mahesh,** PGT,
JNV, Visakhapatnam (CBSE)

Sri. **A.S.V. Prabhakar**
Faculty, SCERT, A.P

Designing & Page Layout : Stock Assortment, Bapatla.

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF) 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Rationalisation of Content in the Textbooks

In view of the COVID-19 pandemic, it is imperative to reduce content load on students. The National Education Policy 2020, also emphasises reducing the content load and providing opportunities for experiential learning with creative mindset. In this background, the NCERT has undertaken the exercise to rationalise the textbooks across all classes. Learning Outcomes already developed by the NCERT across classes have been taken into consideration in this exercise.

Contents of the textbooks have been rationalised in view of the following:

- Overlapping with similar content included in other subject areas in the same class
- Similar content included in the lower or higher class in the same subject
- Difficulty level
- Content, which is easily accessible to students without much interventions from teachers and can be learned by children through self-learning or peer-learning
- Content, which is irrelevant in the present context

This present edition, is a reformatted version after carrying out the changes given above.

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalaya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)

R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The council acknowledges the valuable inputs for analysing syllabi, textbooks and the content, proposed to be rationalised for this edition by Gupreet Bhatnagar, CBSE Resource Person; Rahul Sofat, CBSE Resource Person; Ashutosh K. Wazalwar, *Professor,* DESM, NCERT and T.P. Sarma, *Professor,* DESM, NCERT.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

NATIONAL ANTHEM

Jana gana mana adhinayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata
Panjaba Sindhu Gujarata Maratha
Dravida Utkala Banga
Vindhya Himachala Yamuna Ganga
uchchala jaladhi taranga
Tava Subha name jage, tave subha asisa mage,
gahe tava jaya gatha.
Jana gana mangala dayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

-Rabindranath Tagore

జాతీయ గీతం

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగా!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ టాగూర్

PLEDGE | ప్రతిజ్ఞ

India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా
నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

- పైడిమర్రి వెంకటసుబ్బారావు

MATHEMATICS
గణితం
Class / తరగతి - IX
Semester (సెమిస్టర్) - II
CONTENTS / విషయ సూచిక

P7F9E2

Teacher corner

R8N1Y9

Student corner

0962CH07

CHAPTER 7

TRIANGLES

7.1 Introduction

You have studied about triangles and their various properties in your earlier classes. You know that a closed figure formed by three intersecting lines is called a triangle. ('Tri' means 'three'). A triangle has three sides, three angles and three vertices. For example, in triangle ABC, denoted as Δ ABC (see Fig. 7.1); AB, BC, CA are the three sides, $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C are the three angles and A, B, C are three vertices.

In Chapter 6, you have also studied some properties of triangles. In this chapter, you will study in details about the congruence of triangles, rules of congruence, some more properties of triangles and inequalities in a triangle. You have already verified most of these properties in earlier classes. We will now prove some of them.

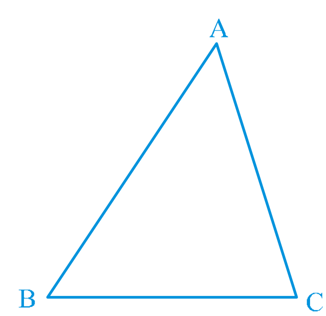


Fig. 7.1

7.2 Congruence of Triangles

You must have observed that two copies of your photographs of the same size are identical. Similarly, two bangles of the same size, two ATM cards issued by the same bank are identical. You may recall that on placing a one rupee coin on another minted in the same year, they cover each other completely.

Do you remember what such figures are called? Indeed they are called **congruent figures** ('congruent' means equal in all respects or figures whose shapes and sizes are both the same).

Now, draw two circles of the same radius and place one on the other. What do you observe? They cover each other completely and we call them as congruent circles.

D5L8Q6

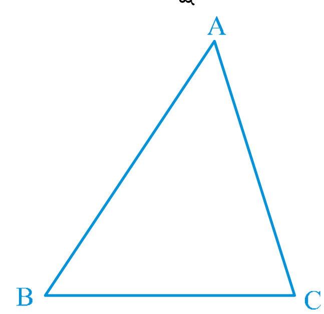
అధ్యాయం 7

త్రిభుజాలు

7.1 పరిచయం

మీరు క్రింది తరగతులలో త్రిభుజాలు మరియు వాటి వివిధ ధర్మాల గురించి అధ్యయనం చేశారు. మూడు ఖండన రేఖల ద్వారా ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటాన్ని త్రిభుజం అంటారు. ఒక త్రిభుజానికి మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలు మరియు మూడు శీర్షాలు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు, ABC త్రిభుజం, Δ ABC గా సూచించబడుతుంది. (పటం. 7.1 చూడండి) AB, BC, CA మూడు భుజాలు, $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C మూడు కోణాలు మరియు A, B, C మూడు శీర్షాలు.

6వ అధ్యాయంలో, మీరు కొన్ని త్రిభుజ ధర్మాలను అధ్యయనం చేశారు. ఈ అధ్యాయంలో, మీరు త్రిభుజంలోని త్రిభుజాల సర్వసమానత్వాన్ని గురించి, సర్వసమానత్వ నియమాలు, త్రిభుజాల మరికొన్ని ధర్మాలు మరియు త్రిభుజాలలోని అసమానతలు గురించి వివరంగా అధ్యయనం చేస్తారు. ఈ ధర్మాలను చాలా వరకు క్రింది తరగతులలో నిరూపించి ఉన్నారు. వీటిలో కొన్ని మనం ఇప్పుడు నిరూపిద్దాం.



పటం. 7.1

7.2 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

ఒకే కొలతలున్న మీ ఫోటోలు రెండు కాపీలు ఒకే రకంగా వుండడాన్ని మీరు గమనించే ఉంటారు. అదేవిధంగా ఒకే కొలత గల రెండు గాజులు, ఒకే బ్యాంకు ఇచ్చిన రెండు ఏటీఎం కార్డులు ఒకే రకంగా ఉంటాయి. ఒకే సంవత్సరంలో ముద్రించిన రెండు ఒక రూపాయి నాణాలు ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచిన రెండు పరస్పరం ఏకీభవించడాన్ని గుర్తు చేసుకోండి.

ఈ విధమైన ఆకృతులను ఏమంటారోనని గుర్తు చేసుకొన్నచో వాటిని సర్వసమాన ఆకృతులు అని అంటారు. (సర్వసమానం అంటే అన్ని విధాల సమానంగా ఉండడం లేదా ఆకారం, పరిమాణం రెండింటిలోనూ సమానం అని అర్థం.)

ఇప్పుడు ఒకే వ్యాసార్థం గల రెండు వృత్తాలను గీసి ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచండి. మీరు ఏమి గమనించారు? అవి పరస్పరం ఒకదానితో ఒకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయి. అలాంటి వాటిని మనం సర్వసమాన వృత్తాలు అంటాం.

Repeat this activity by placing one square on the other with sides of the same measure (see Fig. 7.2) or by placing two equilateral triangles of equal sides on each other. You will observe that the squares are congruent to each other and so are the equilateral triangles.

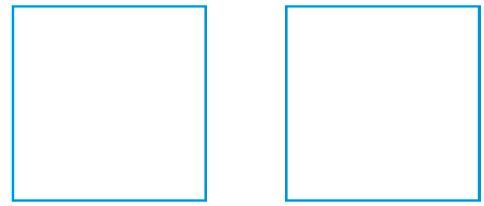


Fig. 7.2

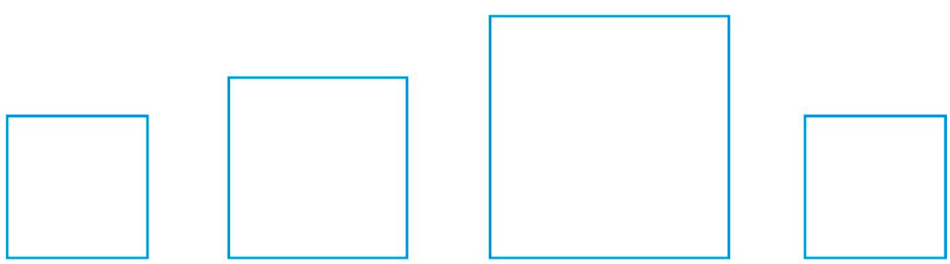
You may wonder why we are studying congruence. You all must have seen the ice tray in your refrigerator. Observe that the moulds for making ice are all congruent. The cast used for moulding in the tray also has congruent depressions (may be all are rectangular or all circular or all triangular). So, whenever identical objects have to be produced, the concept of congruence is used in making the cast.

Sometimes, you may find it difficult to replace the refill in your pen by a new one and this is so when the new refill is not of the same size as the one you want to remove. Obviously, if the two refills are identical or congruent, the new refill fits.

So, you can find numerous examples where congruence of objects is applied in daily life situations.

Can you think of some more examples of congruent figures?

Now, which of the following figures are not congruent to the square in Fig 7.3 (i) :



(i) (ii) (iii) (iv)

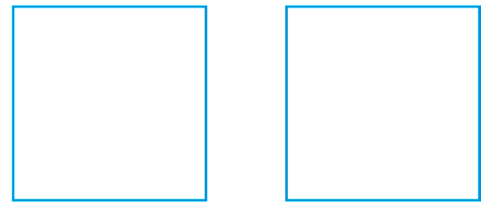
Fig. 7.3

The large squares in Fig. 7.3 (ii) and (iii) are obviously not congruent to the one in Fig 7.3 (i), but the square in Fig 7.3 (iv) is congruent to the one given in Fig 7.3 (i).

Let us now discuss the congruence of two triangles.

You already know that two triangles are congruent if the sides and angles of one triangle are equal to the corresponding sides and angles of the other triangle.

భుజం పొడవు ఒకటే ఉన్న రెండు చతురస్రాలను లేదా సమాన భుజాలు గల రెండు సమబాహు త్రిభుజాలను ఒకదానిపై ఒకటి ఏకీభవించునట్లు ఈ కృత్యాన్ని మరల చేయండి. చతురస్రాలు రెండు పరస్పరం సమానం మరియు అదే విధంగా సమబాహు త్రిభుజాలు కూడా సర్వసమానమని మీరు గమనిస్తారు.



పటం. 7.2

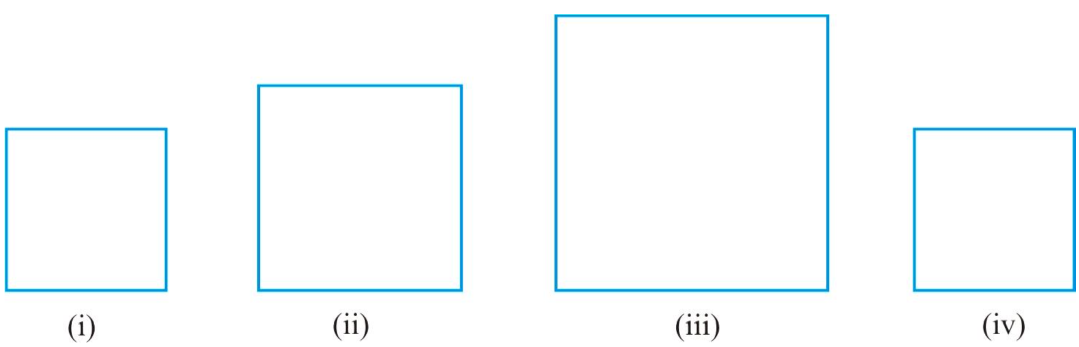
సర్వసమానత్వాన్ని ఎందుకు చదవాలని మీకు అనిపించవచ్చు. మీరు ఐస్ క్యూబ్ ట్రేలను రిఫ్రిజిరేటర్‌లో చూసి ఉంటారు. ట్రే యొక్క అచ్చులు మరియు ట్రేలోని గుంతలు కూడా సర్వసమానం (అవి దీర్ఘచతురస్రాకార లేదా వృత్తాకార లేదా త్రిభుజాకారంలో ఉండవచ్చు). అందువలన, ఒకే రూపం గల ఆకారాలను తయారు చేయడానికి సర్వ సమానత్వ పరికల్పనలను ఉపయోగిస్తాము.

మీరు ఉపయోగించే బాల్ పాయింట్ పెన్ రీఫిల్ తీసి కొత్త రీఫిల్ వేయాలంటే అది పాత రీఫిల్ పరిమాణంలో లేకపోతే మార్చడానికి కష్టం అవుతుంది. ఒకవేళ రెండు రీఫిల్స్ ఒకేరకం సర్వసమానం అయితేనే కొత్త రీఫిల్, పెన్ కు సరిపోతుంది.

నిత్యజీవితంలో ఇలాంటి సర్వసమాన వస్తువులకు అనేక ఉదాహరణలు కనిపిస్తుంటాయి.

మరికొన్ని సర్వసమానత్వ చిత్రాల గురించి ఆలోచించగలరా?

కింద ఇవ్వబడిన పటాలలో, పటం 7.3(i) లలో ఇవ్వబడిన చతురస్రానికి సర్వసమానం కాని పటాలు ఏవి? :



పటం. 7.3

పెద్ద చతురస్రాలైన పటం. 7.3 (ii), (iii) లు పటం 7.3 (i), కు సర్వసమానం కాదు కానీ, పటం 7.3 (iv) కు సర్వసమానం.

ఇప్పుడు రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం గురించి చర్చిద్దాం.

ఒక త్రిభుజం యొక్క అన్ని భుజాలు, కోణాలు మరొక త్రిభుజంలోని అనురూప భుజాలు మరియు అనురూప కోణాలకు సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవుతాయని మీకు తెలుసు.

Now, which of the triangles given below are congruent to triangle ABC in Fig. 7.4 (i)?

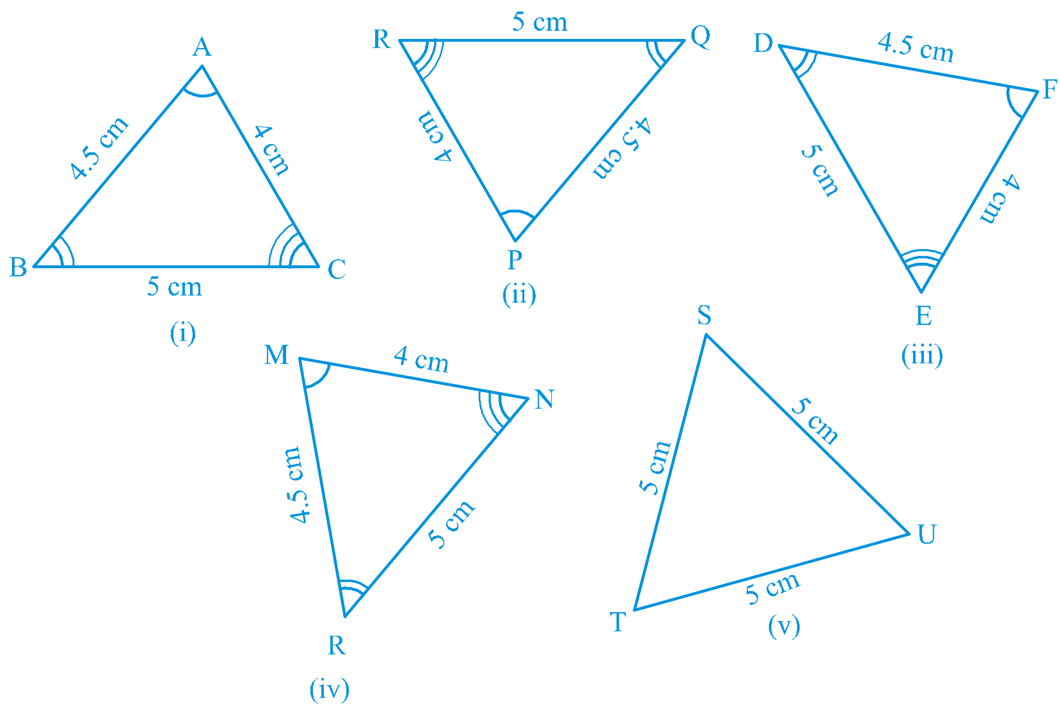


Fig. 7.4

Cut out each of these triangles from Fig. 7.4 (ii) to (v) and turn them around and try to cover Δ ABC. Observe that triangles in Fig. 7.4 (ii), (iii) and (iv) are congruent to Δ ABC while Δ TSU of Fig 7.4 (v) is not congruent to Δ ABC.

If Δ PQR is congruent to Δ ABC, we write Δ PQR $\cong$ Δ ABC.

Notice that when Δ PQR $\cong$ Δ ABC, then sides of Δ PQR fall on corresponding equal sides of Δ ABC and so is the case for the angles.

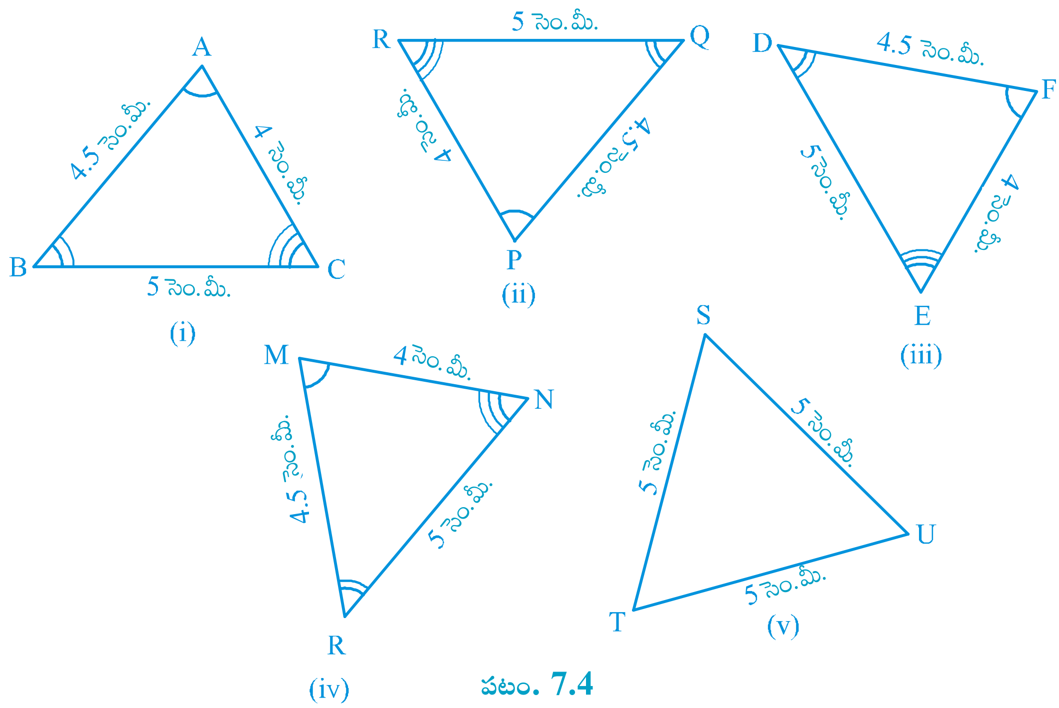
That is, PQ covers AB, QR covers BC and RP covers CA; $\angle$ P covers $\angle$ A, $\angle$ Q covers $\angle$ B and $\angle$ R covers $\angle$ C. Also, there is a one-one correspondence between the vertices. That is, P corresponds to A, Q to B, R to C and so on which is written as

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

Note that under this correspondence, Δ PQR $\cong$ Δ ABC; but it will not be correct to write ΔQRP $\cong$ Δ ABC.

Similarly, for Fig. 7.4 (iii),

ఇప్పుడు కింది త్రిభుజాలలో ఏ త్రిభు జం, పటం 7.4 (i) త్రిభుజం ABC కి సర్వసమానం?



పటం. 7.4

పటం 7.4 లో ఉన్న (ii) నుండి (v) వరకు ఉన్న అన్ని త్రిభుజాలను కత్తిరించి, ఆ త్రిభుజాలను త్రిప్పుతూ Δ ABC తో ఏకీభవించేట్లు ఉంచండి. పటం. 7.4 (ii), (iii) మరియు (iv) త్రిభుజాలు Δ ABC కి సర్వసమానం అవుతాయి. కానీ పటం 7.4 (v) లో ఉన్న Δ TSU మాత్రం Δ ABC కి సర్వసమానం కాదు.

Δ PQR కి సర్వసమానం అయితే, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అని రాస్తాం.

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అయితే Δ PQR యొక్క భుజాలు మరియు కోణాలు Δ ABC కి సమానం అయిన అనురూప భుజాలు మరియు అనురూప కోణాలతో ఏకీభవిస్తాయని గమనించండి.

అంటే PQ తో AB, QR తో BC మరియు RP తో CA; $\angle P$ తో $\angle A$, $\angle Q$ తో $\angle B$ మరియు $\angle R$ తో $\angle C$ లు ఏకీభవిస్తాయి. ఇక్కడ శీర్షాల మధ్య ఏక – ఏక సంబంధం ఉంటుంది. అనగా శీర్షం P శీర్షం A, Q తో B, R తో C ఏకీభవిస్తాయి. దీనిని ఈ విధంగా రాస్తాం.

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

ఇక్కడ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$; అవుతుంది కానీ, $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ గా రాయడం తప్పు అవుతుంది.

అదేవిధంగా పటం 7.4 (iii) లో,

$$FD \leftrightarrow AB,\ DE \leftrightarrow BC \ \text{ and } EF \leftrightarrow CA$$

$$\text{and } F \leftrightarrow A,\ D \leftrightarrow B \ \text{ and } E \leftrightarrow C$$

So, Δ FDE $\cong \Delta$ ABC but writing Δ DEF $\cong \Delta$ ABC is not correct.

Give the correspondence between the triangle in Fig. 7.4 (iv) and Δ ABC.

So, it is necessary to write the correspondence of vertices correctly for writing of congruence of triangles in symbolic form.

Note that in **congruent triangles corresponding parts** are **equal** and we write in short 'CPCT' for *corresponding parts of congruent triangles*.

7.3 Criteria for Congruence of Triangles

In earlier classes, you have learnt four criteria for congruence of triangles. Let us recall them.

Draw two triangles with one side 3 cm. Are these triangles congruent? Observe that they are not congruent (see Fig. 7.5).

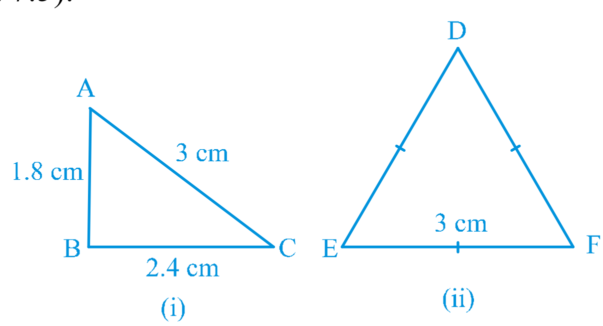


Fig. 7.5

Now, draw two triangles with one side 4 cm and one angle 50° (see Fig. 7.6). Are they congruent?

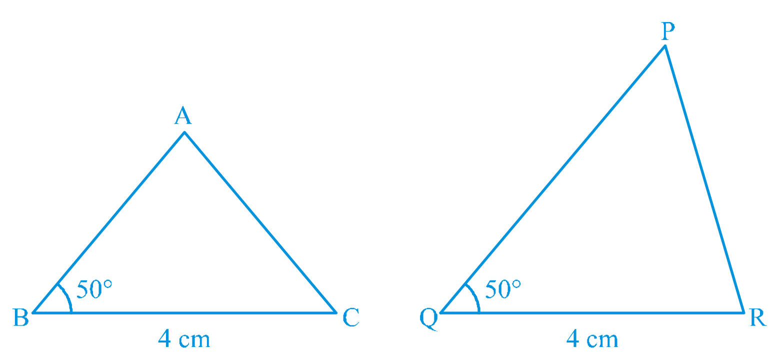


Fig. 7.6

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ మరియు $EF \leftrightarrow CA$

మరియు $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ మరియు $E \leftrightarrow C$

కనుక, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ కానీ, $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ గా రాయడం తప్పు అవుతుంది.

పటం 7.4 (iv) లో వున్న త్రిభుజం మరియు ΔABC కి గల అనురూపతను తెలపండి.

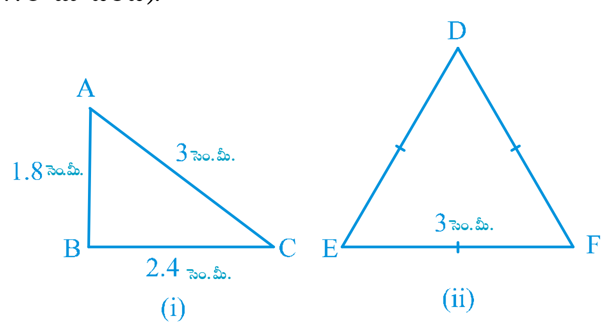
కాబట్టి, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వాన్ని గుర్తుల రూపంలో రాసేటప్పుడు శీర్షాల అనురూప క్రమాన్ని తప్పనిసరిగా సరిగ్గా రాయాలి.

గమనిక సర్వసమాన త్రిభుజాలలో అనురూప భాగాలు సమానం మరియు వాటిని **congruent triangles corresponding parts** (CPCT) అని రాయవచ్చు. అంటే సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భాగాలు అని అర్థం

7.3 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి నియమాలు

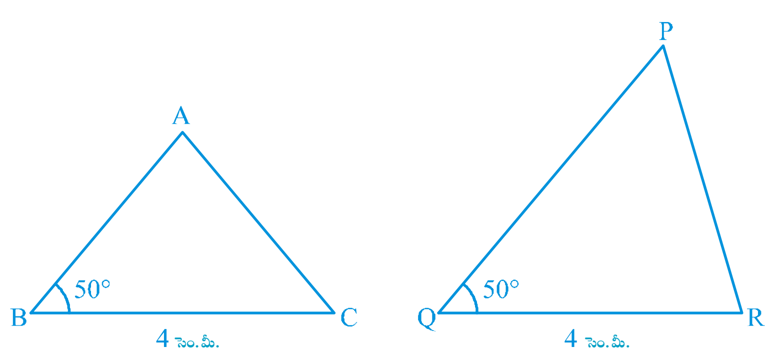
క్రింది తరగతులలో త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి నియమాలు నాల్గింటిని నేర్చుకున్నారు. వాటిని గుర్తుతెచ్చుకోండి.

ఒక భుజం పొడవు 3 సెం.మీ. వుండునట్లు రెండు త్రిభుజాలు గీయండి. ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమానమా? అవి సర్వసమానం కావని గమనించండి. (పటం 7.5 చూడండి).



పటం. 7.5

ఒక భుజం పొడవు 4సెం.మీ. మరియు ఒక కోణం 50° ఉండునట్లు రెండు త్రిభుజాలు గీయండి. (పటం. 7.6 చూడండి). అవి సర్వసమానాలా?



పటం. 7.6

See that these two triangles are not congruent.

Repeat this activity with some more pairs of triangles.

So, equality of one pair of sides or one pair of sides and one pair of angles is not sufficient to give us congruent triangles.

What would happen if the other pair of arms (sides) of the equal angles are also equal?

In Fig 7.7, BC = QR, $\angle$ B = $\angle$ Q and also, AB = PQ. Now, what can you say about congruence of Δ ABC and Δ PQR?

Recall from your earlier classes that, in this case, the two triangles are congruent. Verify this for Δ ABC and Δ PQR in Fig. 7.7.

Repeat this activity with other pairs of triangles. Do you observe that the equality of two sides and the included angle is enough for the congruence of triangles? Yes, it is enough.

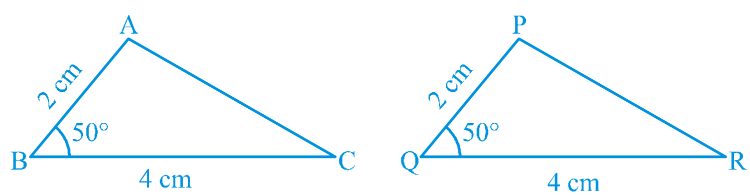


Fig. 7.7

This is the first criterion for congruence of triangles.

Axiom 7.1 (SAS congruence rule) : *Two triangles are congruent if two sides and the included angle of one triangle are equal to the two sides and the included angle of the other triangle.*

This result cannot be proved with the help of previously known results and so it is accepted true as an axiom (see Appendix 1).

Let us now take some examples.

Example 1 : In Fig. 7.8, OA = OB and OD = OC. Show that

(i) Δ AOD $\cong$ Δ BOC and (ii) AD || BC.

Solution : (i) You may observe that in Δ AOD and Δ BOC,

$$\left.\begin{aligned} OA &= OB \\ OD &= OC \end{aligned}\right\} \quad \text{(Given)}$$

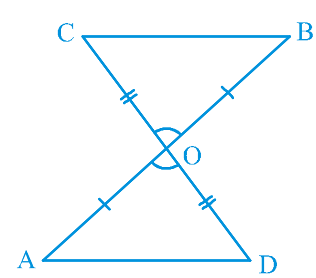


Fig. 7.8

ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు కాదు.

మరికొన్ని త్రిభుజాల జతలతో ఈ కృత్యాన్ని మరలు చేయండి.

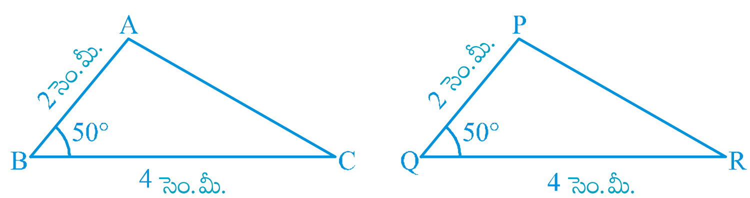
కాబట్టి, సర్వసమాన త్రిభుజాలు కావడానికి ఒక జత సమాన భుజాలు లేదా ఒక జత భుజాలు మరియు ఒక జత కోణాలు సరిపోవు.

ఒకవేళ సమాన కోణాలు కలిగిన వేరే ఒక జత భుజాలు కూడా సమానం అయితే ఏమవుతుంది?

పటం. 7.7లో, $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ మరియు $AB = PQ$. ΔABC మరియు ΔPQR త్రిభుజాల సర్వసమానత్వాన్ని గురించి మీరు ఏం చెప్పగలరు?

ఈ విషయంలో, రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని కింది తరగతులలో మీరు నేర్చుకొన్నది గుర్తుతెచ్చుకోండి. పటం 7.7 లో, ఇది ΔABC మరియు ΔPQR లను పరీక్షించండి.

వేరే త్రిభుజాల జతలతో ఈ కృత్యాన్ని మరల నిర్వహించండి. రెండు భుజాలు సమానం మరియు వాటి మధ్య ఏర్పడే కోణం సమానంగా ఇస్తే త్రిభుజాలు సర్వసమానాలని చెప్పడానికి సరిపోతుందని మీరు భావిస్తున్నారా? అవును, ఇది చాలు.



పటం. 7.7

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఇది మొదటి నియమం.

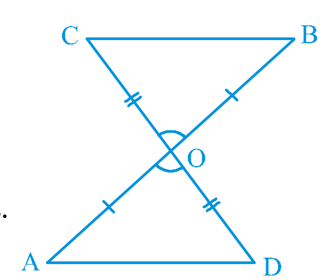
స్వీకృతం (భు.కో.భు. నియమం) : రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య ఏర్పడిన కోణం, వరుసగా రెండో త్రిభుజంలోని సదృశ్య భుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణానికి సమానం అయితే, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

ఇంతకుముందు తెలిసిన ఫలితాల సహాయంతో ఈ ఫలితం నిరూపించబడదు. కనుక, ఇది స్వీకృతంగా అంగీకరించాల్సిన నిజం. (అనుబంధం 1 చూడండి).

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : పటం 7.8 లో $OA = OB$ మరియు $OD = OC$.

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ మరియు (ii) $AD \parallel BC$ అని నిరూపించండి.



పటం. 7.8

సాధన : (i) ΔAOD మరియు ΔBOC లలో

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OD = OC \end{array}\right\} \quad \text{(దత్తాంశం)}$$

Also, since $\angle$ AOD and $\angle$ BOC form a pair of vertically opposite angles, we have

$$\angle AOD = \angle BOC.$$

So, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (by the SAS congruence rule)

(ii) In congruent triangles AOD and BOC, the other corresponding parts are also equal.

So, $\angle OAD = \angle OBC$ and these form a pair of alternate angles for line segments AD and BC.

Therefore, $AD \parallel BC$.

Example 2 : AB is a line segment and line l is its perpendicular bisector. If a point P lies on l, show that P is equidistant from A and B.

Solution : Line $l \perp$ AB and passes through C which is the mid-point of AB (see Fig. 7.9). You have to show that PA = PB. Consider Δ PCA and Δ PCB.

We have AC = BC (C is the mid-point of AB)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (Given)

PC = PC (Common)

So, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS rule)

and so, PA = PB, as they are corresponding sides of congruent triangles.

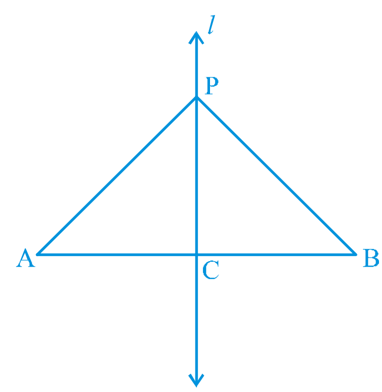


Fig. 7.9

Now, let us construct two triangles, whose sides are 4 cm and 5 cm and one of the angles is 50° and this angle is not included in between the equal sides (see Fig. 7.10). Are the two triangles congruent?

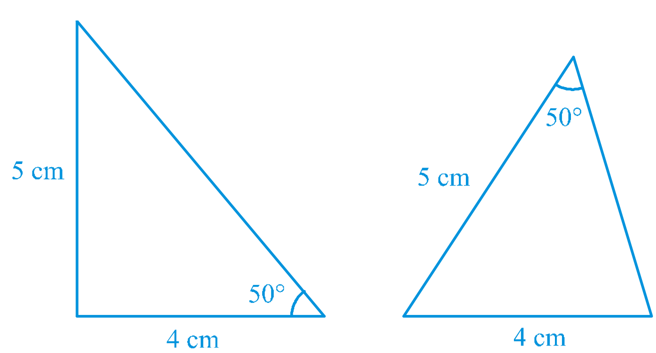


Fig. 7.10

ఇంకా, $\angle AOD$ మరియు $\angle BOC$ ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణాలను ఏర్పరచును.

$$\angle AOD = \angle BOC$$

కనుక, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం)

(ii) సర్వసమానత్వ త్రిభుజాలైన AOD మరియు BOC లలో, సదృశ భాగాలు కూడా సమానం.

కావున, $\angle OAD = \angle OBC$ మరియు ఇవి AD మరియు BC రేఖా ఖండములకు ఒక జత ప్రత్యామ్నాయ కోణాలను ఏర్పరచును.

కాబట్టి, $AD \parallel BC$

ఉదాహరణ 2 : AB ఒక సరళ రేఖ మరియు రేఖ l దీనికి లంబసమద్విఖండన రేఖ. బిందువు P అనేది రేఖ l పై ఉంటే, బిందువు P అనేది, A మరియు B కి సమాన దూరంలో ఉంటుందని చూపండి.

సాధన : రేఖ $l \perp AB$ మరియు రేఖాఖండము AB మధ్య బిందువు C గుండా పోవును. (పటం 7.9 ను చూడండి). PA = PB అని చూపాలి. ΔPCA మరియు ΔPCB లను పరిగణించండి.

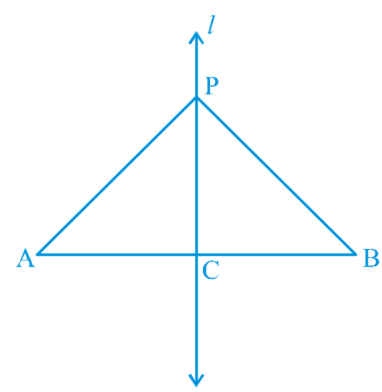
AC = BC (AB కి మధ్య బిందువు C)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (దత్తాంశం)

PC = PC (ఉమ్మడి భుజం)

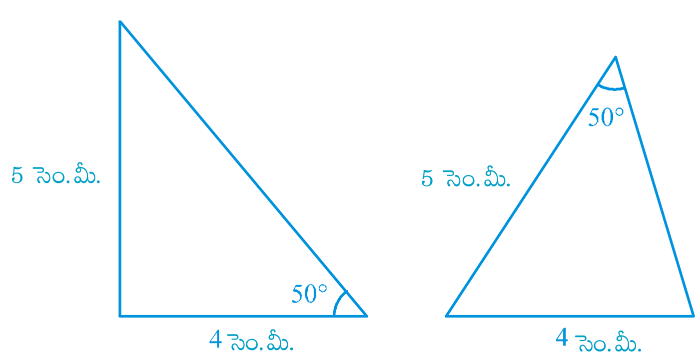
కావున, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (భు.కో. భు. నియమం)

అదేవిధంగా, PA = PB, (ఇవి సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)



పటం. 7.9

ఇప్పుడు, భుజాల పొడవులు 4సెం.మీ., 5సెం.మీ. మరియు వాటిలో ఒక కోణం 50° ఉండేటట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీద్దాం మరియు ఈ కోణం రెండు సమాన భుజాల మధ్య ఉండకుండా గీయాలి. (పటం 7.10 చూడండి). ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవుతాయా?



పటం. 7.10

Notice that the two triangles are not congruent.

Repeat this activity with more pairs of triangles. You will observe that for triangles to be congruent, it is very important that the equal angles are included between the pairs of equal sides.

So, SAS *congruence rule holds* but not ASS or SSA rule.

Next, try to construct the two triangles in which two angles are 60° and 45° and the side included between these angles is 4 cm (see Fig. 7.11).

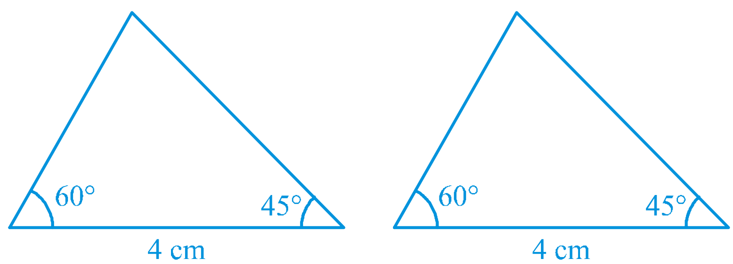


Fig. 7.11

Cut out these triangles and place one triangle on the other. What do you observe? See that one triangle covers the other completely; that is, the two triangles are congruent. Repeat this activity with more pairs of triangles. You will observe that equality of two angles and the included side is sufficient for congruence of triangles.

This result is the **Angle-Side-Angle** criterion for congruence and is written as **ASA** criterion. You have verified this criterion in earlier classes, but let us state and prove this result.

Since this result can be proved, it is called a theorem and to prove it, we use the SAS axiom for congruence.

Theorem 7.1 (ASA congruence rule) : *Two triangles are congruent if two angles and the included side of one triangle are equal to two angles and the included side of other triangle.*

Proof : We are given two triangles ABC and DEF in which:

$$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

and $\quad BC = EF$

We need to prove that $\quad \Delta ABC \cong \Delta DEF$

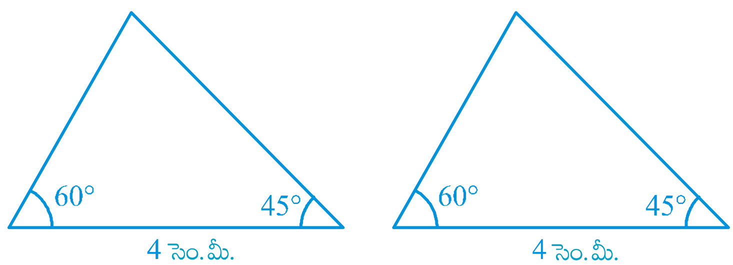
For proving the congruence of the two triangles see that three cases arise.

ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం కాదనే విషయం గమనించండి.

ఇంకా మరికొన్ని త్రిభుజాల జతలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని మరలా చేయండి. త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వం కావాలంటే ముఖ్యంగా సమాన భుజాల జతల మధ్య సమకోణాలు ఉండాలి.

అందువలన, భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం వర్తిస్తుంది. కాని, కో.భు. భు లేదా భు. భు.కో. నియమం వర్తించదు.

తర్వాత, రెండు కోణాలు 60° మరియు 45° వాటి మధ్య భుజం 4 సెం.మీ. ఉండునట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. (పటం. 7.11 చూడండి).



పటం. 7.11

ఈ భుజాలను కత్తిరించి, ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచండి. ఏమి గమనించారు? ఒక త్రిభుజాన్ని మరొక త్రిభుజాన్ని పూర్తిగా ఏకీభవించింది అంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. ఇంకా మరికొన్ని త్రిభుజాల జతలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని మరల చేయండి. త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావాలంటే రెండు సమకోణాలు మరియు వాటి సదృశ భుజాలు సమానంగా ఉంటే చాలు అనే విషయం మీరు గమనిస్తారు.

ఈ ఫలితం త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి **కోణము – భుజము – కోణము** నియమం. దీనిని **కో. భు. కో** నియమం అని రాస్తాం. ఈ నియమం కింది తరగతులలో పరీక్షించారు. అయితే ఇప్పుడు ఆ ఫలితాన్ని నిరూపిద్దాం.

ఈ ఫలితం నిరూపించబడవచ్చు కనుక, దీనిని సిద్ధాంతం అంటారు. మరియు దానిని నిరూపించడానికి భు.కో.భు. నియమం ఉపయోగిస్తాం.

సిద్ధాంతం 7.1 (కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమం) : రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు కోణాలు, వాటి ఉమ్మడి భుజం వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ కోణాలు, మరియు సదృశ భుజానికి సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

నిరూపణ : ABC మరియు DEF అనే రెండు త్రిభుజాలు ఇవ్వబడినవి.

వాటిలో $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

మరియు $BC = EF$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అని నిరూపిద్దాం

రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వాన్ని నిరూపించడానికి 3 సందర్భాలు ఉన్నాయి.

Case (i) : Let AB = DE (see Fig. 7.12).

Now what do you observe? You may observe that

$$AB = DE \quad \text{(Assumed)}$$

$$\angle B = \angle E \quad \text{(Given)}$$

$$BC = EF \quad \text{(Given)}$$

So, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (By SAS rule)

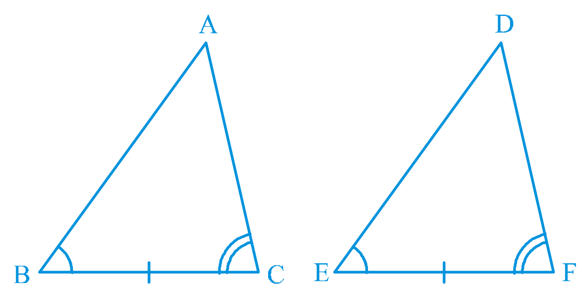


Fig. 7.12

Case (ii) : Let if possible AB > DE. So, we can take a point P on AB such that PB = DE. Now consider Δ PBC and Δ DEF (see Fig. 7.13).

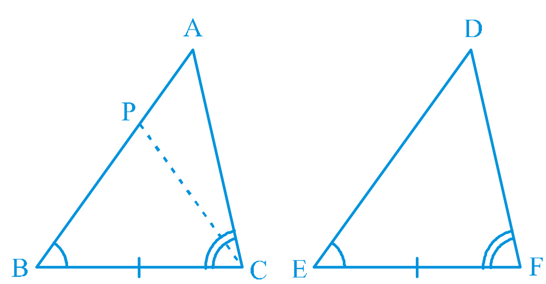


Fig. 7.13

Observe that in Δ PBC and Δ DEF,

$$PB = DE \quad \text{(By construction)}$$

$$\angle B = \angle E \quad \text{(Given)}$$

$$BC = EF \quad \text{(Given)}$$

So, we can conclude that:

$\Delta PBC \cong \Delta DEF$, by the SAS axiom for congruence.

సందర్భం (i) : AB = DE అయితే మీరు ఏం గమనించారు (పటం. 7.12 చూడండి).

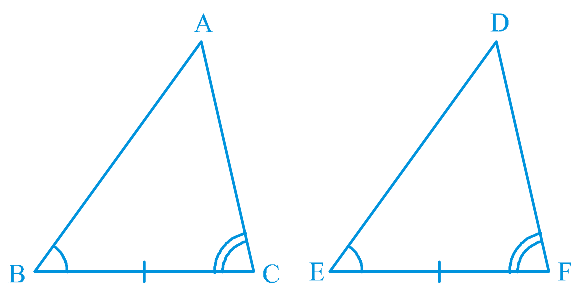
మీరు ఈ క్రింది అంశాలు గమనించవచ్చు.

AB = DE (అనుకున్నది)

$\angle B = \angle E$ (దత్తాంశం)

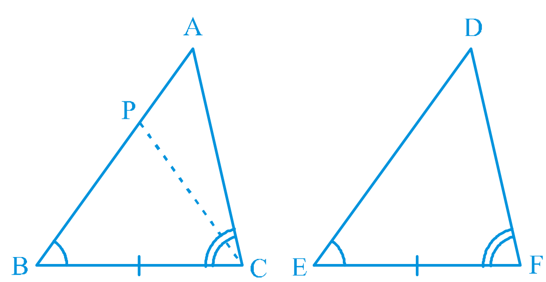
BC = EF (దత్తాంశం)

కనుక, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (భు.కో.భు. నియమం ప్రకారం)



పటం. 7.12

సందర్భం (ii) : AB > DE అనుకోండి. PB = DE అగునట్లు AB పై బిందువు P ను తీసుకోండి. ఇప్పుడు ΔPBC మరియు ΔDEF ను తీసుకోండి (పటం 7.13 చూడండి).



పటం. 7.13

ΔPBC మరియు ΔDEF ను పరిశీలించండి.

PB = DE (నిర్మాణం ప్రకారం)

$\angle B = \angle E$ (దత్తాంశం)

BC = EF (దత్తాంశం)

కావున

$\Delta PBC \cong \Delta DEF$ అని భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం చెప్పగలం.

Since the triangles are congruent, their corresponding parts will be equal.

So, $\angle PCB = \angle DFE$

But, we are given that

$\angle ACB = \angle DFE$

So, $\angle ACB = \angle PCB$

Is this possible?

This is possible only if P coincides with A.

or, $BA = ED$

So, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (by SAS axiom)

Case (iii) : If $AB < DE$, we can choose a point M on DE such that $ME = AB$ and repeating the arguments as given in Case (ii), we can conclude that $AB = DE$ and so, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Suppose, now in two triangles two pairs of angles and one pair of corresponding sides are equal but the side is not included between the corresponding equal pairs of angles. Are the triangles still congruent? You will observe that they are congruent. Can you reason out why?

You know that the sum of the three angles of a triangle is 180°. So if two pairs of angles are equal, the third pair is also equal (180° – sum of equal angles).

So, two *triangles are congruent if any two pairs of angles and one pair of corresponding sides are equal*. We may call it as the **AAS Congruence Rule**.

Now let us perform the following activity :

Draw triangles with angles 40°, 50° and 90°. How many such triangles can you draw?

In fact, you can draw as many triangles as you want with different lengths of sides (see Fig. 7.14).

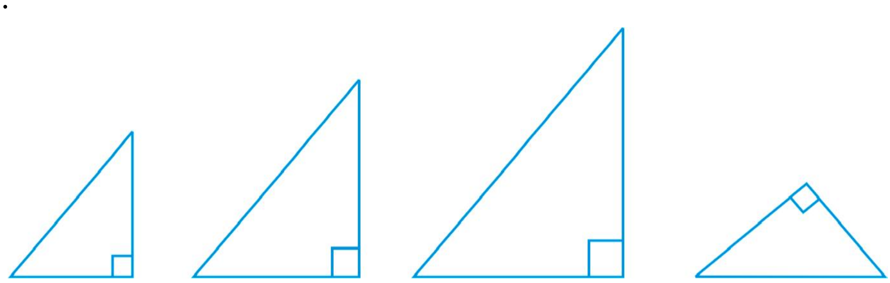


Fig. 7.14

త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వం కావడం వల్ల వాటి సదృశ భాగాలు సమానం

కావున, $\angle PCB = \angle DFE$

కాని,

$\angle ACB = \angle DFE$ ఇవ్వబడింది.

అందువలన, $\angle ACB = \angle PCB$

కావున ఇది సాధ్యమేనా?

ఇది సాధ్యం కావాలంటే P బిందువు, A బిందువుతో ఏకీభవించాలి.

లేదా, $BA = ED$

కనుక, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (భు.కో.భు. నియమం ప్రకారం)

సందర్భం (iii) : $AB < DE$ అయిన, $ME = AB$ అగునట్లు, DE పై ఒక బిందువు M ను తీసుకోవచ్చు మరియు సందర్భం (ii) లో చెప్పినట్లు కొనసాగించినచో, $AB = DE$ అని చెప్పవచ్చు. అప్పుడు $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

రెండు త్రిభుజాలలో రెండు జతల కోణాలు మరియు ఒక జత సదృశ భుజాలు సమానం అనుకోండి. కానీ, ఆ భుజం సదృశ సమాన కోణాల జతల మధ్య లేకపోతే, ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవుతాయా? అవి సర్వసమానాలవుతాయని మీరు గమనించవచ్చు. ఎందుకో మీరు కారణం చెప్పగలరా?

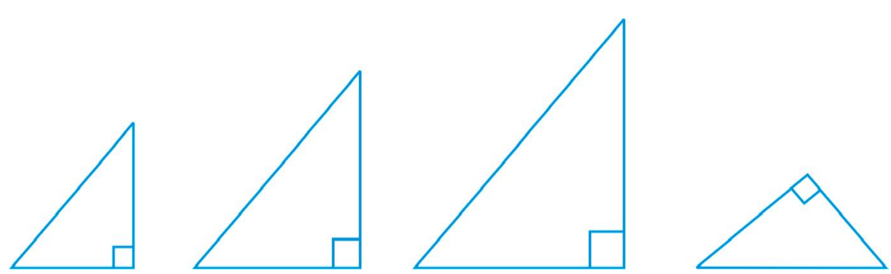
ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° అని మీకు తెలుసు. కనుక రెండు కోణాలు సమానం అయితే, మూడవ కోణం కూడా సమానం (మూడు కోణాల మొత్తం 180°).

కనుక, *రెండు త్రిభుజాలలో ఏవైనా రెండు జతల కోణాలు మరియు ఒక జత సదృశ భుజాలు సమానం అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.* దీనిని **కో. కో.భు. సర్వసమాన నియమం** అంటాం.

ఇపుడు ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాం :

కోణాలు 40°, 50° మరియు 90° ఉండునట్లు త్రిభుజాలను గీయండి. ఈ విధంగా మీరు ఎన్ని త్రిభుజాలు గీయగలరు?

వేర్వేరు భుజాల కొలతలు ఉండేటట్లు అనేక త్రిభుజాలను మీరు గీయగలరు. (పటం 7.14 చూడండి).



పటం. 7.14

Observe that the triangles may or may not be congruent to each other.

So, equality of three angles is not sufficient for congruence of triangles. Therefore, for congruence of triangles out of three equal parts, one has to be a side.

Let us now take some more examples.

Example 3 : Line-segment AB is parallel to another line-segment CD. O is the mid-point of AD (see Fig. 7.15). Show that (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O is also the mid-point of BC.

Solution : (i) Consider Δ AOB and Δ DOC.

$\angle ABO = \angle DCO$

(Alternate angles as AB || CD and BC is the transversal)

$\angle AOB = \angle DOC$

(Vertically opposite angles)

OA = OD (Given)

Therefore, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS rule)

(ii) OB = OC (CPCT)

So, O is the mid-point of BC.

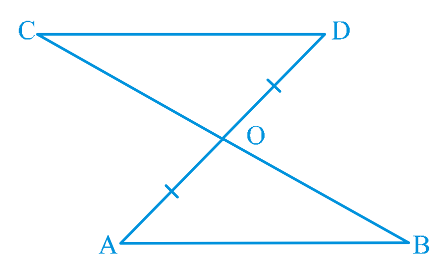


Fig. 7.15

EXERCISE 7.1

1. In quadrilateral ACBD,

AC = AD and AB bisects $\angle$ A (see Fig. 7.16). Show that $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.

What can you say about BC and BD?

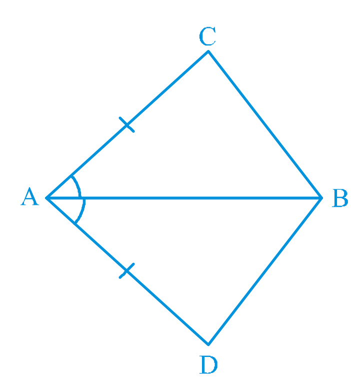


Fig. 7.16

త్రిభుజాలు ఒకదానికొకటి సర్వసమానంగా ఉండవచ్చు లేక సమానంగా ఉండకపోవచ్చని గమనించండి.

కావున, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మూడు కోణాలు సమానమైనంత మాత్రాన సరిపోదు. అందువలన త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మూడు సమాన భాగాలలో ఒకటి భుజం అయివుండాలి.

ఇప్పుడు, ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 3 : రేఖాఖండం AB, మరొక రేఖాఖండం CD కు సమాంతరంగా ఉంది. AD మధ్య బిందువు O (పటం. 7.15 చూడండి). (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) BC కి కూడా మధ్య బిందువు O అవుతస్తుందని చూపండి.

సాధన : (i) Δ AOB మరియు Δ DOC లలో

$\angle ABO = \angle DCO$

(AB || CD మరియు BC తిర్యగ్రేఖ)

$\angle AOB = \angle DOC$

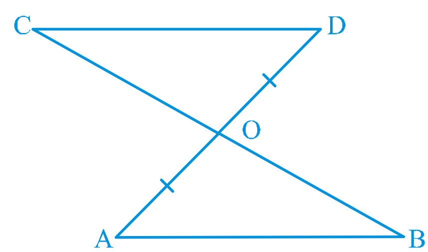
(శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$OA = OD$ (దత్తాంశం)

అందువలన, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (కో.కో.భు. నియమం ప్రకారం)

(ii) $OB = OC$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు సమానం)

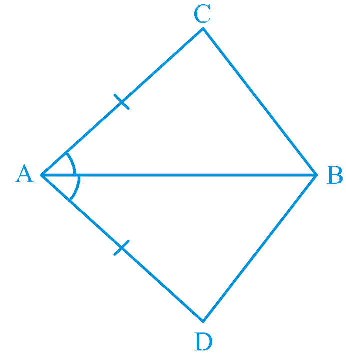
కావున, BC మధ్య బిందువు O.



పటం. 7.15

అభ్యాసం 7.1

1. చతుర్భుజం ACBD లో, AC = AD మరియు $\angle$ A కు AB కోణ సమద్వి ఖండన రేఖ (పటం. 7.16 చూడండి). $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ అని చూపండి BC మరియు BD ల గురించి ఏమి చెప్పగలరు?



పటం. 7.16

2. ABCD is a quadrilateral in which AD = BC and $\angle$ DAB = $\angle$ CBA (see Fig. 7.17). Prove that

(i) Δ ABD $\cong$ Δ BAC

(ii) BD = AC

(iii) $\angle$ ABD = $\angle$ BAC.

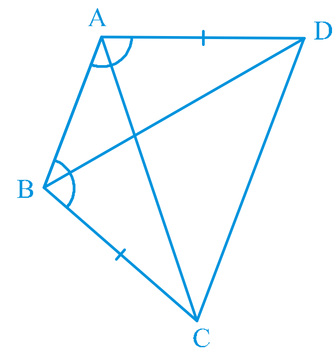


Fig. 7.17

3. AD and BC are equal perpendiculars to a line segment AB (see Fig. 7.18). Show that CD bisects AB.

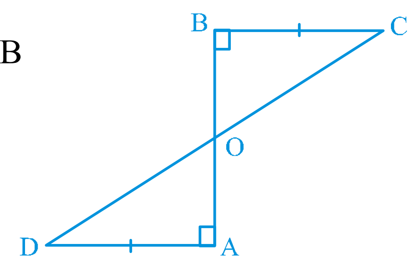


Fig. 7.18

4. l and m are two parallel lines intersected by another pair of parallel lines p and q (see Fig. 7.19). Show that Δ ABC $\cong$ Δ CDA.

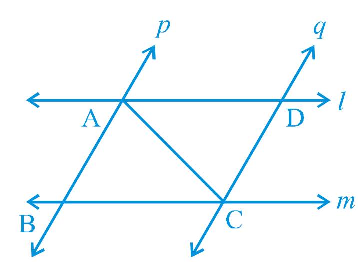


Fig. 7.19

5. Line l is the bisector of an angle $\angle$ A and B is any point on l. BP and BQ are perpendiculars from B to the arms of $\angle$ A (see Fig. 7.20). Show that:

(i) Δ APB $\cong$ Δ AQB

(ii) BP = BQ or B is equidistant from the arms of $\angle$ A.

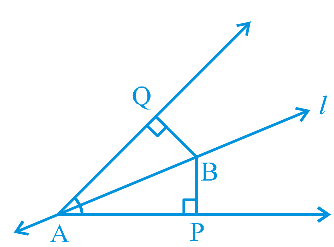


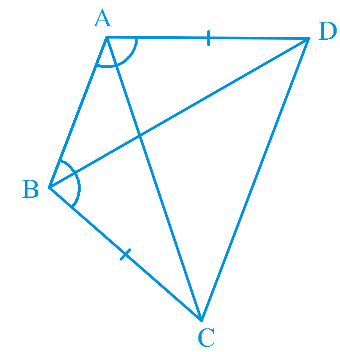
Fig. 7.20

2. ABCD చతుర్భుజంలో $AD = BC$ మరియు $\angle DAB = \angle CBA$ అయినచో (పటం 7.17 చూడండి)

(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

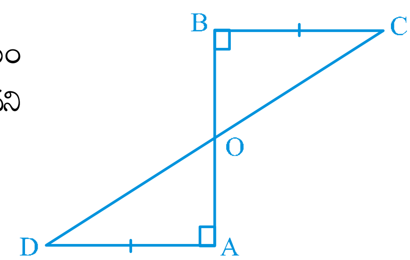
(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$ అని నిరూపించండి.



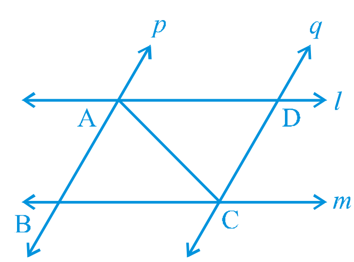
పటం 7.17

3. AD, BC లు సమానం మరియు రేఖాఖండం AB కి లంబములు (పటం 7.18 చూడండి). CD రేఖాఖండం AB రేఖాఖండాన్ని సమద్వి ఖండన చేస్తుందని చూపండి.



పటం. 7.18

4. l మరియు m అనే ఒక జత సమాంతర రేఖలు p మరియు q అనే మరొక జత సమాంతర రేఖలచే ఖండించబడినవి (పటం 7.19 చూడండి). $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని చూపండి.

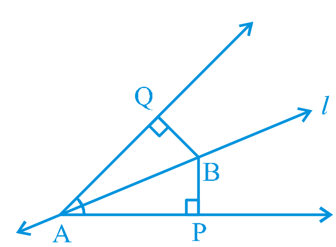


పటం. 7.19

5. $\angle A$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ l మరియు l పై B ఏదైనా ఒక బిందువు. BP మరియు BQ లు B నుండి $\angle A$ యొక్క భుజాలకు గీసిన లంబాలు (పటం 7.20 చూడండి).

(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ లేదా $\angle A$ భుజాల నుండి B అనే బిందువు సమానదూరంలో ఉందని చూపండి.



పటం . 7.20

6. In Fig. 7.21, AC = AE, AB = AD and $\angle$ BAD = $\angle$ EAC. Show that BC = DE.

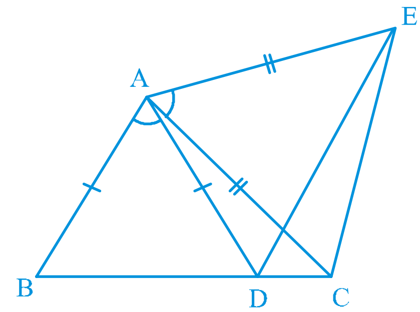


Fig. 7.21

7. AB is a line segment and P is its mid-point. D and E are points on the same side of AB such that $\angle$ BAD = $\angle$ ABE and $\angle$ EPA = $\angle$ DPB (see Fig. 7.22). Show that

(i) Δ DAP $\cong$ Δ EBP

(ii) AD = BE

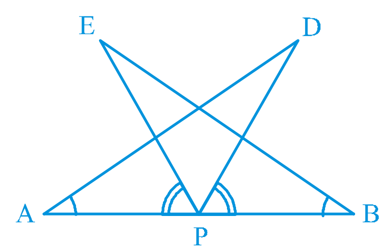


Fig. 7.22

8. In right triangle ABC, right angled at C, M is the mid-point of hypotenuse AB. C is joined to M and produced to a point D such that DM = CM. Point D is joined to point B (see Fig. 7.23). Show that:

(i) Δ AMC $\cong$ Δ BMD

(ii) $\angle$ DBC is a right angle.

(iii) Δ DBC $\cong$ Δ ACB

(iv) CM = $\frac{1}{2}$ AB

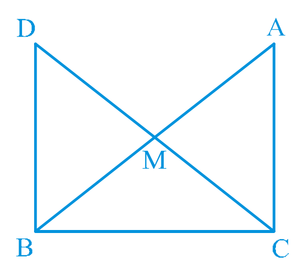
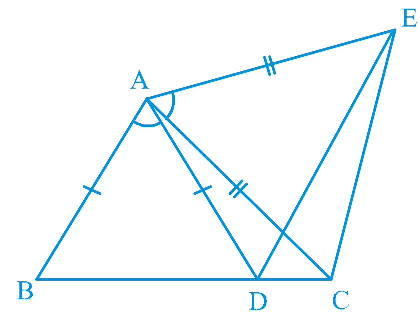


Fig. 7.23

7.4 Some Properties of a Triangle

In the above section you have studied two criteria for congruence of triangles. Let us now apply these results to study some properties related to a triangle whose two sides are equal.

6. పటం. 7.21లో AC = AE, AB = AD మరియు $\angle BAD = \angle EAC$ అయినచో BC = DE అని చూపండి.

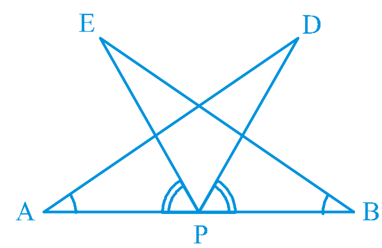


పటం. **7.21**

7. AB ఒక రేఖా ఖండం మరియు P మధ్య బిందువు. $\angle BAD = \angle ABE$ మరియు $\angle EPA = \angle DPB$ అగునట్లు D మరియు E బిందువులు AB కి ఒకేవైపు ఉన్నవి (పటం 7.22 చూడండి).

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) AD = BE అని చూపండి.



పటం. **7.22**

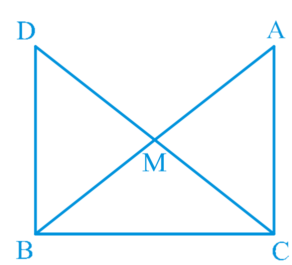
8. లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో, C వద్ద లంబకోణం కలదు. కర్ణం AB మధ్యబిందువు M. C బిందువును M కు కలిపి DM = CM అగునట్లు D బిందువు వద్దకు పొడిగించారు. బిందువు D ను బిందువు B కు కలిపారు. (పటం 7.23 చూడండి).

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ ఒక లంబకోణం

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2}$ AB అని చూపండి.



పటం. **7.23**

7.4 త్రిభుజం యొక్క కొన్ని ధర్మాలు

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం యొక్క రెండు నియమాల గురించి పై విభాగంలో మీరు నేర్చుకొన్నారు. ఈ ఫలితాలను రెండు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజాల ధర్మాల అధ్యయనానికి ఉపయోగిద్దాం.

Perform the activity given below:

Construct a triangle in which two sides are equal, say each equal to 3.5 cm and the third side equal to 5 cm (see Fig. 7.24). You have done such constructions in earlier classes.

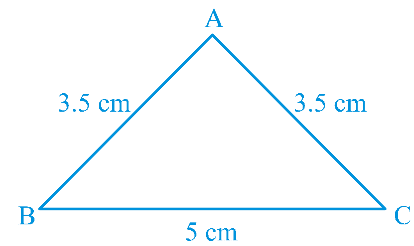


Fig. 7.24

Do you remember what is such a triangle called?

A triangle in which two sides are equal is called an **isosceles triangle**. So, Δ ABC of Fig. 7.24 is an isosceles triangle with AB = AC.

Now, measure $\angle$ B and $\angle$ C. What do you observe?

Repeat this activity with other isosceles triangles with different sides.

You may observe that in each such triangle, the angles opposite to the equal sides are equal.

This is a very important result and is indeed true for any isosceles triangle. It can be proved as shown below.

Theorem 7.2 : *Angles opposite to equal sides of an isosceles triangle are equal.*

This result can be proved in many ways. One of the proofs is given here.

Proof : We are given an isosceles triangle ABC in which AB = AC. We need to prove that $\angle$ B = $\angle$ C.

Let us draw the bisector of $\angle$ A and let D be the point of intersection of this bisector of $\angle$ A and BC (see Fig. 7.25).

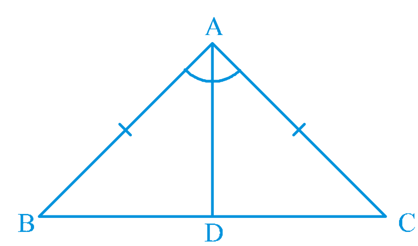


Fig. 7.25

In Δ BAD and Δ CAD,

AB = AC (Given)

$\angle$ BAD = $\angle$ CAD (By construction)

AD = AD (Common)

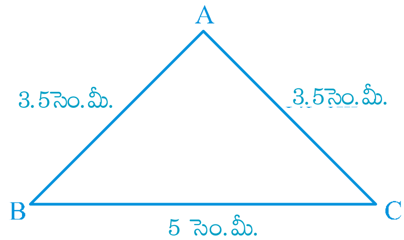
So, Δ BAD $\cong$ Δ CAD (By SAS rule)

So, $\angle$ ABD = $\angle$ ACD, since they are corresponding angles of congruent triangles.

So, $\angle$ B = $\angle$ C

క్రింద ఇచ్చిన కృత్యాన్ని చేయండి:

3.5 సెం.మీ. కొలతగా గల రెండు సమాన భుజాలు మరియు మూడవ భుజం 5సెం.మీ. ఉండునట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి. (పటం 7.24 చూడండి). ఈ విధమైన నిర్మాణాలు క్రింది తరగతులలో చేశారు.



పటం. 7.24

ఇలాంటి త్రిభుజాలను ఏమని పిలుస్తారో గుర్తుచేసుకోగలరా?

ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాలు సమానమైన దానిని **సమద్విబాహు త్రిభుజం** అని అంటారు. పటం 7.24 లోని త్రిభుజం ΔABC సమద్విబాహు త్రిభుజం. $AB = AC$

కాబట్టి, $\angle B$ మరియు $\angle C$ లను కొలవండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

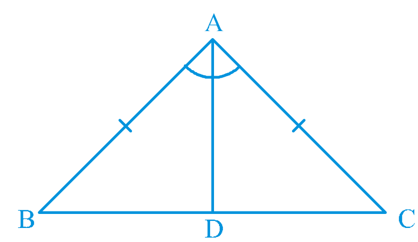
వివిధ భుజాల కొలతలున్న సమద్విబాహు త్రిభుజాలను తీసుకొని, ఈ కృత్యాన్ని మరల నిర్వహించండి.

అటువంటి ప్రతి త్రిభుజంలో, సమాన భుజాలకు ఎదురుగా వున్న కోణాలు సమానంగా ఉండటాన్ని మీరు గమనిస్తారు.

ఏ సమద్విబాహు త్రిభుజానికైనా ఇది సత్యం మరియు చాలా ముఖ్యమైన ఫలితం. దీనిని ఈ క్రింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 7.2 : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలోని సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు సమానం.

ఈ ఫలితాన్ని అనేక పద్ధతులలో నిరూపించవచ్చు. నిరూపణలలో ఒకటి ఇక్కడ ఇవ్వబడింది.



పటం. 7.25

నిరూపణ : $AB = AC$ అగునట్లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC ఇవ్వబడింది. $\angle B = \angle C$ అని నిరూపించాలి.

$\angle A$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీద్దాం. ఈ కోణ సమద్విఖండన రేఖ, భుజముBC ని D వద్ద ఖండించును అనుకోండి. (పటం. 7.25 చూడండి). ΔBAD మరియు ΔCAD లలో,

$AB = AC$ (దత్తాంశం)

$\angle BAD = \angle CAD$ (నిర్మాణం ప్రకారం)

$AD = AD$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున, $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (భు.కో.భు. నియమం ప్రకారం)

కావున, $\angle ABD = \angle ACD$ సర్వసమాన త్రిభుజ సదృశ భుజాలు సమానం కనుక

అనగా, $\angle B = \angle C$

Is the converse also true? That is:

If two angles of any triangle are equal, can we conclude that the sides opposite to them are also equal?

Perform the following activity.

Construct a triangle ABC with BC of any length and $\angle B = \angle C = 50°$. Draw the bisector of $\angle A$ and let it intersect BC at D (see Fig. 7.26).

Cut out the triangle from the sheet of paper and fold it along AD so that vertex C falls on vertex B.

What can you say about sides AC and AB?

Observe that AC covers AB completely

So, $\quad AC = AB$

Repeat this activity with some more triangles. Each time you will observe that the sides opposite to equal angles are equal. So we have the following:

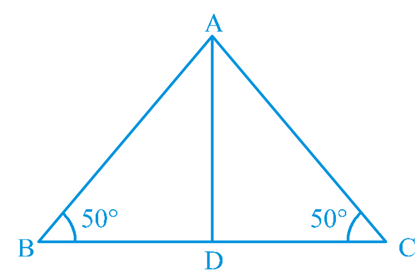


Fig. 7.26

Theorem 7.3 : *The sides opposite to equal angles of a triangle are equal.*

This is the converse of Theorem 7.2.

You can prove this theorem by ASA congruence rule.

Let us take some examples to apply these results.

Example 4 : In Δ ABC, the bisector AD of $\angle$ A is perpendicular to side BC (see Fig. 7.27). Show that AB = AC and Δ ABC is isosceles.

Solution : In ΔABD and ΔACD,

$\angle BAD = \angle CAD$ (Given)

$AD = AD$ (Common)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (Given)

So, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA rule)

So, $AB = AC$ (CPCT)

or, Δ ABC is an isosceles triangle.

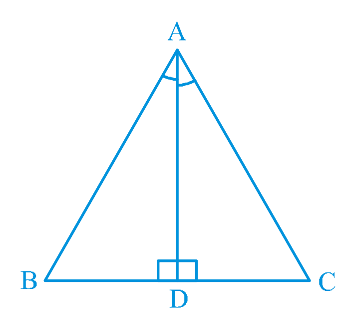


Fig. 7.27

దీని విపర్యయం కూడా సత్యమేనా? అంటే:

"ఏదైనా త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు సమానమైన వాటి ఎదురుగా ఉండే భుజాలు కూడా సమానం" అని మీరు చెప్పగలరా?

ఈ కృత్యాన్ని చేయండి.

BC ఏదైనా కొలత ఉండి, $\angle B = \angle C = 50°$ ఉండేటట్లు ΔABC ని గీయండి. BC ని D వద్ద ఖండించునట్లు $\angle A$ కి కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీయండి (పటం 7.26 చూడండి).

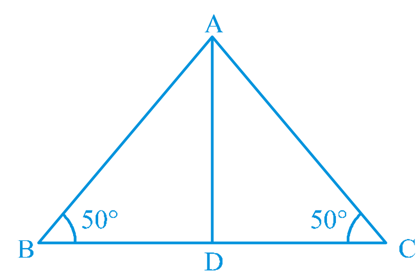
ΔABC ని కాగితం పై కత్తిరించి, శీర్షం C ను శీర్షం B తో ఏకీభవించునట్లు AD గీతపై మడవండి.

AC మరియు AB భుజాల గురించి, మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

AC, AB తో పూర్తిగా ఏకీభవించిందని గమనించి ఉంటారు.

కావున, $AC = AB$

మరికొన్ని త్రిభుజాలు తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని మరల చేయండి. సమాన కోణాల అభిముఖ (ఎదుటి) భుజాలు ప్రతిసారి సమానమవుతాయని మీరు గమనిస్తారు. ఈ కింది అంశాలు చూడండి.



పటం. 7.26

సిద్ధాంతం 7.3 : *ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా ఉండే భుజాలు సమానం.*

ఇది సిద్ధాంతం7.2కు విపర్యయం.

ఈ సిద్ధాంతాన్ని కో.భు.కో. సర్వసమాన నియమం ఉపయోగించి నిరూపించవచ్చు.

ఈ ఫలితాన్ని అన్వయించడానికి మనం కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 4 : ΔABC లో $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ AD భుజం BC కి లంబంగా ఉంది (పటం 7.27 చూడండి). అయిన $AB = AC$ మరియు ΔABC సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.

సాధన : ΔABD మరియు ΔACD లలో,

$\angle BAD = \angle CAD$ (దత్తాంశం)

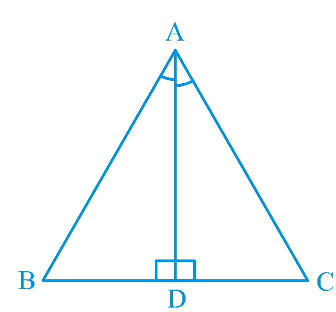
$AD = AD$ (ఉమ్మడి భుజం)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (దత్తాంశం)

కావున, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (కో.భు.కో. నియమం)

కావున, $AB = AC$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు సమానం)

లేదా, ΔABC సమద్విబాహు త్రిభుజం.



పటం. 7.27

Example 5 : E and F are respectively the mid-points of equal sides AB and AC of Δ ABC (see Fig. 7.28). Show that BF = CE.

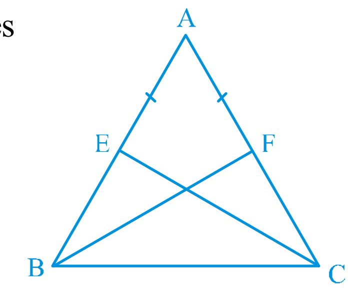


Fig. 7.28

Solution : In Δ ABF and Δ ACE,

AB = AC (Given)

$\angle$ A = $\angle$ A (Common)

AF = AE (Halves of equal sides)

So, Δ ABF $\cong$ Δ ACE (SAS rule)

Therefore, BF = CE (CPCT)

Example 6 : In an isosceles triangle ABC with AB = AC, D and E are points on BC such that BE = CD (see Fig. 7.29). Show that AD = AE.

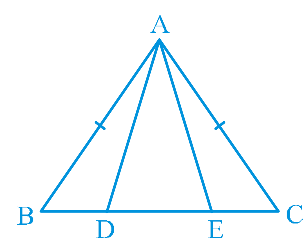


Fig. 7.29

Solution : In Δ ABD and Δ ACE,

AB = AC (Given) (1)

$\angle$ B = $\angle$ C

(Angles opposite to equal sides) (2)

Also, BE = CD

So, BE – DE = CD – DE

That is, BD = CE (3)

So, Δ ABD $\cong$ Δ ACE

(Using (1), (2), (3) and SAS rule).

This gives AD = AE (CPCT)

EXERCISE 7.2

1. In an isosceles triangle ABC, with AB = AC, the bisectors of $\angle$ B and $\angle$ C intersect each other at O. Join A to O. Show that :

   (i) OB = OC (ii) AO bisects $\angle$ A

2. In Δ ABC, AD is the perpendicular bisector of BC (see Fig. 7.30). Show that Δ ABC is an isosceles triangle in which AB = AC.

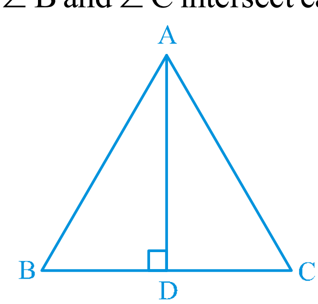
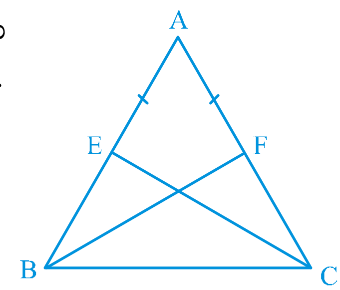


Fig. 7.30

ఉదాహరణ 5 : Δ ABC లో సమాన భుజాలు AB, AC ల మధ్య బిందువులు వరుసగా E మరియు F (పటం 7.28 చూడండి). అయితే BF = CE అని చూపండి.



పటం. 7.28

సాధన : Δ ABF మరియు Δ ACE లలో,

AB = AC (దత్తాంశం)

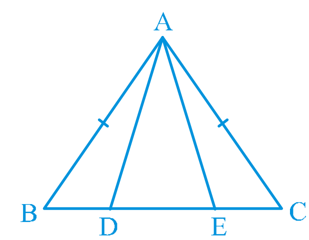
$\angle$A = $\angle$A (ఉమ్మడి కోణం)

AF = AE (సమాన భుజాలలో సగాలు)

కావున, $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (భు.కో.భు నియమం)

అదే విధంగా, BF = CE (సర్వసమాన త్రిభుజాలలోని సదృశ భుజాలు సమానం)

ఉదాహరణ 6 : ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో AB = AC, D మరియు E లు BE = CD అయ్యేటట్లు BC పై బిందువులు (పటం 7.29 చూడండి) అయినచో AD = AE అని చూపండి.



పటం. 7.29

సాధన : Δ ABD మరియు Δ ACE లలో,

AB = AC (దత్తాంశం) (1)

$\angle$B = $\angle$C

(సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు) (2)

ఇంకా, BE = CD

కావున, BE – DE = CD – DE

అనగా, BD = CE (3)

కావున, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) మరియు భు.కో.భు. నియమం).

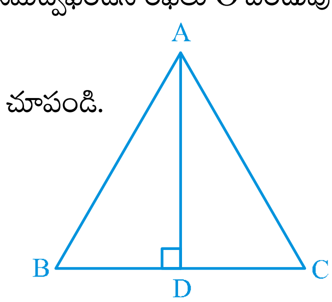
దీని నుండి AD = AE (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

అభ్యాసం 7.2

1. సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో AB = AC, $\angle$B మరియు $\angle$C ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు O బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. బిందువు A మరియు O లను కలపండి.

   (i) OB = OC (ii) $\angle$A కు కోణ సమద్విఖండనరేఖ AO అని చూపండి.

2. Δ ABC లో AD అనేది భుజం BC కి సమద్విఖండన రేఖ (పటం 7.30 చూడండి). AB = AC అయ్యేటట్లు Δ ABC సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.



పటం. 7.30

3. ABC is an isosceles triangle in which altitudes BE and CF are drawn to equal sides AC and AB respectively (see Fig. 7.31). Show that these altitudes are equal.

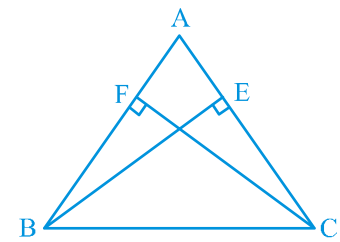


Fig. 7.31

4. ABC is a triangle in which altitudes BE and CF to sides AC and AB are equal (see Fig. 7.32). Show that

(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) $AB = AC$, i.e., ABC is an isosceles triangle.

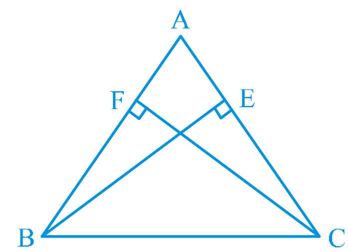


Fig. 7.32

5. ABC and DBC are two isosceles triangles on the same base BC (see Fig. 7.33). Show that $\angle ABD = \angle ACD$.

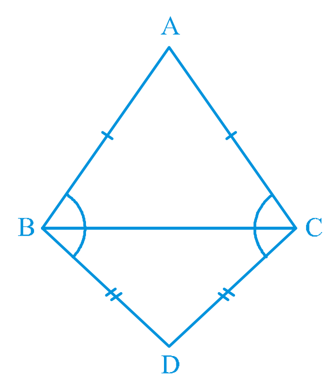


Fig. 7.33

6. ΔABC is an isosceles triangle in which $AB = AC$. Side BA is produced to D such that $AD = AB$ (see Fig. 7.34). Show that $\angle BCD$ is a right angle.

7. ABC is a right angled triangle in which $\angle A = 90°$ and $AB = AC$. Find $\angle B$ and $\angle C$.

8. Show that the angles of an equilateral triangle are 60° each.

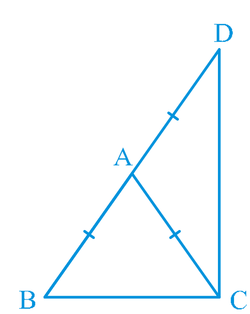
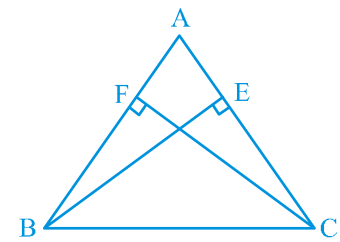


Fig. 7.34

3. Δ ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం AC, AB లకు గీసిన లంబాలు వరుసగా BE, CF (పటం 7.31 చూడండి). ఈ లంబాలు సమానమని చూపండి.

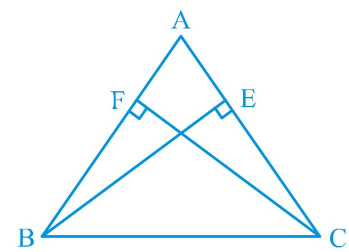


పటం. 7.31

4. Δ ABC లో AC, AB భుజాలకు గీసిన లంబాలు BE, CF లు సమానం (పటం 7.32 చూడండి).

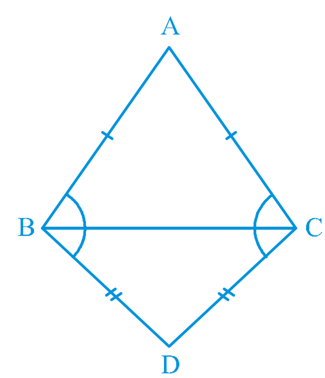
(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) AB = AC, అంటే ABC సమద్విబాహు త్రిభుజం అని చూపండి.



పటం. 7.32

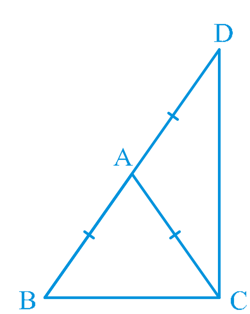
5. ABC, DBC లు ఒకే భుజం BC పై నున్న రెండు సమద్విబాహు త్రిభుజాలు (పటం7.33 చూడండి). $\angle ABD = \angle ACD$ అని చూపండి.



పటం. 7.33

6. ΔABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం. AB = AC అయిన AD = AB అయ్యేటట్లు BA ని D వరకు పొడిగించినచో (పటం 7.34 చూడండి) $\angle$ BCD ఒక లంబకోణం అని చూపండి.

7. ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం $\angle A = 90°$ మరియు AB = AC అయిన $\angle B$, $\angle C$ లను కనుగొనండి.



పటం. 7.34

8. ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క ప్రతి కోణం 60° ఉంటుందని చూపండి.

7.5 Some More Criteria for Congruence of Triangles

You have seen earlier in this chapter that equality of three angles of one triangle to three angles of the other is not sufficient for the congruence of the two triangles. You may wonder whether equality of three sides of one triangle to three sides of another triangle is enough for congruence of the two triangles. You have already verified in earlier classes that this is indeed true.

To be sure, construct two triangles with sides 4 cm, 3.5 cm and 4.5 cm (see Fig. 7.35). Cut them out and place them on each other. What do you observe? They cover each other completely, if the equal sides are placed on each other. So, the triangles are congruent.

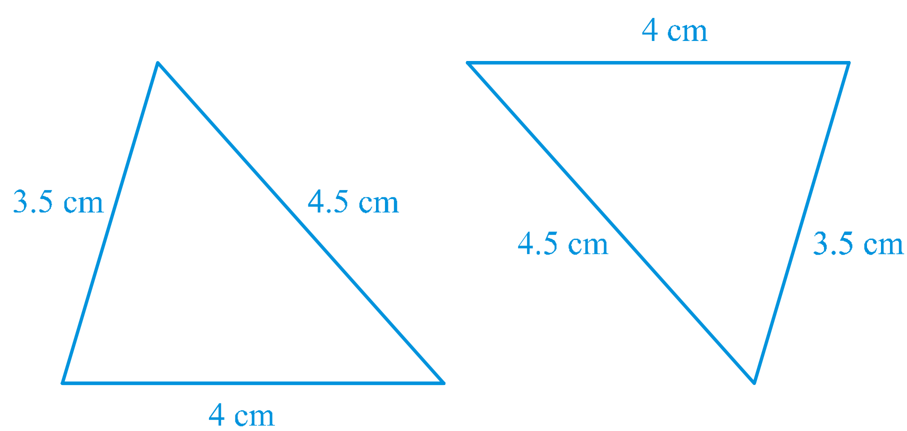


Fig. 7.35

Repeat this activity with some more triangles. We arrive at another rule for congruence.

Theorem 7.4 (SSS congruence rule) : *If three sides of one triangle are equal to the three sides of another triangle, then the two triangles are congruent.*

This theorem can be proved using a suitable construction.

You have already seen that in the SAS congruence rule, the pair of equal angles has to be the included angle between the pairs of corresponding pair of equal sides and if this is not so, the two triangles may not be congruent.

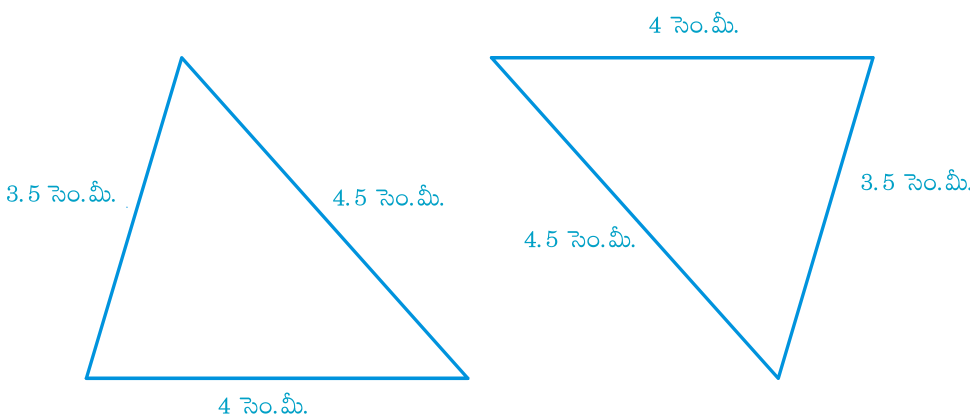
Perform this activity:

Construct two right angled triangles with hypotenuse equal to 5 cm and one side equal to 4 cm each (see Fig. 7.36).

7.5 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మరికొన్ని నియమాలు

రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలు మరొక త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలు సమానమైతే సరిపోదనే విషయం ఈ అధ్యాయంలోని ముందు భాగాలలో మీరు తెలుసుకున్నారు. రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు, మరొక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలకు సమానం అయితే చాలు అనే విషయం మీకు ఆశ్చర్యం కలిగించి వుండవచ్చు. ఇది సత్యమని, ఇప్పటికే క్రింది తరగతులలో మీరు నిరూపించివున్నారు.

దీనిని నిరూపించడానికి, భుజాల కొలతలు 4 సెం.మీ, 3.5 సెం.మీ మరియు 4.5 సెం.మీ. (పటం 7.35 చూడండి) ఉండునట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీయండి. వాటిని కత్తిరించి, సమాన భుజాలు ఒకదానిపై ఒకటి ఏకీభవించునట్లు అమర్చండి. ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.



పటం. 7.35

మరికొన్ని త్రిభుజాలు తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని మరల నిర్వహించండి. దీనితో త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి మరొక నియమం లభిస్తుంది.

సిద్ధాంతం 7.4 (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం) : రెండు త్రిభుజాలలో మొదటి త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలకు సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

సరైన నిర్మాణాన్ని ఉపయోగించి ఈ సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించవచ్చు.

భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమంలో సమాన కోణాలు సదృశ సమాన భుజాల జతల మధ్య ఉంటే మాత్రమే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వం కలిగి వుంటాయి లేకపోతే ఉండవని మీరు ఇంతకు ముందే తెలుసుకున్నారు.

ఈ కృత్యాన్ని చేయండి:

కర్ణం 5 సెం.మీ, మిగిలిన రెండు భుజాలలో ఒక భుజం పొడవు 4 సెం.మీ. ఉండునట్లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలను గీయండి (పటం 7.36 చూడండి).

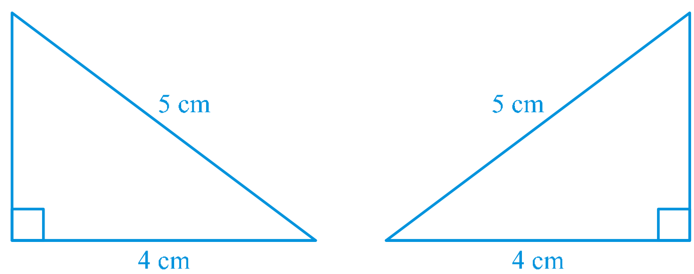


Fig. 7.36

Cut them out and place one triangle over the other with equal side placed on each other. Turn the triangles, if necessary. What do you observe?

The two triangles cover each other completely and so they are congruent. Repeat this activity with other pairs of right triangles. What do you observe?

You will find that two right triangles are congruent if one pair of sides and the hypotenuse are equal. You have verified this in earlier classes.

Note that, the right angle is ***not*** the included angle in this case.

So, you arrive at the following congruence rule:

Theorem 7.5 **(RHS congruence rule) :** *If in two right triangles the hypotenuse and one side of one triangle are equal to the hypotenuse and one side of the other triangle, then the two triangles are congruent.*

Note that RHS stands for **Right angle - Hypotenuse - Side.**

Let us now take some examples.

Example 7 : AB is a line-segment. P and Q are points on opposite sides of AB such that each of them is equidistant from the points A and B (see Fig. 7.37). Show that the line PQ is the perpendicular bisector of AB.

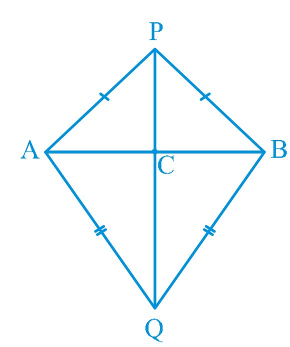


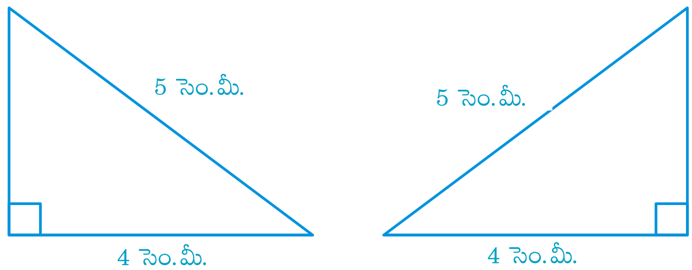
Fig. 7.37

Solution : You are given that PA = PB and QA = QB and you are to show that PQ $\perp$ AB and PQ bisects AB. Let PQ intersect AB at C.

Can you think of two congruent triangles in this figure?

Let us take Δ PAQ and Δ PBQ.

In these triangles,



పటం. 7.36

త్రిభుజాలను కత్తిరించి సమాన భుజాలు ఏకీభవించునట్లు ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచండి. అవసరమైతే త్రిభుజాలను తిప్పండి. మీరు ఏం గమనించారు?

రెండు త్రిభుజాలు పరస్పరం ఏకీభవిస్తాయి కనుక, ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. వేరొక జతల లంబకోణ త్రిభుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని మరల నిర్వహించండి. మీరు ఏం గమనించారు?

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావాలంటే ఒక జత భుజాలు మరియు కర్ణం సమానంగా ఉండాలని మీరు కనుక్కోగలరు. క్రింది తరగతులలో మీరు దీనిని పరీక్షించారు.

ఈ విషయంలో లంబకోణం సమాన భుజాల మధ్య కోణం ***కాదని*** గమనించండి.

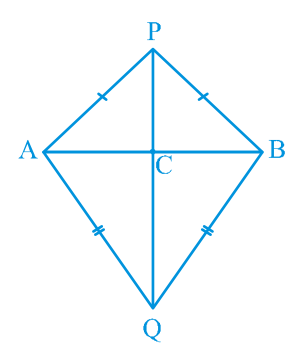
అందువలన, ఈ క్రింది సర్వసమానత్వ నియమాన్ని చూడండి.

సిద్ధాంతం 7.5 లంబకోణము – కర్ణము – భుజం సర్వసమానత్వ నియమం (లం. క. భు.) : *రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని కర్ణం వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని కర్ణం, సదృశ భుజానికి సమానం అయితే ఆ రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.*

లం. క. భు. అనగా **లంబకోణం – కర్ణం – భుజం**

కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 7 : AB ఒక రేఖాఖండం. P, Q అనే బిందువులు AB కి రెండు వైపుల A, B బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉన్నాయి (పటం 7.37 చూడండి). PQ రేఖ AB కి లంబసమద్విఖండన రేఖ అని చూపండి.



పటం. 7.37

సాధన : $PA = PB$ మరియు $QA = QB$ అని ఇవ్వబడింది. PQ, AB కి లంబమని $PQ \perp AB$ మరియు దానిని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపాలి. PQ, AB ని C వద్ద ఖండిస్తుందని అనుకోండి.

ఈ పటంలోని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాల గురించి ఆలోచించగలరా?

Δ PAQ మరియు Δ PBQ లను తీసుకోండి.

ఈ త్రిభుజాలలో,

$$AP = BP \quad \text{(Given)}$$
$$AQ = BQ \quad \text{(Given)}$$
$$PQ = PQ \quad \text{(Common)}$$
So, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS rule)

Therefore, $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT).

Now let us consider ΔPAC and ΔPBC.

You have : $AP = BP$ (Given)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ proved above)

$PC = PC$ (Common)

So, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS rule)

Therefore, $AC = BC$ (CPCT) (1)

and $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

Also, $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (Linear pair)

So, $2\angle ACP = 180°$

or, $\angle ACP = 90°$ (2)

From (1) and (2), you can easily conclude that PQ is the perpendicular bisector of AB.

[Note that, without showing the congruence of ΔPAQ and ΔPBQ, you cannot show that $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ even though $AP = BP$ (Given)

$PC = PC$ (Common)

and $\angle PAC = \angle PBC$ (Angles opposite to equal sides in ΔAPB)

It is because these results give us SSA rule which is not always valid or true for congruence of triangles. Also the angle is not included between the equal pairs of sides.]

Let us take some more examples.

Example 8 : P is a point equidistant from two lines l and m intersecting at point A (see Fig. 7.38). Show that the line AP bisects the angle between them.

Solution : You are given that lines l and m intersect each other at A. Let $PB \perp l$, $PC \perp m$. It is given that $PB = PC$.

You are to show that $\angle PAB = \angle PAC$.

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$AQ = BQ$ (దత్తాంశం)

$PQ = PQ$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (భు. భు. భు. సర్వసమానత్వ నియమం)

అదేవిధంగా, $\angle APQ = \angle BPQ$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు సమానం)

ఇప్పుడు Δ PAC మరియు Δ PBC లను తీసుకోండి.

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ పైన నిరూపించబడింది)

$PC = PC$ (ఉమ్మడి భుజం)

కావున, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం)

అదేవిధంగా, $AC = BC$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు సమానం) (1)

మరియు $\angle ACP = \angle BCP$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు సమానం)

ఇంకా, $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (సరళయుగ్మాలు)

కావున, $2\angle ACP = 180°$

లేదా, $\angle ACP = 90°$ (2)

(1) మరియు (2) ల నుండి PQ, AB కి లంబ సమద్విఖండన రేఖ అని చెప్పవచ్చు.

[గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే Δ PAQ, Δ PBQ ల సర్వసమానత్వం ఋజువు చేయకుండా $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ అని నిరూపించలేం

$AP = BP$ (దత్తాంశం)

$PC = PC$ (ఉమన్మడి భుజం)

మరియు $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB లో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న సమాన కోణాలు)

ఈ ఫలితం మనకు భు.భు.కో. నియమాన్ని ఇచ్చినప్పటికీ, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వానికి ఇది ఎల్లప్పుడూ నిజం కాదు. ఇంకా కోణం, సమాన భుజాల జతల మధ్య కోణం కాదు.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 8 : l, m అనే రెండు రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. ఈ రేఖలకు సమాన దూరంలో P బిందువు ఉంది (పటం 7.38 చూడండి). AP రేఖ l, m రేఖల మధ్య ఏర్పడిన కోణాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.

సాధన : l, m అనే రెండు రేఖలు A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. $PB \perp l$, $PC \perp m$ అనుకోండి. $PB = PC$ అని ఇవ్వబడింది.

$\angle PAB = \angle PAC$ అని చూపాలి.

Let us consider Δ PAB and Δ PAC. In these two triangles,

	PB = PC	(Given)
	$\angle$ PBA = $\angle$ PCA = 90°	(Given)
	PA = PA	(Common)
So,	Δ PAB $\cong$ Δ PAC	(RHS rule)
So,	$\angle$ PAB = $\angle$ PAC	(CPCT)

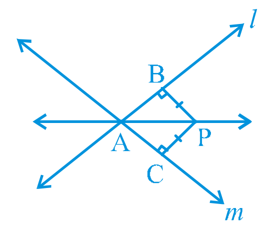


Fig. 7.38

Note that this result is the converse of the result proved in Q.5 of Exercise 7.1.

EXERCISE 7.3

1. Δ ABC and Δ DBC are two isosceles triangles on the same base BC and vertices A and D are on the same side of BC (see Fig. 7.39). If AD is extended to intersect BC at P, show that

(i) Δ ABD $\cong$ Δ ACD

(ii) Δ ABP $\cong$ Δ ACP

(iii) AP bisects $\angle$ A as well as $\angle$ D.

(iv) AP is the perpendicular bisector of BC.

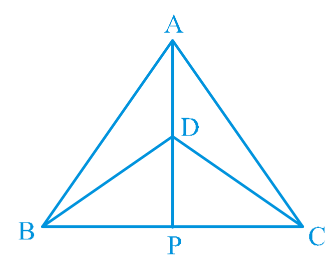


Fig. 7.39

2. AD is an altitude of an isosceles triangle ABC in which AB = AC. Show that

(i) AD bisects BC (ii) AD bisects $\angle$ A.

3. Two sides AB and BC and median AM of one triangle ABC are respectively equal to sides PQ and QR and median PN of Δ PQR (see Fig. 7.40). Show that:

(i) Δ ABM $\cong$ Δ PQN

(ii) Δ ABC $\cong$ Δ PQR

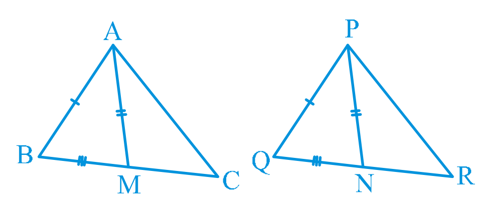


Fig. 7.40

4. BE and CF are two equal altitudes of a triangle ABC. Using RHS congruence rule, prove that the triangle ABC is isosceles.

5. ABC is an isosceles triangle with AB = AC. Draw AP $\perp$ BC to show that $\angle$ B = $\angle$ C.

Δ PAB, Δ PAC లను తీసుకోండి. ఈ రెండు త్రిభుజాలలో,

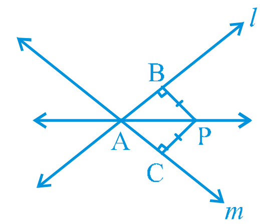
PB = PC (దత్తాంశం)

$\angle$ PBA = $\angle$ PCA = 90° (దత్తాంశం)

PA = PA (ఉమ్మడి భుజం)

So, Δ PAB $\cong$ Δ PAC (లం.క.భు. నియమం)

So, $\angle$ PAB = $\angle$ PAC (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు సమానం)



పటం. 7.38

ఈ ఫలితం అభ్యాసం 7.1లోని 5వ ప్రశ్న యొక్క ఫలితానికి విపర్యయమని గమనించండి.

అభ్యాసం 7.3

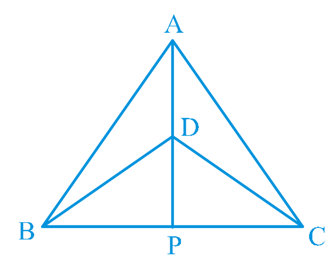
1. ఒకే భుజం BC పై Δ ABC, Δ DBC లు రెండు సమద్విబాహు త్రిభుజాలు. A, D శీర్షాలు BC కి ఒకేవైపున ఉన్నాయి (పటం 7.39 చూడండి). AD ని పొడిగించినచో, BC ని P వద్ద ఖండిస్తుంటే,

(i) Δ ABD $\cong$ Δ ACD

(ii) Δ ABP $\cong$ Δ ACP

(iii) $\angle$ A మరియు $\angle$ D ని AP సమద్విఖండన చేస్తుంది.

(iv) BC కి లంబసమద్విఖండన రేఖ AP అని చూపండి.



పటం. 7.39

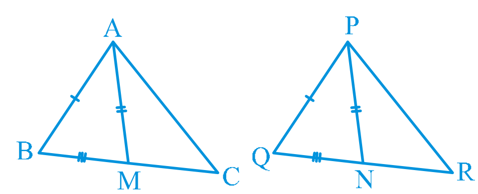
2. AB = AC అగునట్లు, ఒక సమదద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో AD లంబం అయిన

(i) BC భుజాన్ని AD సమద్విఖండన చేయునని (ii) $\angle$ A ని AD కోణ సమద్విఖండన చేయునని చూపండి.

3. Δ ABC లో రెండు భుజాలు AB, BC మరియు మధ్యగతం AM వరుసగా, Δ PQR లో రెండు భుజాలు PQ, QR మరియు PN మధ్యగతంకు సమానం (పటం 7.40 చూడండి). అయిన

(i) Δ ABM $\cong$ Δ PQN

(ii) Δ ABC $\cong$ Δ PQR అని చూపండి.



పటం. 7.40

4. Δ ABC లో BE, CF లు రెండు సమాన లంబాలు. లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించి Δ ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపండి.

5. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC లో AB = AC, $\angle$ B = $\angle$ C అని చూపటానికి AP $\perp$ BC గీయండి.

7.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. Two figures are congruent, if they are of the same shape and of the same size.
2. Two circles of the same radii are congruent.
3. Two squares of the same sides are congruent.
4. If two triangles ABC and PQR are congruent under the correspondence $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ and $C \leftrightarrow R$, then symbolically, it is expressed as $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.
5. If two sides and the included angle of one triangle are equal to two sides and the included angle of the other triangle, then the two triangles are congruent (SAS Congruence Rule).
6. If two angles and the included side of one triangle are equal to two angles and the included side of the other triangle, then the two triangles are congruent (ASA Congruence Rule).
7. If two angles and one side of one triangle are equal to two angles and the corresponding side of the other triangle, then the two triangles are congruent (AAS Congruence Rule).
8. Angles opposite to equal sides of a triangle are equal.
9. Sides opposite to equal angles of a triangle are equal.
10. Each angle of an equilateral triangle is of $60°$.
11. If three sides of one triangle are equal to three sides of the other triangle, then the two triangles are congruent (SSS Congruence Rule).
12. If in two right triangles, hypotenuse and one side of a triangle are equal to the hypotenuse and one side of other triangle, then the two triangles are congruent (RHS Congruence Rule).

7.6 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, ఈ కింది అంశాలు నేర్చుకున్నారు:

1. ఒకే ఆకారం, ఒకే పరిమాణం గల రెండు పటాలు సర్వసమానాలు.

2. ఒకే వ్యాసార్థం కలిగిన రెండు వృత్తాలు సర్వసమానం.

3. ఒకే భుజం కొలత ఉన్న రెండు చతురస్రాలు సర్వసమానాలు.

4. $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q, C \leftrightarrow R$ అయితే ABC మరియు PQR త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. చిహ్నాల రూపంలో $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

5. రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య ఏర్పడిన కోణం, వరుసగా రెండో త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణానికి సమానం అయితే, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమం).

6. రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు కోణాలు, వాటి ఉమ్మడి భుజం వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ కోణాలు మరియు సదృశ భుజానికి సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (కో. భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమం).

7. రెండు త్రిభుజాలలో, ఒక త్రిభుజం యొక్క ఒక భుజం, రెండు కోణాలు వేరొక త్రిభుజంలోని సదృశ భుజానికి రెండు కోణాలకు సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (కో.కో.కో. సర్వసమానత్వ నియమం).

8. ఒక త్రిభుజంలో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు సమానం.

9. ఒక త్రిభుజంలో సమాన కోణాలకు ఎదురుగా ఉన్న భుజాలు సమానం.

10. సమబాహు త్రిభుజంలోని ప్రతి కోణం $60°$.

11. రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని సదృశ భుజాలకు సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (భు.భు.భు సర్వసమానత్వ నియమం).

12. రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని కర్ణం, భుజం వరుసగా వేరొక త్రిభుజంలోని కర్ణం, సదృశ భుజానికి సమానం అయితే, ఆ రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు (లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమం).

0962CH08

CHAPTER 8

QUADRILATERALS

8.1 Properties of a Parallelogram

You have already studied quadrilaterals and their types in Class VIII. A quadrilateral has four sides, four angles and four vertices. A parallelogram is a quadrilateral in which both pairs of opposite sides are parallel.

Let us perform an activity.

Cut out a parallelogram from a sheet of paper and cut it along a diagonal (see Fig. 8.1). You obtain two triangles. What can you say about these triangles?

Place one triangle over the other. Turn one around, if necessary. What do you observe?

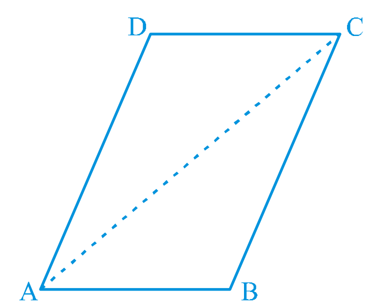


Fig. 8.1

Observe that the two triangles are congruent to each other.

Repeat this activity with some more parallelograms. Each time you will observe that each diagonal divides the parallelogram into two congruent triangles.

Let us now prove this result.

Theorem 8.1 : *A diagonal of a parallelogram divides it into two congruent triangles.*

Proof : Let ABCD be a parallelogram and AC be a diagonal (see Fig. 8.2). Observe that the diagonal AC divides parallelogram ABCD into two triangles, namely, Δ ABC and Δ CDA. We need to prove that these triangles are congruent.

B2T5V3

అధ్యాయం 8

చతుర్భుజాలు

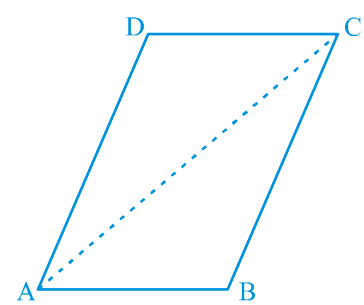
8.1 సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు

చతుర్భుజాలు, వాటి రకాల గురించి మీరు 8వ తరగతిలో ఇదివరకే చదువుకొన్నారు. ఒక చతుర్భుజంలో, నాలుగు భుజాలు, నాలుగు కోణాలు మరియు నాలుగు శీర్షాలు ఉంటాయి. రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలైన చతుర్భుజమే ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

ఇప్పుడు మనం ఒక కృత్యాన్ని చేద్దాం.

ఒక కాగితం నుండి ఒక సమాంతర చతుర్భుజ ఆకారాన్ని కత్తిరించండి మరియు దాని కర్ణం వెంబడి మరలా కత్తిరించండి. (పటం. 8.1 పరిశీలించండి). మనకు రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయి. ఈ త్రిభుజాల గురించి మీరు ఏమి చెబుతారు?

ఒక త్రిభుజంపై మరొక త్రిభుజాన్ని ఉంచండి. అవసరమైతే భుజాల వెంబడి కదిపి చూడండి. మీరు ఏమి గమనించారు?



పటం. 8.1

ఈ రెండు త్రిభుజాలు ఒకదానికొకటి సర్వసమానమని గమనించండి.

ఈ కృత్యాన్ని మరికొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకొని పునరావృతం చేయండి. ప్రతిసారి ఈ ఫలితాన్ని పరిశీలించండి. ప్రతిసారి మనం, సమాంతర చతుర్భుజంలోని ప్రతి కర్ణం ఆ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది అని గమనిస్తాం.

ఇప్పుడు ఈ ఫలితాన్ని నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం 8.1 : *సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణం ఆ రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలను రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.*

నిరూపణ : ABCD సమాంతర చతుర్భుజంను తీసుకోండి. ఇచ్చట AC ఒక కర్ణం (పటం. 8.2 ని గమనించండి). AC కర్ణం సమాంతర చతుర్భుజం ABCD ని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది. అవి Δ ABC మరియు Δ CDA. ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని చూపాలి.

In Δ ABC and Δ CDA, note that BC || AD and AC is a transversal.

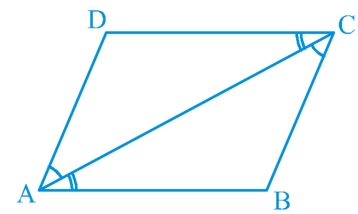


Fig. 8.2

So, $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (Pair of alternate angles)

Also, AB || DC and AC is a transversal.

So, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA (Pair of alternate angles)

and AC = CA (Common)

So, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (ASA rule)

or, diagonal AC divides parallelogram ABCD into two congruent triangles ABC and CDA.

Now, measure the opposite sides of parallelogram ABCD. What do you observe?

You will find that AB = DC and AD = BC.

This is another property of a parallelogram stated below:

Theorem 8.2 : *In a parallelogram, opposite sides are equal.*

You have already proved that a diagonal divides the parallelogram into two congruent triangles; so what can you say about the corresponding parts say, the corresponding sides? They are equal.

So, AB = DC and AD = BC

Now what is the converse of this result? You already know that whatever is given in a theorem, the same is to be proved in the converse and whatever is proved in the theorem it is given in the converse. Thus, Theorem 8.2 can be stated as given below :

If a quadrilateral is a parallelogram, then each pair of its opposite sides is equal. So its converse is :

Theorem 8.3 : *If each pair of opposite sides of a quadrilateral is equal, then it is a parallelogram.*

Can you reason out why?

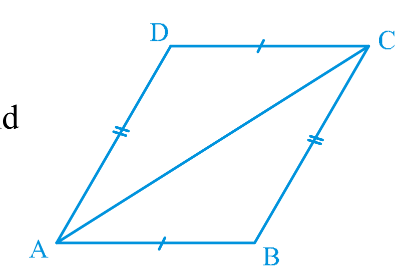


Fig. 8.3

Let sides AB and CD of the quadrilateral ABCD be equal and also AD = BC (see Fig. 8.3). Draw diagonal AC.

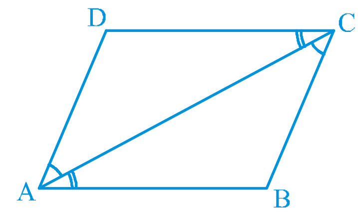
Clearly, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (Why?)

So, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA

and $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (Why?)

Can you now say that ABCD is a parallelogram? Why?

Δ ABC, Δ CDA లలో BC || AD మరియు AC తిర్యగ్రేఖ.



పటం. 8.2

కాబట్టి, $\angle BCA = \angle DAC$ (ఏకాంతర కోణాల జతలు సమానం)

అదేవిధంగా, AB || DC మరియు AC ఒక తిర్యగ్రేఖ.

కావున, $\angle BAC = \angle DCA$ (ఏకాంతర కోణాలు)

మరియు AC = CA (ఉమ్మడి భుజం)

కావున, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (కో.భు.కో.నియమం)

లేదా, ABCD సమాంతర చతుర్భుజంను కర్ణం AC ΔABC మరియు ΔCDA అనే రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

ఇప్పుడు ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదుటి భుజాలను కొలవండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

AB = DC మరియు AD = BC అని గమనించారు.

కింద తెలిపిన విధంగా, ఇది సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక ధర్మం.

సిద్ధాంతం 8.2 : *సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానం.*

ఉపపత్తి : సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణము ఆ సమాంతర చతుర్భుజంను రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని నిరూపించాం. ఇప్పుడు సదృశ భాగాలను గురించి ఏమిచెబుతారు? అనగా సదృశ భుజాల గురించి ఏమి చెబుతారు? ఇవి సమానాలు.

కావున, AB = DC మరియు AD = BC

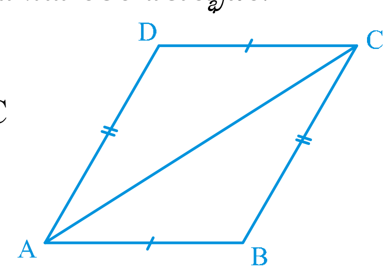
ఇప్పుడు ఈ ఫలితం యొక్క విపర్యయం ఏమిటి? సిద్ధాంతంలో ఏది ఇవ్వబడినదో అదే విపర్యయంగా నిరూపించబడుతుందని మరియు సిద్ధాంతంలో ఏది నిరూపించబడినదో అది విపర్యయంలో ఇవ్వబడినదని మనకు తెలుసు. సిద్ధాంతం 8.2 కింది విధముగా నిర్వచింపబడినది:

ఒక చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజం, అయిన దాని ఎదుటి భుజాలు సమానం దీనికి విపర్యయం:

సిద్ధాంతం 8.3 : *ఒక చతుర్భుజంలో ప్రతి జత ఎదుటి భుజాలు సమానం అయితే, అది సమాంతర చతుర్భుజం.*

కారణం ఎందుకో మీరు చెప్పగలరా?

ABCD చతుర్భుజంలో భుజాలు AB, CD లు సమానం మరియు AD = BC (పటం. 8.3ను చూడండి). కర్ణం AC ని గీయండి.



పటం. 8.3

స్పష్టంగా, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ఎందుకు?)

కావున, $\angle BAC = \angle DCA$

మరియు $\angle BCA = \angle DAC$ (ఎందుకు?)

మీరు ఇప్పుడు ABCD సమాంతర చతుర్భుజమని చెప్పగలరా? ఎందుకు?

You have just seen that in a parallelogram each pair of opposite sides is equal and conversely if each pair of opposite sides of a quadrilateral is equal, then it is a parallelogram. Can we conclude the same result for the pairs of opposite angles?

Draw a parallelogram and measure its angles. What do you observe?

Each pair of opposite angles is equal.

Repeat this with some more parallelograms. We arrive at yet another result as given below.

Theorem 8.4 : *In a parallelogram, opposite angles are equal.*

Now, is the converse of this result also true? Yes. Using the angle sum property of a quadrilateral and the results of parallel lines intersected by a transversal, we can see that the converse is also true. So, we have the following theorem :

Theorem 8.5 : *If in a quadrilateral, each pair of opposite angles is equal, then it is a parallelogram.*

There is yet another property of a parallelogram. Let us study the same. Draw a parallelogram ABCD and draw both its diagonals intersecting at the point O (see Fig. 8.4).

Measure the lengths of OA, OB, OC and OD.

What do you observe? You will observe that

$$OA = OC \quad \text{and} \quad OB = OD.$$

or, O is the mid-point of both the diagonals.

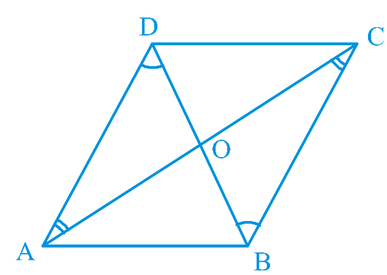


Fig. 8.4

Repeat this activity with some more parallelograms.

Each time you will find that O is the mid-point of both the diagonals.

So, we have the following theorem :

Theorem 8.6 : *The diagonals of a parallelogram bisect each other.*

Now, what would happen, if in a quadrilateral the diagonals bisect each other? Will it be aparallelogram? Indeed this is true.

This result is the converse of the result of Theorem 8.6. It is given below:

Theorem 8.7 : *If the diagonals of a quadrilateral bisect each other, then it is a parallelogram.*

You can reason out this result as follows:

సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానమని, విపర్యంగా చతుర్భుజంలో రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానం అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందని మనం తెలుసుకొన్నాం. ఇదే విధంగా ఒక చతుర్భుజంలోని ఎదుటి కోణాలు సమానమైతే అది సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించగలరా?

ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని గీసి, అందులోని కోణాలను కొలవండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

ఎదుటి కోణాల జతలు సమానం.

ఇదే విధంగా మరికొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను కొలవండి. కింద ఇవ్వబడిన విధంగా మీరే ఫలితాన్ని తెలుసుకొంటారు.

సిద్ధాంతం 8.4 : *సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదుటి కోణాలు సమానం.*

ఇప్పుడు, ఈ సిద్ధాంతానికి విపర్యయం కూడా సత్యం అవుతుందా? అవును. చతుర్భుజాలలో కోణాల మొత్తం ధర్మాన్ని సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడు ఫలితాలను ఉపయోగించి విపర్యయం కూడా సత్యమని నిరూపించవచ్చు. కావున కింది సిద్ధాంతాన్ని తెలుసుకొందాం :

సిద్ధాంతం 8.5 : *ఒక చతుర్భుజంలో ప్రతి జత ఎదుటి కోణాలు సమానం అయితే అది సమాంతర చతుర్భుజం.*

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక ధర్మం ఉంది. దాని గురించి తెలుసుకొందాం. ABCD సమాంతర చతుర్భుజాన్ని గీయండి. దానిలోని రెండు కర్ణాలు O వద్ద ఖండిచుకునేట్లు గీయండి. (పటం. 8.4ను చూడండి).

OA, OB, OC మరియు OD ల పొడవులను కొలవండి.

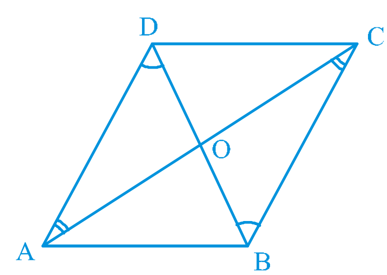
మీరు ఏమి గమనించారు?

$OA = OC$ మరియు $OB = OD$ అని గమనిస్తారు.

లేక, O అనునది రెండు కర్ణాల మధ్య బిందువు అవుతుంది.

మరికొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలకు ఈ కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి.

ప్రతిసారి కర్ణాల మధ్య బిందువు 'O' అని గమనిస్తారు.



పటం. 8.4

కాబట్టి మనం ఈ క్రింది సిద్ధాంతాన్ని తెలుసుకొందాం:

సిద్ధాంతం 8.6 : *సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.*

ఒక చతుర్భుజంలో కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకొంటే ఏమి జరుగుతుంది. అది సమాంతర చతుర్భుజమా? అవును. ఇది సత్యమే!

8.6 సిద్ధాంతానికి విపర్యయం క్రింద ఇవ్వబడింది:

సిద్ధాంతం 8.7 : *ఒక చతుర్భుజంలో కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటే, అది సమాంతర చతుర్భుజం అగును.*

ఈ ఫలితాలకు కారణాలను కింది విధంగా తెలుసుకొనవచ్చును:

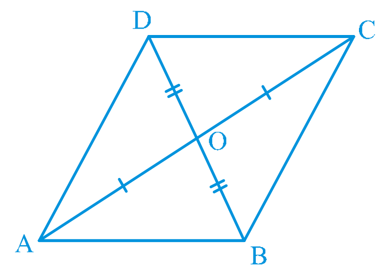


Fig. 8.5

Note that in Fig. 8.5, it is given that OA = OC and OB = OD.

So, Δ AOB $\cong$ Δ COD (Why?)

Therefore, $\angle$ ABO = $\angle$ CDO (Why?)

From this, we get AB || CD

Similarly, BC || AD

Therefore ABCD is a parallelogram.

Let us now take some examples.

Example 1 : Show that each angle of a rectangle is a right angle.

Solution : Let us recall what a rectangle is.

A rectangle is a parallelogram in which one angle is a right angle.

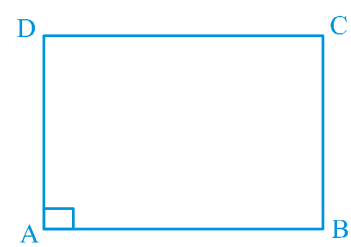


Fig. 8.6

Let ABCD be a rectangle in which $\angle$ A = 90°.

We have to show that $\angle$ B = $\angle$ C = $\angle$ D = 90°

We have, AD || BC and AB is a transversal (see Fig. 8.6).

So, $\angle$ A + $\angle$ B = 180° (Interior angles on the same side of the transversal)

But, $\angle$ A = 90°

So, $\angle$ B = 180° – $\angle$ A = 180° – 90° = 90°

Now, $\angle$ C = $\angle$ A and $\angle$ D = $\angle$ B

(Opposite angles of the parallellogram)

So, $\angle$ C = 90° and $\angle$ D = 90°.

Therefore, each of the angles of a rectangle is a right angle.

Example 2 : Show that the diagonals of a rhombus are perpendicular to each other.

Solution : Consider the rhombus ABCD (see Fig. 8.7).

You know that AB = BC = CD = DA (Why?)

Now, in Δ AOD and Δ COD,

OA = OC (Diagonals of a parallelogram bisect each other)

OD = OD (Common)

AD = CD

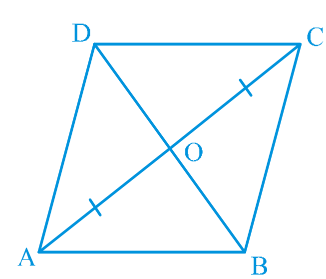
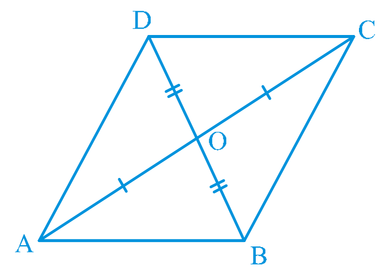


Fig. 8.7



పటం. 8.5

పటం 8.5 నందు OA = OC మరియు OB = OD అని ఇవ్వబడింది.

కావున, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ఎందుకు?)

కాబట్టి, $\angle ABO = \angle CDO$ (ఎందుకు?)

దీని నుండి $AB \parallel CD$ అని తెలుపుతుంది.

అదే విధంగా, $BC \parallel AD$

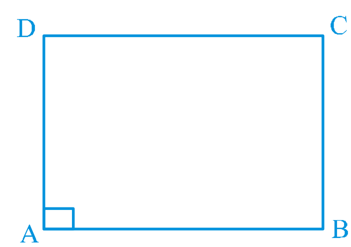
కావున ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1 : దీర్ఘ చతురస్రంలో ప్రతి కోణం లంబకోణం అని చూపండి.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రం అంటే ఏమిటో గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

సమాంతర చతుర్భుజంలో ఒక్క కోణం లంబకోణం అయితే అది దీర్ఘ చతురస్రం.



పటం. 8.6

ABCD దీర్ఘచతురస్రాన్ని తీసుకోండి. అందులో $\angle A = 90°$ అగునట్లు తీసుకోండి.

మనం $\angle B = \angle C = \angle D = 90°$ అని చూపాలి.

దీర్ఘచతురస్రంలో ఎదుటి భుజాలు $AD \parallel BC$ మరియు AB ఒక తిర్యగ్రేఖ (పటం. 8.6 చూడండి).

కావున, $\angle A + \angle B = 180°$ (తిర్యగ్రేఖ ఒకేవైపున ఉన్న అంతర కోణాలు)

కాని, $\angle A = 90°$

కావున, $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$

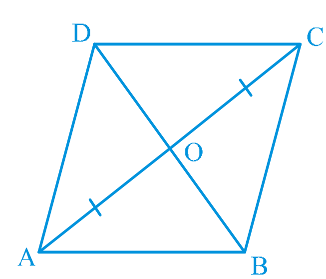
ఇప్పుడు, $\angle C = \angle A$ మరియు $\angle D = \angle B$ (సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదుటి కోణాలు)

కాబట్టి, $\angle C = 90°$ మరియు $\angle D = 90°$.

కావున దీర్ఘచతురస్రంలోని ప్రతికోణం లంబకోణం.

ఉదాహరణ 2 : రాంబస్ నందు కర్ణాలు ఒక దానికొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటాయని చూపండి.

సాధన : ABCD రాంబస్‌ను గీయండి (పటం. 8.7 చూడండి).



పటం. 8.7

AB = BC = CD = DA అవుతుంది (ఎందువలన?)

ఇప్పుడు, ΔAOD మరియు ΔCOD లలో,

OA = OC (సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి)

OD = OD (ఉమ్మడి భుజం)

AD = CD

Therefore, Δ AOD $\cong$ Δ COD

(SSS congruence rule)

This gives, $\angle$ AOD = $\angle$ COD (CPCT)

But, $\angle$ AOD + $\angle$ COD = 180° (Linear pair)

So, $2\angle$ AOD = 180°

or, $\angle$ AOD = 90°

So, the diagonals of a rhombus are perpendicular to each other.

Example 3 : ABC is an isosceles triangle in which AB = AC. AD bisects exterior angle PAC and CD || AB (see Fig. 8.8). Show that

(i) $\angle$ DAC = $\angle$ BCA and (ii) ABCD is a parallelogram.

Solution : (i) Δ ABC is isosceles in which AB = AC (Given)

So, $\angle$ ABC = $\angle$ ACB (Angles opposite to equal sides)

Also, $\angle$ PAC = $\angle$ ABC + $\angle$ ACB

(Exterior angle of a triangle)

or, $\angle$ PAC = $2\angle$ ACB (1)

Now, AD bisects $\angle$ PAC.

So, $\angle$ PAC = $2\angle$ DAC (2)

Therefore,

$2\angle$ DAC = $2\angle$ ACB [From (1) and (2)]

or, $\angle$ DAC = $\angle$ ACB

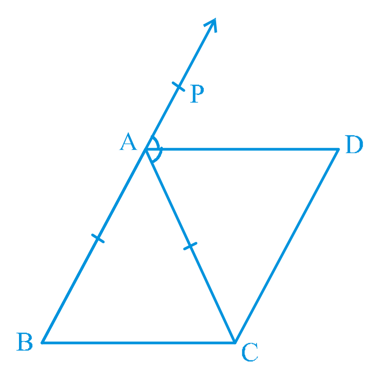


Fig. 8.8

(ii) Now, these equal angles form a pair of alternate angles when line segments BC and AD are intersected by a transversal AC.

So, BC || AD

Also, BA || CD (Given)

Now, both pairs of opposite sides of quadrilateral ABCD are parallel.

So, ABCD is a parallelogram.

Example 4 : Two parallel lines l and m are intersected by a transversal p (see Fig. 8.9). Show that the quadrilateral formed by the bisectors of interior angles is a rectangle.

కావున, $\Delta\, AOD \cong \Delta\, COD$ (భు. భు. భు. నియమం)

దీని నుండి, $\angle AOD = \angle COD$ (సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సరూప భాగాలు)

కాని, $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (రేఖీయ ద్వయం)

కావున, $2\angle AOD = 180°$

లేక, $\angle AOD = 90°$

కావున రాంబస్ నందు కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

ఉదాహరణ 3 : ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో $AB = AC$. AD బాహ్యకోణం PAC ని సమద్విఖండన చేయును మరియు $CD \parallel AB$ (పటం. 8.8 చూడండి) అయితే

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ మరియు (ii) ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని చూపండి.

సాధన : (i) $\Delta\, ABC$ సమద్విబాహు త్రిభుజంనందు $AB = AC$ (దత్తాంశం)

కావున, $\angle ABC = \angle ACB$ (సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు)

ఇంకా, $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (త్రిభుజానికి బాహ్య కోణం)

లేక, $\angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

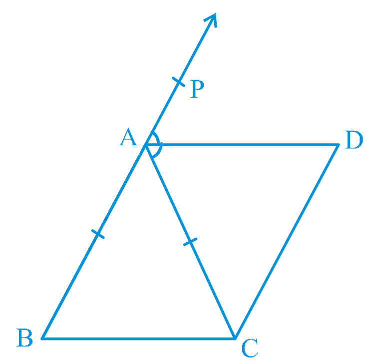
ఇప్పుడు $\angle PAC$ నకు AD సమద్విఖండన రేఖ.

కావున, $\angle PAC = 2\angle DAC$ (2)

అదేవిధంగా,

$2\angle DAC = 2\angle ACB$ [(1) మరియు (2) ల నుండి]

లేక, $\angle DAC = \angle ACB$



పటం. 8.8

(ii) ఇప్పుడు BC మరియు AD అను రేఖా ఖండాలను AC అనే తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడే ఏకాంతర కోణాలు సమానం.

కావున, $BC \parallel AD$

ఇదే విధంగా, $BA \parallel CD$ (దత్తాంశము)

ఇప్పుడు ABCD చతుర్భుజంలో ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలు.

కావున, ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అగును.

ఉదాహరణ 4 : l మరియు m అను రెండు సమాంతర రేఖలను p అనే తిర్యగ్రేఖ (పటం. 8.9 చూడండి) ఖండించిన వాటి మధ్య అంతరకోణాల సమద్విఖండన రేఖల వలన ఏర్పడే చతుర్భుజం దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తుందని చూపండి.

Solution : It is given that PS || QR and transversal p intersects them at points A and C respectively.

The bisectors of $\angle$ PAC and $\angle$ ACQ intersect at B and bisectors of $\angle$ ACR and $\angle$ SAC intersect at D.

We are to show that quadrilateral ABCD is a rectangle.

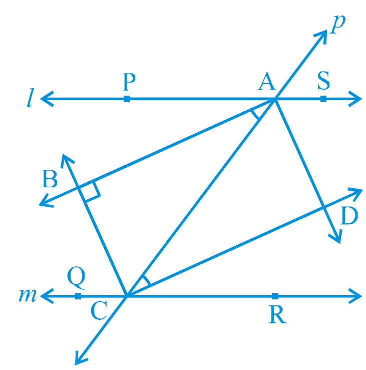


Fig. 8.9

Now, $\angle \text{PAC} = \angle \text{ACR}$

(Alternate angles as $l \parallel m$ and p is a transversal)

So, $\frac{1}{2} \angle \text{PAC} = \frac{1}{2} \angle \text{ACR}$

i.e., $\angle \text{BAC} = \angle \text{ACD}$

These form a pair of alternate angles for lines AB and DC with AC as transversal and they are equal also.

So, AB || DC

Similarly, BC || AD (Considering $\angle$ ACB and $\angle$ CAD)

Therefore, quadrilateral ABCD is a parallelogram.

Also, $\angle \text{PAC} + \angle \text{CAS} = 180°$ (Linear pair)

So, $\frac{1}{2} \angle \text{PAC} + \frac{1}{2} \angle \text{CAS} = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

or, $\angle \text{BAC} + \angle \text{CAD} = 90°$

or, $\angle \text{BAD} = 90°$

So, ABCD is a parallelogram in which one angle is 90°.

Therefore, ABCD is a rectangle.

Example 5 : Show that the bisectors of angles of a parallelogram form a rectangle.

Solution : Let P, Q, R and S be the points of intersection of the bisectors of $\angle$ A and $\angle$ B, $\angle$ B and $\angle$ C, $\angle$ C and $\angle$ D, and $\angle$ D and $\angle$ A respectively of parallelogram ABCD (see Fig. 8.10).

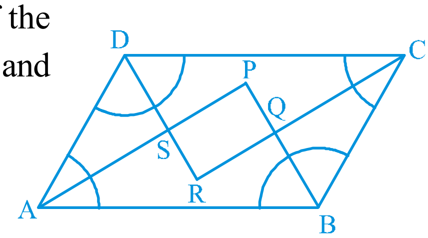


Fig. 8.10

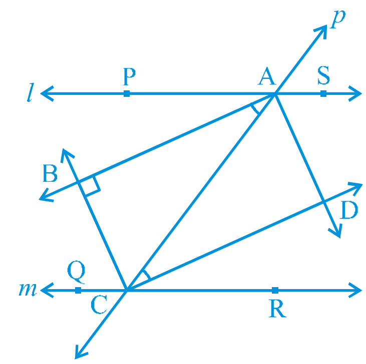
In Δ ASD, what do you observe?

Since DS bisects $\angle$ D and AS bisects $\angle$ A, therefore,

సాధన : PS || QR అని ఇవ్వబడింది. అదే విధంగా p అను తిర్యగ్రేఖ l, m అనే రేఖలను A మరియు C వద్ద ఖండిస్తుంది.

కోణసమద్విఖండన రేఖలు $\angle PAC$ మరియు $\angle ACQ$ లు B వద్ద ఖండిస్తుంది. అదే విధంగా కోణసమద్విఖండన రేఖలైన $\angle ACR$ మరియు $\angle SAC$ లు D వద్ద ఖండిస్తుంది.

ఇప్పుడు మనం ABCD అనే చతుర్భుజంను దీర్ఘ చతురస్రం అని చూపాలి.



పటం. 8.9

ఇప్పుడు, $\angle PAC = \angle ACR$

($l \parallel m$ మరియు p తిర్యగ్రేఖ అయిన ఏకాంతర కోణాలు సమానం)

కావున, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

అనగా, $\angle BAC = \angle ACD$ అగును.

AB మరియు DC అను రేఖలను AC అనే తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడే ఏకాంతర కోణాలు సమానాలు

కావున, $AB \parallel DC$

ఇదే విధంగా, $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ మరియు $\angle CAD$ లను తీసుకొనగా)

కావున ABCD చతుర్భుజం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అగును.

అదే విధంగా, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (రేఖీయద్వయం)

కావున, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

లేక, $\angle BAC + \angle CAD = 90°$

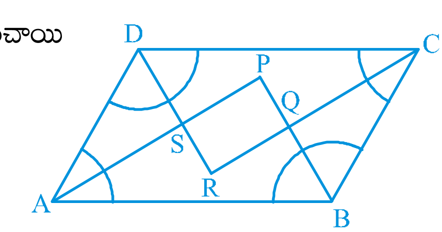
లేక, $\angle BAD = 90°$

కావున, ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో ఒక కోణం 90°.

అదే విధంగా, ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం అగును.

ఉదాహరణ 5 : సమాంతర చతుర్భుజంలోని కోణ సమద్విఖండనరేఖలు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన : ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ మరియు $\angle D$ కోణ సమద్విఖండన రేఖలు P, Q, R, S ల వద్ద ఖండించుకొని చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరిచాయి (పటం. 8.10 చూడండి).



పటం. 8.10

Δ ASD నందు నీవు ఏం గమనించావు?

$\angle D$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ DS మరియు $\angle A$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ AS కావున,

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180° \text{ (} \angle A \text{ and } \angle D \text{ are interior angles on the same side of the transversal)}$$

$$= 90°$$

Also, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180°$ (Angle sum property of a triangle)

or, $90° + \angle DSA = 180°$

or, $\angle DSA = 90°$

So, $\angle PSR = 90°$ (Being vertically opposite to $\angle DSA$)

Similarly, it can be shown that $\angle APB = 90°$ or $\angle SPQ = 90°$ (as it was shown for $\angle DSA$). Similarly, $\angle PQR = 90°$ and $\angle SRQ = 90°$.

So, PQRS is a quadrilateral in which all angles are right angles.

Can we conclude that it is a rectangle? Let us examine. We have shown that $\angle PSR = \angle PQR = 90°$ and $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$. So both pairs of opposite angles are equal.

Therefore, PQRS is a parallelogram in which one angle (in fact all angles) is 90° and so, PQRS is a rectangle.

EXERCISE 8.1

1. If the diagonals of a parallelogram are equal, then show that it is a rectangle.
2. Show that the diagonals of a square are equal and bisect each other at right angles.
3. Diagonal AC of a parallelogram ABCD bisects $\angle A$ (see Fig. 8.11). Show that

   (i) it bisects $\angle C$ also,

   (ii) ABCD is a rhombus.

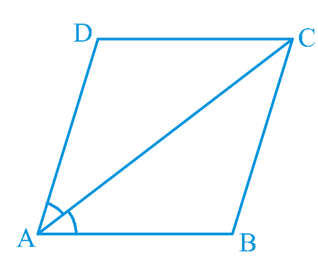


Fig. 8.11

4. ABCD is a rectangle in which diagonal AC bisects $\angle A$ as well as $\angle C$. Show that: (i) ABCD is a square (ii) diagonal BD bisects $\angle B$ as well as $\angle D$.

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$$ ($\angle A$ మరియు $\angle D$ లు తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గత అంతరకోణాలు)

$$= 90^\circ$$

అంతే కాకుండా, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ$ (త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం)

లేక, $90^\circ + \angle DSA = 180^\circ$

లేక, $\angle DSA = 90^\circ$

కావున, $\angle PSR = 90^\circ$ ($\angle DSA$ యొక్క శీర్షాభిముఖ కోణం)

ఇదే విధంగా $\angle APB = 90^\circ$ లేదా $\angle SPQ = 90^\circ$ ($\angle DSA$ చూపిన విధంగా)

ఇదే విధంగా, $\angle PQR = 90^\circ$ మరియు $\angle SRQ = 90^\circ$.

కావున, PQRS అనునది అన్ని కోణాలు లంబకోణాలుగా గల చతుర్భుజం.

ఇది దీర్ఘచతురస్రం అని చెప్పవచ్చునా? ఇప్పుడు పరీక్షిద్దాం. మనం $\angle PSR = \angle PQR = 90^\circ$ మరియు $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^\circ$ అని చూపాం. రెండు ఎదురెదురు కోణాల జతలు సమానం.

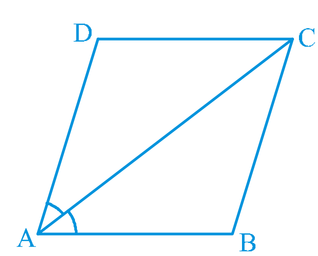
కాబట్టి, PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. అందులో ఒక కోణం (కాని ఇచ్చట అన్ని కోణాలు) 90° కావున PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

అభ్యాసం 8.1

1. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు సమానమైన అది దీర్ఘచతురస్రం అని చూపండి.
2. ఒక చతురస్రంలో కర్ణాలు సమానం మరియు లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయని చూపండి.
3. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో AC అనే కర్ణం $\angle A$ను కోణ సమద్విఖండన చేసినచో (పటం. 8.11 చూడండి)

   (i) $\angle C$ ను కూడా కోణ సమద్విఖండన చేస్తుందని

   (ii) ABCD సమచతుర్భుజం (రాంబస్) అని చూపండి.



పటం. 8.11

4. ABCD దీర్ఘచతురస్రంలో AC కర్ణము $\angle A$ మరియు $\angle C$ ని కోణ సమద్విఖండన చేసిన: (i) ABCD చతురస్రం అవుతుందని (ii) BD కర్ణము $\angle B$ మరియు $\angle D$ ని కోణ సమద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.

5. In parallelogram ABCD, two points P and Q are taken on diagonal BD such that DP = BQ (see Fig. 8.12). Show that:

(i) $\Delta\, APD \cong \Delta\, CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\Delta\, AQB \cong \Delta\, CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) APCQ is a parallelogram

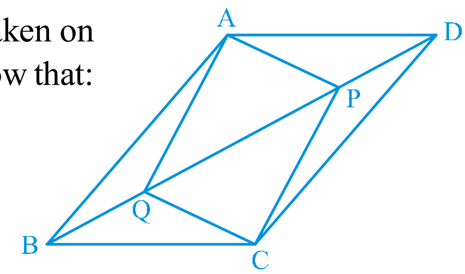


Fig. 8.12

6. ABCD is a parallelogram and AP and CQ are perpendiculars from vertices A and C on diagonal BD (see Fig. 8.13). Show that

(i) $\Delta\, APB \cong \Delta\, CQD$

(ii) $AP = CQ$

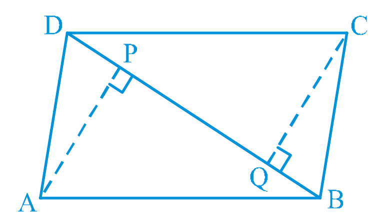


Fig. 8.13

7. ABCD is a trapezium in which AB || CD and AD = BC (see Fig. 8.14). Show that

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta\, ABC \cong \Delta\, BAD$

(iv) diagonal AC = diagonal BD

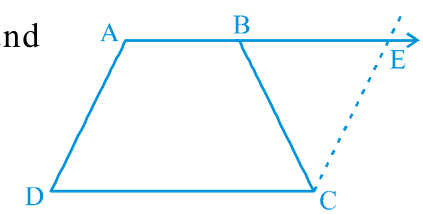


Fig. 8.14

[*Hint*: Extend AB and draw a line through C parallel to DA intersecting AB produced at E.]

8.2 The Mid-point Theorem

You have studied many properties of a triangle as well as a quadrilateral. Now let us study yet another result which is related to the mid-point of sides of a triangle. Perform the following activity.

Draw a triangle and mark the mid-points E and F of two sides of the triangle. Join the points E and F (see Fig. 8.15).

Measure EF and BC. Measure $\angle$ AEF and $\angle$ ABC.

What do you observe? You will find that :

$$EF = \frac{1}{2}\, BC \text{ and } \angle AEF = \angle ABC$$

so, $EF \parallel BC$

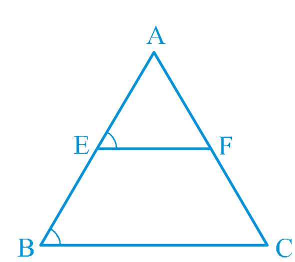


Fig. 8.15

Repeat this activity with some more triangles.

So, you arrive at the following theorem:

5. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో P మరియు Q అనే బిందువులు DP = BQ అయ్యే విధంగా BD కర్ణముపై గల బిందువులైన (పటం. 8.12 చూడండి)

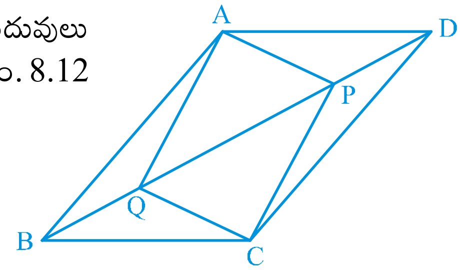
(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) APCQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.

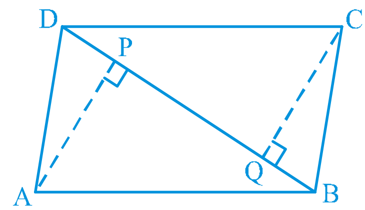


పటం. 8.12

6. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం మరియు కర్ణం BD పై A మరియు C అనే శీర్షాల గుండా గీయబడిన లంబాలు వరుసగా AP మరియు CQ అయిన (పటం. 8.13)

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(ii) $AP = CQ$ అని చూపండి.



పటం. 8.13

7. ABCD సమలంబ చతుర్భుజములో $AB \parallel CD$ మరియు $AD = BC$ (పటం. 8.14 చూడండి) అయిన

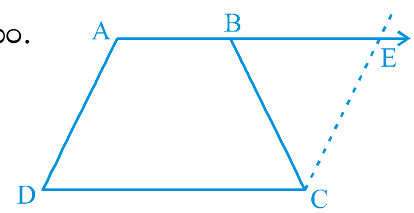
(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) కర్ణము AC = కర్ణము BD అని చూపండి.

[సూచన: పొడిగించిన AB ని E వద్ద ఖండించునట్లు DA కు సమాంతరంగా మరియు C గుండా పోయే విధంగా ABని పొడిగించండి]



పటం. 8.14

8.2 మధ్య బిందువు సిద్ధాంతం

మనం త్రిభుజం మరియు చతుర్భుజాల ధర్మాలను తెలుసుకున్నాం. త్రిభుజ భుజాల మధ్య బిందువులకు సంబంధించి మరొక ఫలితాన్ని తెలుసుకుందాం. ఈ కృత్యాన్ని చేద్దాం.

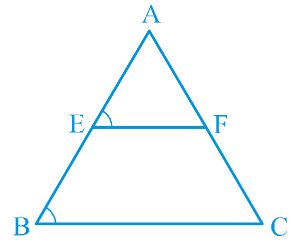
ఒక త్రిభుజాన్ని ΔABC గీచి రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను E మరియు F లుగా గుర్తించండి. E, F లను పటం (8.15) లో చూపిన విధంగా కలపండి.

త్రిభుజంలో EF మరియు BC భుజాలను కొలవండి. $\angle AEF$ మరియు $\angle ABC$.

కోణాలను కొలవండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

$$EF = \frac{1}{2} BC \text{ మరియు } \angle AEF = \angle ABC \text{ అని కనుగొంటారు.}$$

కావున, $EF \parallel BC$ అని చెప్పవచ్చును.



పటం. 8.15

మరికొన్ని త్రిభుజాలను తీసుకొని ఈ కృత్యాన్ని మరల చేయండి.

కావున, దీని నుండి మనం ఈ కింది సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించవచ్చును.

Theorem 8.8 : *The line segment joining the mid-points of two sides of a triangle is parallel to the third side.*

You can prove this theorem using the following clue:

Observe Fig 8.16 in which E and F are mid-points of AB and AC respectively and CD || BA.

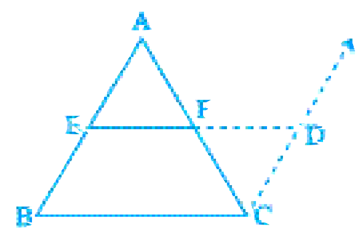


Fig. 8.16

$$\Delta\, AEF \cong \Delta\, CDF \quad \text{(ASA Rule)}$$

So, EF = DF and BE = AE = DC (Why?)

Therefore, BCDE is a parallelogram.(Why?)

This gives EF || BC.

In this case, also note that EF = $\frac{1}{2}$ ED = $\frac{1}{2}$BC.

Can you state the converse of Theorem 8.8? Is the converse true?

You will see that converse of the above theorem is also true which is stated as below:

Theorem 8.9 : *The line drawn through the mid-point of one side of a triangle, parallel to another side bisects the third side.*

In Fig 8.17, observe that E is the mid-point of AB, line *l* is passsing through E and is parallel to BC and CM || BA.

Prove that AF = CF by using the congruence of Δ AEF and Δ CDF.

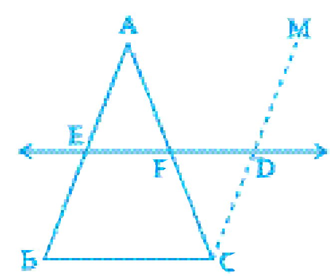


Fig. 8.17

Example 6 : In Δ ABC, D, E and F are respectively the mid-points of sides AB, BC and CA (see Fig. 8.18). Show that Δ ABC is divided into four congruent triangles by joining D, E and F.

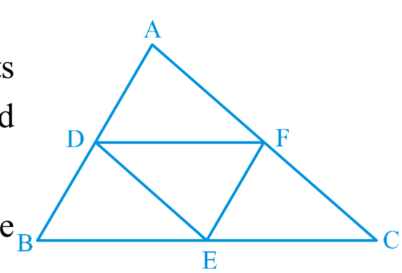


Fig. 8.18

Solution : As D and E are mid-points of sides AB and BC of the triangle ABC, by Theorem 8.8,

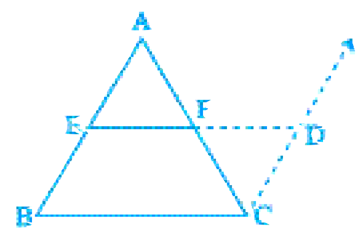
DE || AC

Similarly, DF || BC and EF || AB

సిద్ధాంతం 8.8 : *ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.*

ఈ సిద్ధాంతాన్ని కింద ఇచ్చిన సూచన ద్వారా నిరూపించవచ్చు.

పటం 8.16 ను గమనించండి. ఇక్కడ AB, AC భుజాల మధ్య బిందువులు వరుసగా E మరియు Fలు మరియు CD || BA.



పటం. 8.16

$$\Delta AEF \cong \Delta CDF$$ (కో.భు.కో. నియమం)

కావున, EF = DF మరియు BE = AE = DC (ఎందుకు?)

కాబట్టి, BCDE ఒక సమాంతర చతుర్భుజము (ఎందుకు?)

దీని నుండి EF || BC అగును.

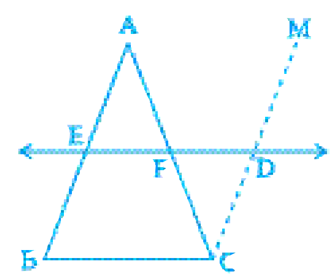
ఈ సందర్భం నుండి $EF = \frac{1}{2}\ ED = \frac{1}{2} BC$ అని గమనించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 8.8కు విపర్యయం చెప్పగలరా? ఈ విపర్యయం సత్యమా?

ఈ సిద్ధాంత విపర్యయం కూడా సత్యమే దానిని క్రింది విధంగా నిర్వహించవచ్చు.

సిద్ధాంతం 8.9 : *ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజం మధ్య బిందువు నుండి మరొక భుజానికి సమాంతరముగా గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.*

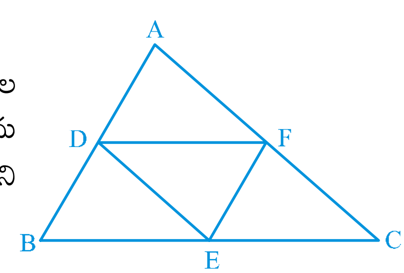
పటం 8.17 నందు ΔABC లో AB మధ్య బిందువు E మరియు BC కి సమాంతరంగా l అనే రేఖ E గుండా పోతుంది. CM || BA



పటం. 8.17

Δ AEF మరియు Δ CDF లలో సర్వసమానత్వ నియమం (కో.భు.కో.) ప్రకారం AF = CF అని నిరూపించండి.

ఉదాహరణ 6 : Δ ABC లో D, E, F లు వరుసగా AB, BC మరియు CA భుజాల మధ్య బిందువులు, (పటం 8.18 చూడండి) మరియు f, D, E, F బిందువులను కలిపినప్పుడు Δ ABC ని నాలుగు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజింపబతుందని నిరూపించండి.



పటం. 8.18

సాధన : Δ ABC లో D, E లు వరుసగా AB, BC భుజాల మధ్య బిందువులు, కావున మధ్య బిందువు సిద్ధాంతం 8.9 ప్రకారం,

DE || AC

ఇదే విధంగా, DF || BC మరియు EF || AB అవుతుంది.

Therefore ADEF, BDFE and DFCE are all parallelograms.

Now DE is a diagonal of the parallelogram BDFE,

therefore, Δ BDE $\cong$ Δ FED

Similarly Δ DAF $\cong$ Δ FED

and Δ EFC $\cong$ Δ FED

So, all the four triangles are congruent.

Example 7 : *l*, *m* and *n* are three parallel lines intersected by transversals *p* and *q* such that *l*, *m* and *n* cut off equal intercepts AB and BC on *p* (see Fig. 8.19). Show that *l*, *m* and *n* cut off equal intercepts DE and EF on *q* also.

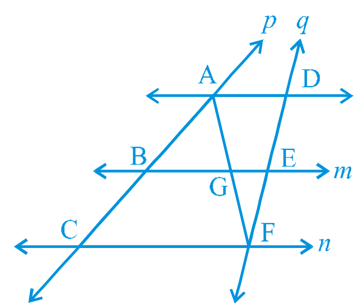


Fig. 8.19

Solution : We are given that AB = BC and have to prove that DE = EF.

Let us join A to F intersecting *m* at G..

The trapezium ACFD is divided into two triangles; namely Δ ACF and Δ AFD.

In Δ ACF, it is given that B is the mid-point of AC (AB = BC)

and BG || CF (since *m* || *n*).

So, G is the mid-point of AF (by using Theorem 8.9)

Now, in Δ AFD, we can apply the same argument as G is the mid-point of AF, GE || AD and so by Theorem 8.9, E is the mid-point of DF,

i.e., DE = EF.

In other words, *l*, *m* and *n* cut off equal intercepts on *q* also.

EXERCISE 8.2

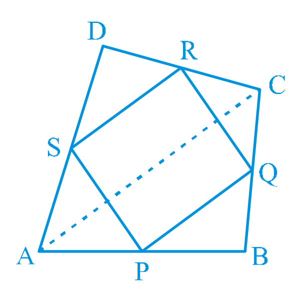


Fig. 8.20

1. ABCD is a quadrilateral in which P, Q, R and S are mid-points of the sides AB, BC, CD and DA (see Fig 8.20). AC is a diagonal. Show that :

   (i) SR || AC and SR = $\frac{1}{2}$ AC

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS is a parallelogram.

అందువలన ADEF, BDFE మరియు DFCE లు అన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలు.

ఇప్పుడు BDFE సమాంతర చతుర్భుజంలో DE కర్ణము,

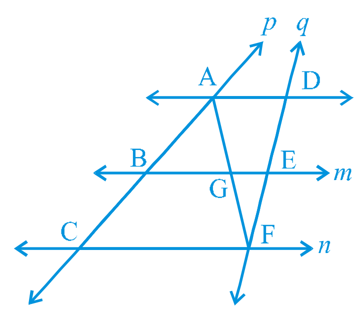
కావున, $\Delta BDE \cong \Delta FED$

ఇదేవిధంగా $\Delta DAF \cong \Delta FED$

మరియు $\Delta EFC \cong \Delta FED$

కనుక నాలుగు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అయినవి.

ఉదాహరణ 7 : l, m మరియు n అనే మూడు సమాంతర రేఖలను p మరియు q అనే రెండు తిర్యగ్రేఖలు A,B,C మరియు D, E, F ల వద్ద ఖండించాయి. ఈ సమాంతర రేఖలను రెండు సమాన అంతర ఖండాలు AB, BC లుగా విభజిస్తాయి. (పటం 8.19 ను చూడండి). ఇప్పుడు l, m, n రేఖలు 'q' తిర్యగ్రేఖను కూడా సమాన అంతరఖండాలు DE మరియు EF లుగా విభజిస్తుందని చూపండి.



పటం. 8.19

సాధన : దత్తాంశం ప్రకారం AB = BC అని ఇవ్వబడింది. ఇప్పుడు DE = EF అని నిరూపించాలి.

m అనే రేఖను G వద్ద ఖండించునట్లు A నుండి F ను కలపండి.

ACFD ట్రెపీజియం రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించబడినది;
అవి ΔACF మరియు ΔAFD

ΔACF లో AC మధ్య బిందువు B అని ఇవ్వబడింది, $(AB = BC)$

మరియు $BG \parallel CF$ ($m \parallel n$ కావున)

అందుచే AF యొక్క మధ్య బిందువు G అయినది. (సిద్ధాంతం 8.9 ప్రకారం)

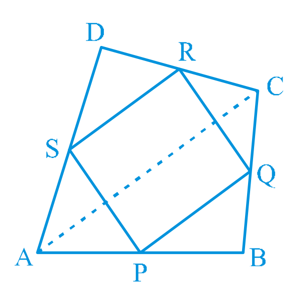
పైన పేర్కొన్న విధంగా ఇదే రీతిలో ΔAFDలో AF యొక్క మధ్య బిందువు G, $GE \parallel AD$ మరియు సిద్ధాంతం 8.9 నుండి DF మధ్య బిందువు అవుతుంది.

కావున, DE = EF అవుతుంది. అనగా,

q రేఖపై కూడా l, m మరియు n రేఖలు సమాన అంతరఖండాలు చేస్తున్నాయి.

అభ్యాసం 8.2

1. ABCD చతుర్భుజంలో AB, BC, CD మరియు DA ల మధ్య బిందువులు వరుసగా P, Q, R మరియు S (పటం 8.20 చూడండి) AC కర్ణం అయిన:
   (i) $SR \parallel AC$ మరియు $SR = \frac{1}{2} AC$
   (ii) $PQ = SR$
   (iii) PQRS ఒక సమాంతర చతర్భుజం అని చూపండి.



పటం. 8.20

2. ABCD is a rhombus and P, Q, R and S are the mid-points of the sides AB, BC, CD and DA respectively. Show that the quadrilateral PQRS is a rectangle.

3. ABCD is a rectangle and P, Q, R and S are mid-points of the sides AB, BC, CD and DA respectively. Show that the quadrilateral PQRS is a rhombus.

4. ABCD is a trapezium in which AB || DC, BD is a diagonal and E is the mid-point of AD. A line is drawn through E parallel to AB intersecting BC at F (see Fig. 8.21). Show that F is the mid-point of BC.

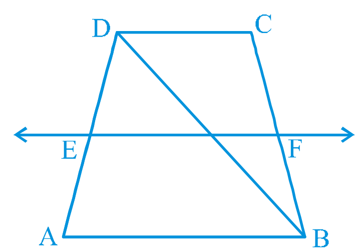


Fig. 8.21

5. In a parallelogram ABCD, E and F are the mid-points of sides AB and CD respectively (see Fig. 8.22). Show that the line segments AF and EC trisect the diagonal BD.

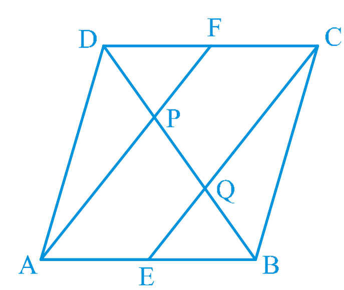


Fig. 8.22

6. ABC is a triangle right angled at C. A line through the mid-point M of hypotenuse AB and parallel to BC intersects AC at D. Show that

(i) D is the mid-point of AC

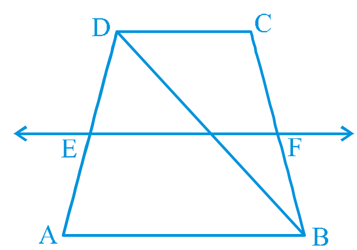
(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

2. ABCD సమ చతుర్భుజంలో AB, BC, CD మరియు DA ల మధ్య బిందువులు వరుసగా P, Q, R మరియు S. PQRS చతుర్భుజం దీర్ఘచతురస్రం అని చూపండి.

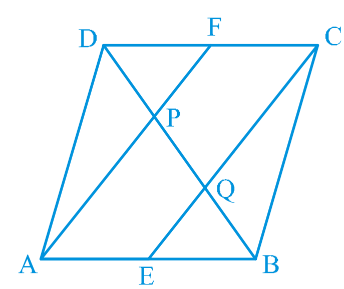
3. ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రంలో AB, BC, CD మరియు DA ల మధ్య బిందువులు వరుసగా P, Q, R మరియు S. PQRS చతుర్భుజము ఒక సమచతుర్భుజం అని చూపండి.

4. ABCD ట్రెపీజియంలో AB || DC, BD ఒక కర్ణం మరియు AD భుజం యొక్క మధ్యబిందువు E. E గుండా ABకి సమాంతరంగాBC ని F వద్ద ఖండించునట్లు (పటం 8.21.ను చూడండి) ఒక రేఖను గీయవలెను. అయిన BC యొక్క మధ్య బిందువు F అనిచూపండి.



పటం. 8.21

5. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో E మరియు F లు వరుసగా AB మరియు CD మధ్యబిందువులు (పటం. 8.22 చూడండి). అయిన AF మరియు EC రేఖాఖండాలు కర్ణం BD ని త్రిథాకరిస్తాయని చూపండి.



పటం. 8.22

6. ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో 'C' లంబకోణం. కర్ణం AB మధ్య బిందువు M గుండా, BC కి సమాంతరంగా గీచిన రేఖ AC ని D వద్ద ఖండిస్తే, కింది వానిని నిరూపించండి.

(i) AC మధ్యబిందువు D

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

8.3 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. A diagonal of a parallelogram divides it into two congruent triangles.

2. In a parallelogram,

(i) opposite sides are equal (ii) opposite angles are equal

(iii) diagonals bisect each other

3. Diagonals of a rectangle bisect each other and are equal and vice-versa.

4. Diagonals of a rhombus bisect each other at right angles and vice-versa.

5. Diagonals of a square bisect each other at right angles and are equal, and vice-versa.

6. The line-segment joining the mid-points of any two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of it.

7. A line through the mid-point of a side of a triangle parallel to another side bisects the third side.

8.3 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు ఈ క్రింది అంశాలు మీరు నేర్చుకొన్నారు :

1. సమాంతర చతుర్భుజంను కర్ణం రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

2. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో

(i) ఎదుటి భుజాలు సమానాలు (ii) ఎదురెదురు కోణాలు సమానాలు

(iii) కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

3. ఒక దీర్ఘ చతురస్రంలో కర్ణాలు సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి మరియు కర్ణాలు సమానాలు. దీని విపర్యయం కూడా సత్యమగును.

4. సమచతుర్భుజం (రాంబస్) నందు కర్ణాలు లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. మరియు దీని విపర్యయం కూడా సత్యమగును.

5. ఒక చతురస్రంలో కర్ణాలు లంబకోణాల వద్ద సమద్విఖండన (లంబ సమద్విఖండన) చేసుకుంటాయి. మరియు కర్ణాలు సమానాలు. దీని విపర్యయము కూడా సత్యమగును.

6. ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపుతూ గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజానికి సమాంతరంగానూ మరియు దానిలో సగం ఉంటుంది.

7. ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజం యొక్క మధ్య బిందువు నుండి వేరొక భుజానికి సమాంతరంగా గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

0962CH10

CHAPTER 9

CIRCLES

9.1 Angle Subtended by a Chord at a Point

You have already studied about circles and its parts in Class VI.

Take a line segment PQ and a point R not on the line containing PQ. Join PR and QR (see Fig. 9.1). Then $\angle$ PRQ is called the angle subtended by the line segment PQ at the point R. What are angles POQ, PRQ and PSQ called in Fig. 9.2? $\angle$ POQ is the angle subtended by the chord PQ at the centre O, $\angle$ PRQ and $\angle$ PSQ are respectively the angles subtended by PQ at points R and S on the major and minor arcs PQ.

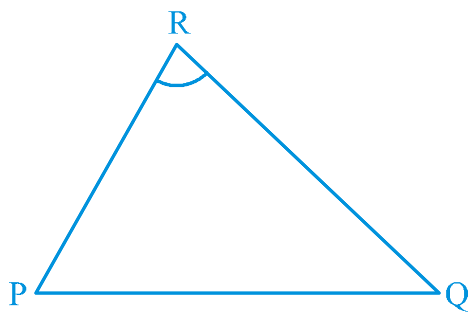


Fig. 9.1

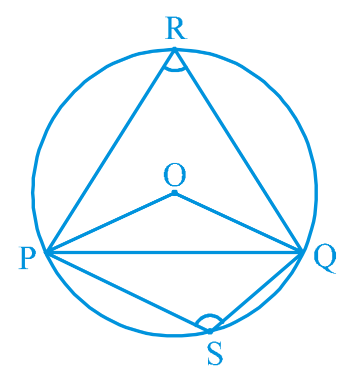


Fig. 9.2

Let us examine the relationship between the size of the chord and the angle subtended by it at the centre. You may see by drawing different chords of a circle and angles subtended by them at the centre that the longer is the chord, the bigger will be the angle subtended by it at the centre. What will happen if you take two equal chords of a circle? Will the angles subtended at the centre be the same or not?

L5X3S9

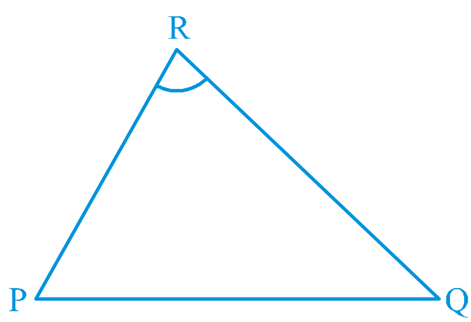
అధ్యాయం 9

వృత్తాలు

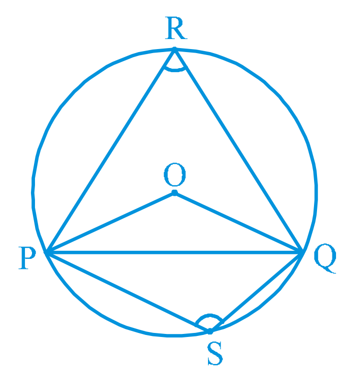
9.1 ఒక బిందువు వద్ద ఒక జ్యా చేయు కోణం

మీరు 6వ తరగతిలో వృత్తము మరియు దాని భాగాల గురించి నేర్చుకొని ఉన్నారు.

ఒక రేఖా ఖండం PQ మరియు రేఖాఖండం PQ పై లేనిబిందువు Rను తీసుకొనుము. PR మరియు QRలను కలుపుము. (పటం 9.1 చూడండి). అపుడు $\angle PRQ$ ని PQ రేఖాఖండం R బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణం అని పిలుస్తారు. పటం 9.2 లోగల కోణాలు $\angle POQ$, $\angle PRQ$ మరియు $\angle PSQ$ లను ఏమని పిలుస్తారు? $\angle POQ$ అనునది కేంద్రం O వద్ద PQ జ్యా ఏర్పరచు కోణం. అదే విధంగా PQ జ్యా అధిక మరియు అల్ప చాపాలపై గల బిందువులు R మరియు S ల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు వరుసగా $\angle PRQ$ మరియు $\angle PSQ$ లు అగును.



పటం. 9.1



పటం. 9.2

ఇప్పుడు, జ్యా పొడవు మరియు ఈ జ్యా కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణాల మధ్య సంబంధాన్ని మనం పరిశీలిద్దాం. వివిధ జ్యాలను గీయడం ద్వారా మరియు అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణాలను పరిశీలించినట్లైతే, జ్యా పొడవు పెరిగిన కొలది అది కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణము పెరుగుటను గమనిస్తాము. మీరు ఒక వృత్తం లోని రెండు సమాన జ్యాలను తీసుకున్నట్లయితే, అవి కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమా? కాదా?

Draw two or more equal chords of a circle and measure the angles subtended by them at the centre (see Fig.9.3). You will find that the angles subtended by them at the centre are equal. Let us give a proof of this fact.

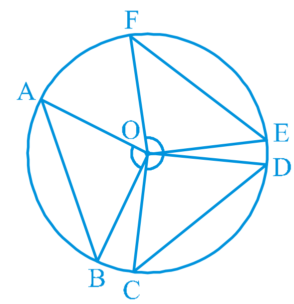


Fig. 9.3

Theorem 9.1 : *Equal chords of a circle subtend equal angles at the centre.*

Proof : You are given two equal chords AB and CD of a circle with centre O (see Fig.9.4). You want to prove that $\angle$ AOB = $\angle$ COD.

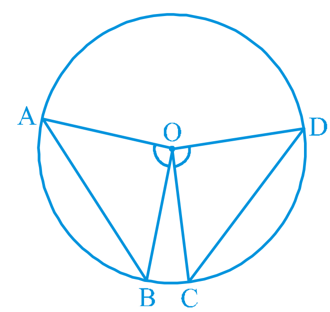


Fig. 9.4

In triangles AOB and COD,

OA =	OC	(Radii of a circle)
OB =	OD	(Radii of a circle)
AB =	CD	(Given)

Therefore, Δ AOB $\cong$ Δ COD (SSS rule)

This gives $\angle$ AOB = $\angle$ COD

(Corresponding parts of congruent triangles)

Remark : For convenience, the abbreviation CPCT will be used in place of 'Corresponding parts of congruent triangles', because we use this very frequently as you will see.

Now if two chords of a circle subtend equal angles at the centre, what can you say about the chords? Are they equal or not? Let us examine this by the following activity:

Take a tracing paper and trace a circle on it. Cut it along the circle to get a disc. At its centre O, draw an angle AOB where A, B are points on the circle. Make another angle POQ at the centre equal to $\angle$AOB. Cut the disc along AB and PQ (see Fig. 9.5). You will get two segments ACB and PRQ of the circle. If you put one on the other, what do you observe? They cover each other, i.e., they are congruent. So AB = PQ.

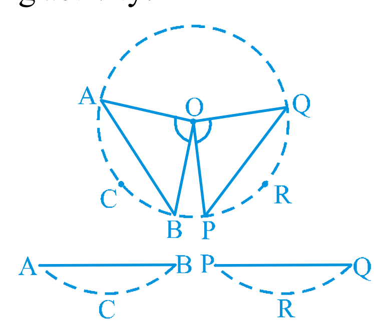
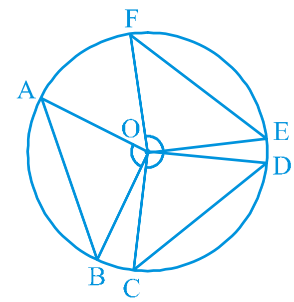


Fig. 9.5

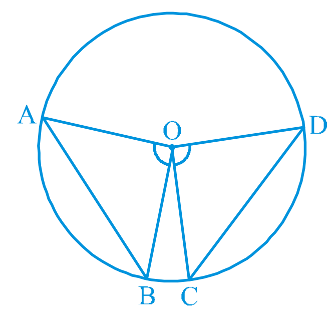
ఒక వృత్తం యొక్క రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సమాన జ్యాలను గీయండి మరియు అవి కేంద్రం వద్ద చేయు కోణాలను కొలవండి (పటం 9.3 చూడండి). కేంద్రం వద్ద వాటి ద్వారా చేయబడ్డ కోణాలు సమానంగా ఉన్నట్లుగా మీరు కనుగొంటారు. ఈ వాస్తవానికి ఒక రుజువును ఇద్దాం.



పటం. 9.3

సిద్ధాంతం 9.1 : *ఒక వృత్తం యొక్క సమాన జ్యాలు కేంద్రం వద్ద సమాన కోణాలను ఏర్పరచును.*

నిరూపణ : O కేంద్రంగా ఉన్న వృత్తంలో AB మరియు CD లు సమాన జ్యాలు ఇవ్వబడినవి (పటం 9.4 చూడండి). $\angle AOB = \angle COD$ అని మీరు నిరూపించాలి.



పటం. 9.4

AOB మరియు COD త్రిభుజాల్లో,

OA = OC (వృత్త వ్యాసార్థం)

OB = OD (వృత్త వ్యాసార్థం)

AB = CD (దత్తాంశం)

కావున, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (భు.భు.భు. నియమం)

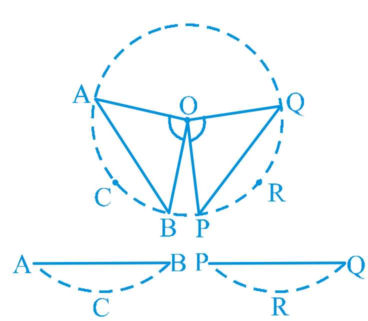
$\therefore$ $\angle AOB = \angle COD$

(సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సదృశ భాగాలు)

సూచన : సౌలభ్యం కొరకు, 'సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సదృశ భాగాలు' స్థానంలో CPCT (Corresponding parts of congruent triangles) అనే సంక్షిప్త పదం ఉపయోగించబడుతుంది. ఎందుకంటే దీనిని మనం చాలా తరచుగా ఉపయోగిస్తాం.

ఇప్పుడు ఒక వృత్తం యొక్క రెండు జ్యాలు కేంద్రం వద్ద సమాన కోణాలను కలిగి ఉన్నట్లయితే, ఆ జ్యాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? అవి సమానమా కాదా? ఈ క్రింది కృత్యం ద్వారా దీనిని పరిశీలిద్దాం :

ఒక పారదర్శక కాగితంను (ట్రేసింగ్ పేపర్) తీసుకొనుము మరియు దానిపై ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. ఒక డిస్క్ (కాగితపు చక్రం) పొందడం కొరకు వృత్తం వెంబడి దానిని కత్తిరించండి. దాని కేంద్రం O వద్ద, A, Bలు వృత్తం మీద బిందువులుగా ఉండే AOB కోణాన్ని గీయండి. AOB కోణమునకు సమానమైన మరో కోణము POQ ను కేంద్రం వద్ద గీయండి (పటం 9.5 చూడండి). AB మరియు PQ ల అంచు వెంబడి డిస్క్‌ని కత్తిరించండి. ఇప్పుడు మీకు ACB మరియు PRQ అనే రెండు వృత్త ఖండాలు లభించును. వీటిని ఒకదానిపై మరొకటి అమర్చిన, మీరు ఏమి గమనించారు? అవి ఒకదానితో మరొకటి ఏకీభవించును. అనగా అవి సర్వసమానాలు. కాబట్టి AB = PQ.



పటం. 9.5

Though you have seen it for this particular case, try it out for other equal angles too. The chords will all turn out to be equal because of the following theorem:

Theorem 9.2 : *If the angles subtended by the chords of a circle at the centre are equal, then the chords are equal.*

The above theorem is the converse of the Theorem 9.1. Note that in Fig. 9.4, if you take $\angle$ AOB = $\angle$ COD, then

$$\Delta\, AOB \cong \Delta\, COD \text{ (Why?)}$$

Can you now see that AB = CD?

EXERCISE 9.1

1. Recall that two circles are congruent if they have the same radii. Prove that equal chords of congruent circles subtend equal angles at their centres.
2. Prove that if chords of congruent circles subtend equal angles at their centres, then the chords are equal.

9.2 Perpendicular from the Centre to a Chord

Activity : Draw a circle on a tracing paper. Let O be its centre. Draw a chord AB. Fold the paper along a line through O so that a portion of the chord falls on the other. Let the crease cut AB at the point M. Then, $\angle$ OMA = $\angle$ OMB = 90° or OM is perpendicular to AB. Does the point B coincide with A (see Fig.9.6)?

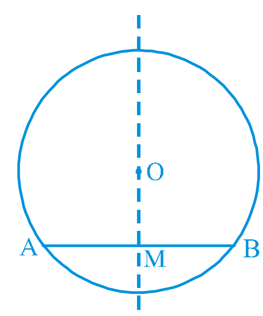


Fig. 9.6

Yes it will. So MA = MB.

Give a proof yourself by joining OA and OB and proving the right triangles OMA and OMB to be congruent. This example is a particular instance of the following result:

Theorem 9.3 : *The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord.*

What is the converse of this theorem? To write this, first let us be clear what is assumed in Theorem 9.3 and what is proved. Given that the perpendicular from the centre of a circle to a chord is drawn and to prove that it bisects the chord. Thus in the converse, what the hypothesis is 'if a line from the centre bisects a chord of a circle' and what is to be proved is 'the line is perpendicular to the chord'. So the converse is:

ఈ ప్రత్యేక సందర్భం కోసం మీరు దీనిని చూసినప్పటికీ, ఇతర సమాన కోణాల కోసం కూడా ప్రయత్నించండి. క్రింది సిద్ధాంతాన్ని అనుసరిస్తే జ్యాలన్నీ సమానంగా మారతాయి.

సిద్ధాంతం 9.2 : *ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన ఆ జ్యాలు సమానం.*

ఈ సిద్ధాంతం, సిద్ధాంతం 9.1 యొక్క విపర్యయం. ఈ విషయాన్ని పటం 9.4 లో గమనించండి.
$\angle AOB = \angle COD$ గా తీసుకొన్నట్లేతే, అప్పుడు

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ఎందుకు?)

ఇప్పుడు $AB = CD$ అని మీరు గమనించగలరా?

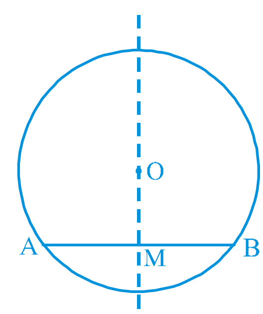
అభ్యాసం 9.1

1. రెండు వృత్తాలు ఒకే వ్యాసార్థాన్ని కలిగి ఉన్నట్లయితే అవి సర్వసమాన వృత్తాలు అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి. ఆ వృత్తాల సమాన జ్యాలు వాటి కేంద్రాల వద్ద సమాన కోణాలను చేస్తాయని రుజువు చేయండి.

2. సర్వసమాన వృత్తాల జ్యాలు వాటి కేంద్రాల వద్ద సమాన కోణాలను చేసినట్లయితే, అప్పుడు ఆ జ్యాలు సమానం అని రుజువు చేయండి.

9.2 వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాకు గీయబడిన లంబం

కృత్యం : ట్రేసింగ్ పేపర్‌పై ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. దానికి O ని కేంద్రంగా తీసుకోండి. AB జ్యా గీయండి. కాగితాన్ని O గుండా ఒక రేఖ వెంబడి మడవండి. తద్వారా జ్యా యొక్క ఒక భాగం మరొకదానిపై పడుతుంది. మడత M బిందువు వద్ద ABని కత్తిరించండి. తర్వాత $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ లేదా OM అనేది ABకు లంబంగా ఉంటుంది. B అనే బిందువు A తో ఏకీభవిస్తుందా? (పటం 9.6 చూడండి)



పటం. 9.6

అవును అలానే అవుతుంది. కాబట్టి $MA = MB$.

OA మరియు OB లను కలపడం ద్వారా, OMA మరియు OMB అనే లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలని నిరూపణ చేయడం ద్వారా మీ అంతట మీరు నిరూపణ చేయండి. ఈ ఉదాహరణ ఈ క్రింది ఫలితం యొక్క ఒక నిర్దిష్ట సందర్భం:

సిద్ధాంతం 9.3 : *వృత్తం కేంద్రం నుండి జ్యా కు గీచిన లంబం ఆ జ్యా ను సమద్విఖండన చేస్తుంది.*

ఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ఏమిటి? దీనిని వ్రాయడానికి, మొదట సిద్ధాంతం 9.3 లో ఏమి ఊహించబడిందో మరియు ఏమి రుజువు చేయబడిందో స్పష్టం చేద్దాం. వృత్త కేంద్రం నుండి ఒక జ్యాకు లంబం గీయబడింది మరియు అది జ్యాను సమద్విఖండనం చేస్తుందని రుజువు చేయాలి. అందువల్ల ఆ విపర్యయంలో దత్తాంశం ప్రకారం 'కేంద్రం నుండి ఒక రేఖ ఒక వృత్త జ్యా ను సమద్విఖండన చేస్తుంది' మరియు 'ఆ రేఖ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది' అని రుజువు చేయాలి'. కాబట్టి విపర్యయం ఏమిటంటే:

Theorem 9.4 : *The line drawn through the centre of a circle to bisect a chord is perpendicular to the chord.*

Is this true? Try it for few cases and see. You will see that it is true for these cases. See if it is true, in general, by doing the following exercise. We will write the stages and you give the reasons.

Let AB be a chord of a circle with centre O and O is joined to the mid-point M of AB. You have to prove that OM $\perp$ AB. Join OA and OB (see Fig. 9.7). In triangles OAM and OBM,

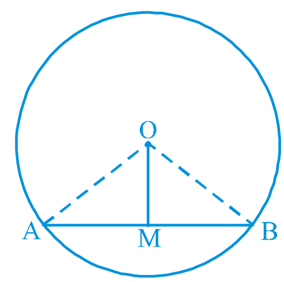


Fig. 9.7

OA = OB (Why ?)

AM = BM (Why ?)

OM = OM (Common)

Therefore, ΔOAM $\cong$ ΔOBM (How ?)

This gives $\angle$OMA = $\angle$OMB = 90° (Why ?)

9.3 Equal Chords and Their Distances from the Centre

Let AB be a line and P be a point. Since there are infinite numbers of points on a line, if you join these points to P, you will get infinitely many line segments PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4, etc. Which of these is the distance of AB from P? You may think a while and get the answer. Out of these line segments, the perpendicular from P to AB, namely PM in Fig. 9.8, will be the least. In Mathematics, we define this least length PM to be **the distance of AB from P**. So you may say that:

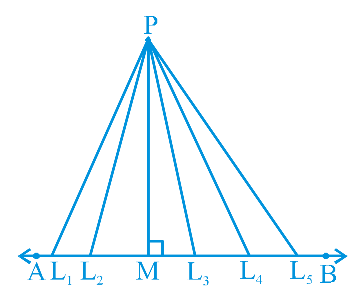


Fig. 9.8

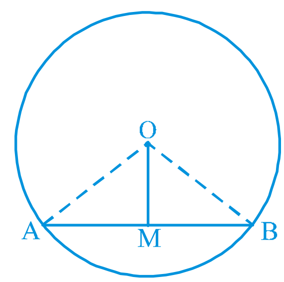
The length of the perpendicular from a point to a line is the distance of the line from the point.

Note that if the point lies on the line, the distance of the line from the point is zero.

A circle can have infinitely many chords. You may observe by drawing chords of a circle that longer chord is nearer to the centre than the smaller chord. You may observe it by drawing several chords of a circle of different lengths and measuring their distances from the centre. What is the distance of the diameter, which is the

సిద్ధాంతం 9.4 : *కేంద్రం నుండి జ్యాను సమద్విఖండన చేయురేఖ ఆ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది.*

ఇది సత్యమా? కొన్ని సందర్భాల్లో దీనిని ప్రయత్నించి చూడండి. ఈ సందర్భాలకు ఇది సత్యమని మీరు గమనిస్తారు. ఈ క్రింది అభ్యాసం చేయడం ద్వారా, సాధారణంగా ఇది సత్యం అని చూడండి. ఇవ్వబడిన సోపానాలకు కారణాలను తెలియచేయండి.



పటం. 9.7

O కేంద్రంగా గల వృత్తం యొక్క జ్యా AB అనుకుందాం. O, AB మధ్య బిందువు M కు జతచేయబడింది. మనం $OM \perp AB$ అని రుజువు చేయాలి. OA మరియు OB లను కలపండి (పటం 9.7 చూడండి). OAM మరియు OBM త్రిభుజాలలో,

$OA = OB$ (ఎందుకు?)

$AM = BM$ (ఎందుకు?)

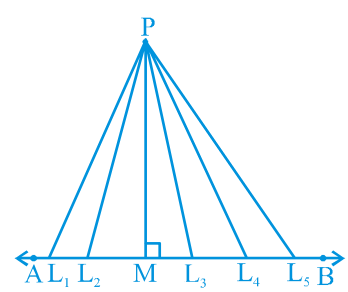
$OM = OM$ (ఉమ్మడి భుజం)

కనుక, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (ఎలా?)

దీని నుండి $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (ఎందుకు?)

9.3 సమాన జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటి దూరాలు

AB ఒక రేఖ మరియు P ఒక బిందువు అనుకుందాం. ఒక రేఖపై అనంతమైన బిందువులు ఉంటాయి కనుక, మనం ఈ బిందువులను Pకు జతచేస్తే, మనం PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 మొదలైన అనంతమైన అనేక రేఖాఖండాలను పొందుతారు. వీటిలో ఏది P నుండి AB కి దూరం అగును? మీరు కాసేపు ఆలోచించి, సమాధానం పొందవచ్చు. ఈ రేఖాఖండాలలో, పటం. 9.8లో చూపబడిన, P నుండి AB కు గీచిన లంబం PM కనిష్టంగా ఉంటుంది. గణితంలో, ఈ అతి తక్కువ పొడవు PM ని **P నుండి AB యొక్క దూరం**గా మనం నిర్వచిస్తాం. కాబట్టి మీరు ఇలా చెప్పవచ్చు:



పటం. 9.8

ఒక బిందువు నుండి ఒక రేఖకు లంబంగా ఉండే పొడవును ఆ బిందువు నుండి రేఖకు గల దూరం అని అంటారు.

ఒకవేళ బిందువు రేఖపై ఉన్నట్లయితే, బిందువు నుండి రేఖ యొక్క దూరం సున్నా అని గమనించండి.

ఒక వృత్తం అసంఖ్యాకంగా జ్యాలను కలిగి ఉంటుంది. ఒక వృత్తానికి జ్యాలను గీయడం ద్వారా, పొడవైన జ్యా చిన్న జ్యా కంటే కేంద్రానికి దగ్గరగా ఉండటాన్ని మీరు గమనించవచ్చు. ఒక వృత్తానికి వివిధ పొడవుల గల అనేక జ్యాలను గీయడం ద్వారా మరియు కేంద్రం నుండి వాటి దూరాలను కొలవడం ద్వారా మీరు దీనిని గమనించవచ్చు. కేంద్రం నుంచి అతి పొడవైన జ్యా

longest chord from the centre? Since the centre lies on it, the distance is zero. Do you think that there is some relationship between the length of chords and their distances from the centre? Let us see if this is so.

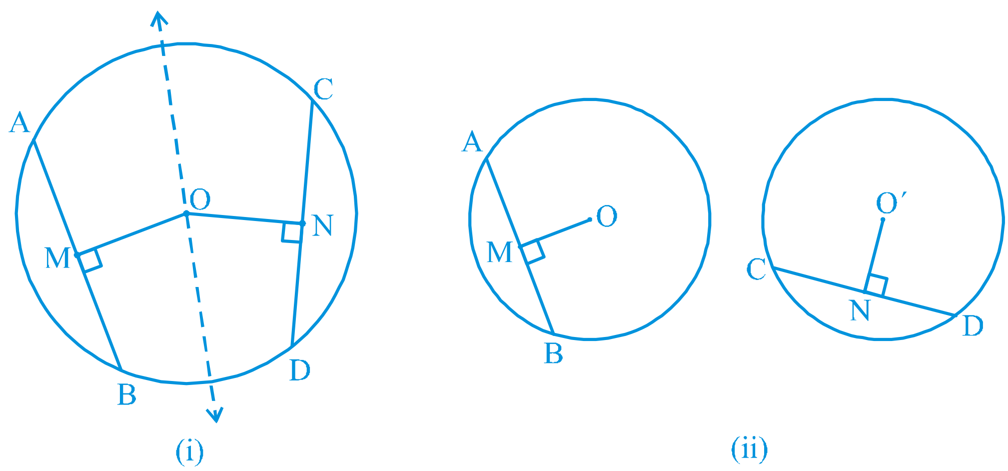


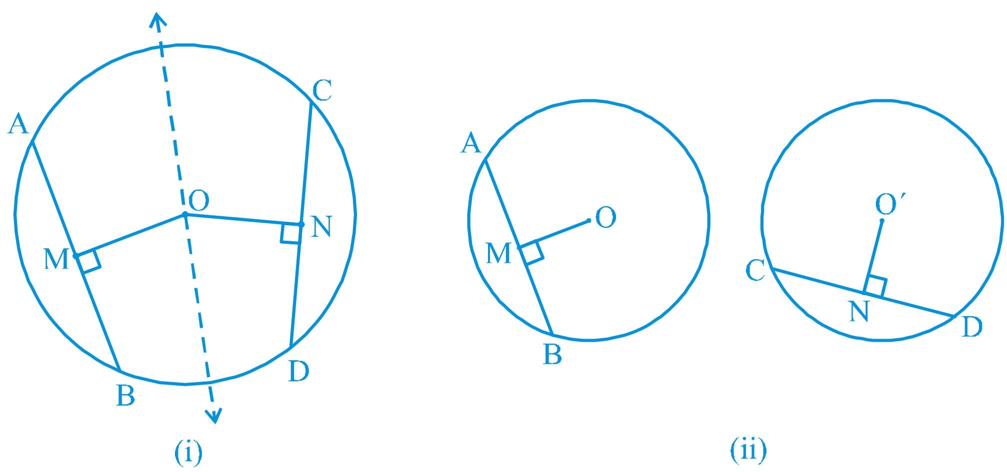
Fig. 9.9

Activity : Draw a circle of any radius on a tracing paper. Draw two equal chords AB and CD of it and also the perpendiculars OM and ON on them from the centre O. Fold the figure so that D falls on B and C falls on A [see Fig.9.9 (i)]. You may observe that O lies on the crease and N falls on M. Therefore, OM = ON. Repeat the activity by drawing congruent circles with centres O and O′ and taking equal chords AB and CD one on each. Draw perpendiculars OM and O′N on them [see Fig. 9.9(ii)]. Cut one circular disc and put it on the other so that AB coincides with CD. Then you will find that O coincides with O′ and M coincides with N. In this way you verified the following:

Theorem 9.5 : *Equal chords of a circle* (*or of congruent circles*) *are equidistant from the centre* (*or centres*).

Next, it will be seen whether the converse of this theorem is true or not. For this, draw a circle with centre O. From the centre O, draw two line segments OL and OM of equal length and lying inside the circle [see Fig. 9.10(i)]. Then draw chords PQ and RS of the circle perpendicular to OL and OM respectively [see Fig 9.10(ii)]. Measure the lengths of PQ and RS. Are these different? No, both are equal. Repeat the activity for more equal line segments and drawing the chords perpendicular to them. This verifies the converse of the Theorem 9.5 which is stated as follows:

అయిన వ్యాసం యొక్క దూరం ఎంత? కేంద్రం దానిపై ఉంటుంది కనుక, దూరం సున్నా. జ్యాల పొడవుకు మరియు కేంద్రం నుండి వాటికి గల దూరాలకు మధ్య ఏదైనా సంబంధం ఉందని మీరు భావిస్తున్నారా? ఇది నిజమో కాదో, మనం చూద్దాం.



పటం. 9.9

కృత్యం : ఒక పారదర్శక కాగితం మీద ఏదైనా వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తాన్ని గీయండి. దానిలో AB మరియు CD అనే రెండు సమాన పొడవు గల జ్యాలను గీయండి మరియు కేంద్రం O నుంచి ఆ జ్యాలకు OM మరియు ON అనే లంబాలను గీయండి. B మీద D మరియు A మీద C పడేవిధంగా పటాన్ని మడవండి [పటం 9.9(i) ని చూడండి]. O మడతపెట్టగా ఏర్పడిన గీతపై O మరియు N, M ఉండటాన్ని మీరు గమనించవచ్చు. అందువల్ల, OM = ON. O మరియు O′ కేంద్రాలతో సర్వసమాన వృత్తాలను గీయడం ద్వారా మరియు ఒక్కోదానిపై ఒక్కో సమాన జ్యా AB మరియు CDలను తీసుకోవడం ద్వారా కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి. వాటిపై OM మరియు ON అనే లంబాలను గీయండి [పటం 9.9(ii)ని చూడండి]. ఒక వృత్తాకార డిస్క్ ని కత్తిరించండి మరియు AB అనేది CD తో ఏకీభవించేలా దానిని మరొకదానిపై ఉంచండి. అప్పుడు O అనేది O′ తో ఏకీభవిస్తుందని మరియు M అనేది Nతో ఏకీభవిస్తుందని మీరు కనుగొంటారు. ఈ విధంగా మీరు దిగువ పేర్కొన్నవాటిని సరిచూస్తారు:

సిద్ధాంతం 9.5 : *వృత్తం (లేదా సర్వసమాన వృత్తాలు) యొక్క సర్వసమాన జ్యాలు కేంద్రం (లేదా కేంద్రాలు) నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.*

తర్వాతఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం సత్యమా, కాదా అనేది చూడబడుతుంది. దీని కొరకు, O కేంద్రంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. O కేంద్రం నుండి, సమాన పొడవు కలిగిన OL మరియు OM అనే రెండు రేఖాఖండాలను గీయండి మరియు వృత్తం లోపల ఉంచండి [పటం 9.10(i)ని చూడండి]. తరువాత వృత్త జ్యాలు PQ మరియు RS లను వరసగా OL మరియు OM లకు లంబంగా గీయండి [పటం 9.10(ii)ని చూడండి]. PQ మరియు RS యొక్క పొడవులను లెక్కించండి. ఇవి వేర్వేరుగా ఉన్నాయా? లేదు, రెండూ సమానమే. సమాన రేఖాఖండాలు తీసుకొని వాటికి లంబంగా జ్యాలు గీచి కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయండి. ఇది ఈ క్రింది విధంగా పేర్కొనబడిన సిద్ధాంతము 9.5 యొక్క విపర్యయాన్ని ధృవీకరిస్తుంది:

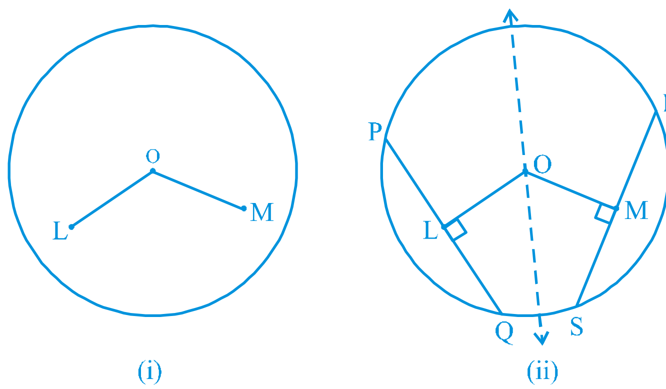


Fig. 9.10

Theorem 9.6 : *Chords equidistant from the centre of a circle are equal in length.*

We now take an example to illustrate the use of the above results:

Example 1 : If two intersecting chords of a circle make equal angles with the diameter passing through their point of intersection, prove that the chords are equal.

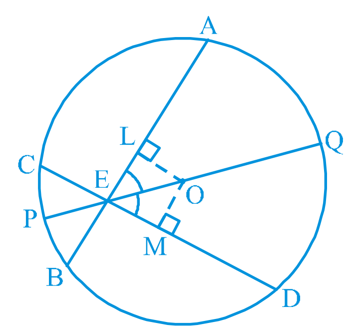


Fig. 9.11

Solution : Given that AB and CD are two chords of a circle, with centre O intersecting at a point E. PQ is a diameter through E, such that $\angle$AEQ = $\angle$DEQ (see Fig.9.11). You have to prove that AB = CD. Draw perpendiculars OL and OM on chords AB and CD, respectively. Now

$\angle$ LOE = 180° – 90° – $\angle$ LEO = 90° – $\angle$ LEO

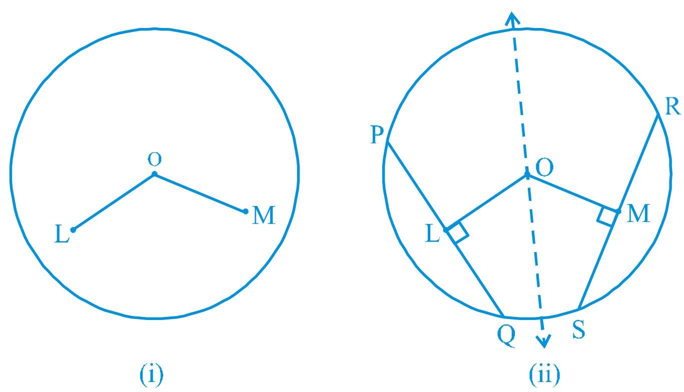
(Angle sum property of a triangle)

= 90° – $\angle$ AEQ = 90° – $\angle$ DEQ

= 90° – $\angle$ MEO = $\angle$ MOE

In triangles OLE and OME,

	$\angle$ LEO = $\angle$ MEO	(Why ?)
	$\angle$ LOE = $\angle$ MOE	(Proved above)
	EO = EO	(Common)
Therefore,	Δ OLE $\cong$ Δ OME	(Why ?)
This gives	OL = OM	(CPCT)
So,	AB = CD	(Why ?)

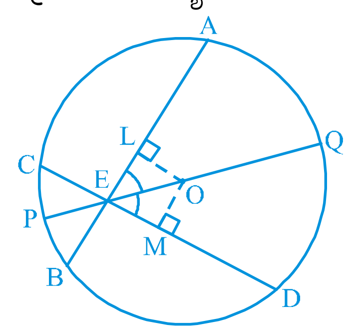


పటం. 9.10

సిద్ధాంతం 9.6 : *వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉన్న జ్యా పొడవులు సమానంగా ఉంటాయి.*

పై ఫలితాల యొక్క ఉపయోగాన్ని వివరించడానికి మనం ఇక్కడ ఒక ఉదాహరణను తీసుకుందాం:

ఉదాహరణ 1 : ఒక వృత్తంలో ఖండించుకున్న రెండు జ్యాలు, వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా ప్రయాణించే వ్యాసంతో సమాన కోణాలను చేస్తే, ఆ జ్యాల పొడవులు సమానంగా ఉంటాయని నిరూపించండి.



పటం. 9.11

సాధన : దత్తాంశం ప్రకారం, O కేంద్రంగా గల వృత్తం యొక్క రెండు జ్యాలు AB, CD లు E బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. $\angle AEQ = \angle DEQ$ అయ్యేటట్లు PQ అనేది E గుండా పోయే వ్యాసం (పటం 9.11 చూడండి). మీరు AB = CD అని రుజువు చేయాలి. వరుసగా AB మరియు CD జ్యాలపై OL మరియు OM అనే లంబాలను గీయండి. ఇప్పుడు

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$

(త్రిభుజం కోణాల ధర్మం)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

OLE, OME త్రిభుజాలలో,

	$\angle LEO = \angle MEO$	(ఎందుకు?)
	$\angle LOE = \angle MOE$	(పైన రుజువు చేయబడింది)
	$EO = EO$	(ఉమ్మడి)
కాబట్టి,	$\Delta OLE \cong \Delta OME$	(ఎందుకు?)
దీని నుండి,	$OL = OM$	(CPCT)
కావున,	$AB = CD$	(ఎందుకు ?)

EXERCISE 9.2

1. Two circles of radii 5 cm and 3 cm intersect at two points and the distance between their centres is 4 cm. Find the length of the common chord.
2. If two equal chords of a circle intersect within the circle, prove that the segments of one chord are equal to corresponding segments of the other chord.
3. If two equal chords of a circle intersect within the circle, prove that the line joining the point of intersection to the centre makes equal angles with the chords.
4. If a line intersects two concentric circles (circles with the same centre) with centre O at A, B, C and D, prove that AB = CD (see Fig. 9.12).

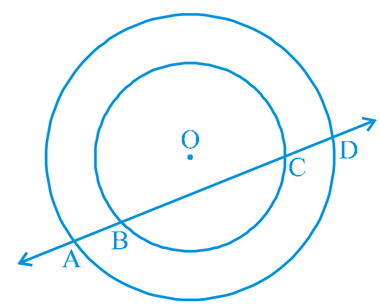


Fig. 9.12

5. Three girls Reshma, Salma and Mandip are playing a game by standing on a circle of radius 5m drawn in a park. Reshma throws a ball to Salma, Salma to Mandip, Mandip to Reshma. If the distance between Reshma and Salma and between Salma and Mandip is 6m each, what is the distance between Reshma and Mandip?
6. A circular park of radius 20m is situated in a colony. Three boys Ankur, Syed and David are sitting at equal distance on its boundary each having a toy telephone in his hands to talk each other. Find the length of the string of each phone.

9.4 Angle Subtended by an Arc of a Circle

You have seen that the end points of a chord other than diameter of a circle cuts it into two arcs – one major and other minor. If you take two equal chords, what can you say about the size of arcs? Is one arc made by first chord equal to the corresponding arc made by another chord? In fact, they are more than just equal in length. They are congruent in the sense that if one arc is put on the other, without bending or twisting, one superimposes the other completely.

You can verify this fact by cutting the arc, corresponding to the chord CD from the circle along CD and put it on the corresponding arc made by equal chord AB. You will find that the arc CD superimpose the arc AB completely (see Fig. 9.13). This shows that equal chords make congruent arcs and conversely congruent arcs make equal chords of a circle. You can state it as follows:

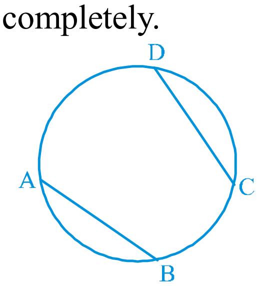


Fig. 9.13

If two chords of a circle are equal, then their corresponding arcs are congruent and conversely, if two arcs are congruent, then their corresponding chords are equal.

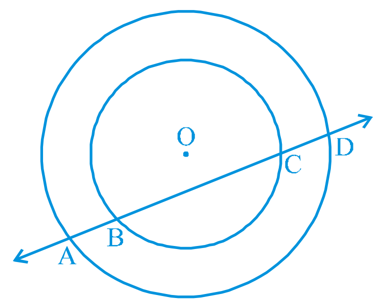
అభ్యాసం 9.2

1. 5 సెం.మీ. మరియు 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థం కలిగిన రెండు వృత్తాలు రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటాయి మరియు వాటి కేంద్రాల మధ్య దూరం 4 సెం.మీ. ఉమ్మడి జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

2. వృత్తం యొక్క రెండు సమాన జ్యాలు వృత్తం లోపల ఖండించుకున్నట్లయితే, ఒక జ్యా యొక్క ఖండాలు మరో జ్యా యొక్క సంబంధిత ఖండితాలకు సమానమని రుజువు చేయండి.

3. ఒక వృత్తం యొక్క రెండు సమాన జ్యాలు వృత్తం లోపల ఖండించుకున్నట్లయితే, ఖండన బిందువును కేంద్రానికి కలిపే రేఖ, జ్యాలతో సమాన కోణాలను ఏర్పరుస్తుందని రుజువు చేయండి.

4. ఒక రేఖ O కేంద్రంగా గల రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలను (ఒకే కేంద్రం కల్గిన వృత్తాలు) A, B, C మరియు D వద్ద ఖండించినట్లయితే, AB = CD అని రుజువు చేయండి (పటం 9.12 చూడండి).



పటం. 9.12

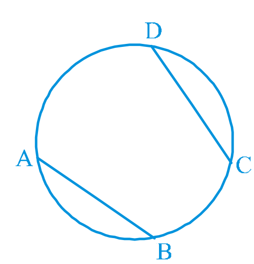
5. రేష్మా, సల్మా మరియు మన్‌దీప్ అనే ముగ్గురు అమ్మాయిలు ఒక పార్కులో 5 మీ. వ్యాసార్థం తో గీసిన వృత్తంపై నిలబడి ఒక ఆట ఆడుతున్నారు. రేష్మా ఒక బంతిని సల్మాకు, సల్మా మన్‌దీప్‌కు, మన్‌దీప్ రేష్మాకు విసురుతుంది. ఒకవేళ రేష్మా మరియు సల్మాల మధ్య మరియు సల్మా మరియు మన్‌దీప్‌ల మధ్య దూరం 6 మీ. అయితే, రేష్మా మరియు మన్‌దీప్‌ల మధ్య దూరం ఎంత?

6. 20 మీటర్ల వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తాకార పార్కు ఒక కాలనీలో ఉంది. అంకుర్, సయ్యద్ మరియు డేవిడ్ అనే ముగ్గురు బాలురు దాని సరిహద్దుపై సమాన దూరంలో కూర్చున్నారు. ఒకరితో ఒకరు మాట్లాడుకోవడానికి వారి చేతుల్లో ఒక బొమ్మ టెలిఫోన్ ఉంది. ప్రతి ఫోన్ వైర్ యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

9.4 వృత్తంలో వృత్త చాపం ఏర్పరచే కోణం

ఒక వృత్తంలో వ్యాసం కాకుండా ఏదైనా జ్యా యొక్క అంత్య బిందువులు వృత్తాన్ని రెండు చాపాలుగా అనగా – అధిక చాపం మరియు మరొకటి అల్ప చాపాలుగా విభజిస్తుందని మీరు గమనించి ఉంటారు. ఒకవేళ మీరు రెండు సమాన పొడవు గల జ్యాలను తీసుకొనిన, అపుడు ఆ జ్యాలు ఏర్పరచు చాపాల పొడవులు గురించి ఏమి చెప్పగలరు? మొదటి జ్యా ఏర్పరచిన ఒక చాపం పొడవు రెండవ జ్యా ఏర్పరచిన, దాని అనురూప చాపం పొడవుకు సమానమా? వాస్తవానికి, అవి రెండూ సమాన పొడవును కలిగి ఉంటాయి. అవి సర్వసమానం అనగా వంచడం లేదా మెలితిప్పడం చేయకుండా, అవి ఒక దానిపై ఒకటి అమర్చినా అవి ఒక దానితో మరొకటి పూర్తిగా ఏకీభవించును.

ఈ విషయాన్ని మీరు ఈ క్రింది పద్ధతి ద్వారా సరిచూడవచ్చును. CD జ్యా కి అనుగుణంగా ఉన్న చాపాన్ని వృత్తం నుండి కత్తిరించి దీనిని AB జ్యా కి అనుగుణంగా ఉన్న చాపంపై ఉంచండి. చాపం CD, చాపంAB తో పూర్తిగా ఏకీభవించును. (పటం 9.13 చూడండి). దీనిని బట్టి సమాన జ్యాలు సర్వసమాన చాపాలను ఏర్పరుస్తాయని మరియు దీనికి విపర్యంగా సర్వసమాన చాపాలు సమాన పొడవు గల జ్యాలను ఏర్పరుస్తాయని నిర్ధారించవచ్చు. దీనిని మీరు ఈ క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు:



పటం. 9.13

ఒక వృత్తం లో రెండు జ్యాలు సమానమైన వాటి అనురూప చాపాలు సర్వసమానాలు మరియు దీనికి విపర్యయంగా, ఒక వృత్తంలో రెండు చాపాలు సర్వసమానాలైన, వాటి అనురూప జ్యాలు సమానం.

Also the angle subtended by an arc at the centre is defined to be angle subtended by the corresponding chord at the centre in the sense that the minor arc subtends the angle and the major arc subtends the reflex angle. Therefore, in Fig 9.14, the angle subtended by the minor arc PQ at O is ∠POQ and the angle subtended by the major arc PQ at O is reflex angle POQ.

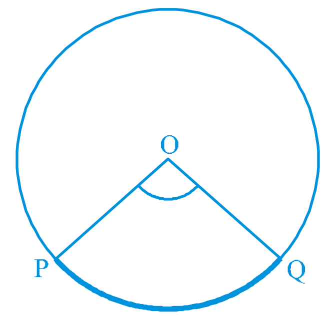


Fig. 9.14

In view of the property above and Theorem 9.1, the following result is true:

Congruent arcs (or equal arcs) of a circle subtend equal angles at the centre.

Therefore, the angle subtended by a chord of a circle at its centre is equal to the angle subtended by the corresponding (minor) arc at the centre. The following theorem gives the relationship between the angles subtended by an arc at the centre and at a point on the circle.

Theorem 9.7 : *The angle subtended by an arc at the centre is double the angle subtended by it at any point on the remaining part of the circle.*

Proof : Given an arc PQ of a circle subtending angles POQ at the centre O and PAQ at a point A on the remaining part of the circle. We need to prove that ∠ POQ = 2 ∠ PAQ.

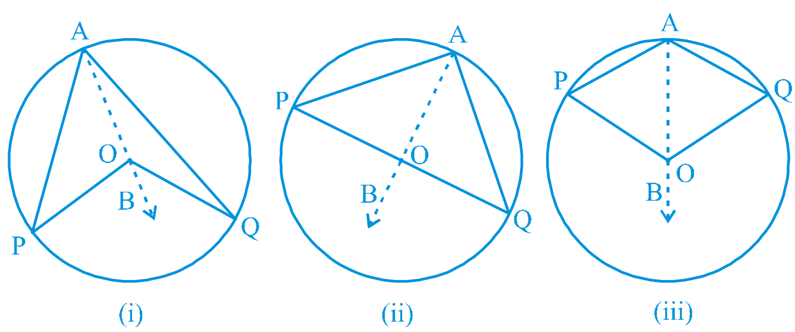


Fig. 9.15

Consider the three different cases as given in Fig. 9.15. In (i), arc PQ is minor; in (ii), arc PQ is a semicircle and in (iii), arc PQ is major.

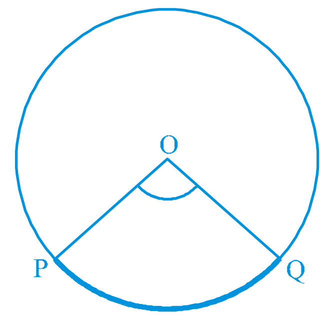
Let us begin by joining AO and extending it to a point B.

In all the cases,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

because an exterior angle of a triangle is equal to the sum of the two interior opposite angles.

ఒక చాపం వృత్తకేంద్రం వద్ద చేయు కోణాన్ని దాని అనురూప జ్యా కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణంగా నిర్వచించారు. అనగా అల్ప చాపం ఏర్పరచు కోణానికి పరావర్తన కోణమును అధిక చాపం ఏర్పరచును. కాబట్టి పటం 9.14లో అల్ప చాపం PQ కేంద్రం O వద్ద ఏర్పరచు కోణం $\angle POQ$ మరియు అధిక చాపం PQ కేంద్రం O వద్ద ఏర్పరచు కోణం పరావర్తన కోణం POQ.



పటం. 9.14

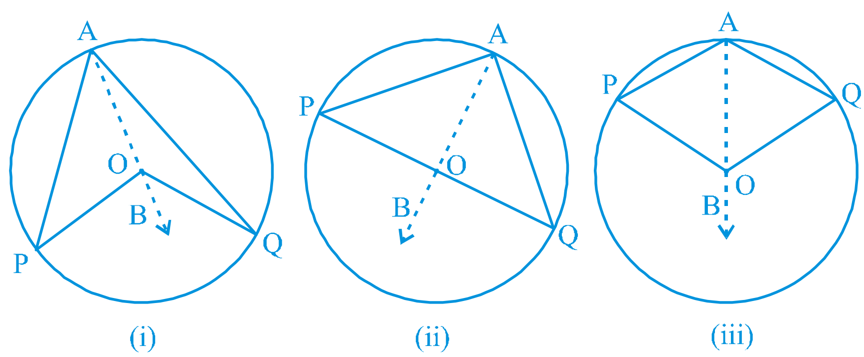
పై ధర్మం మరియు సిద్ధాంతం 9.1 అనుసరించి క్రింది ఫలితం సత్యం:

వృత్తం యొక్క సర్వ సమాన చాపాలు (లేదా సమాన చాపాలు) కేంద్రం వద్ద సమాన కోణాలను ఏర్పరుస్తాయి.

అందువల్ల, ఒక వృత్త జ్యా దాని కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం, కేంద్రం వద్ద అనురూప (అల్ప) చాపం చేయు కోణానికి సమానం. ఒక చాపము వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణం, అదే చాపం మిగిలిన వృత్తం పై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణాల మధ్య సంబంధాన్ని క్రింది సిద్ధాంతం తెలియజేస్తుంది.

సిద్ధాంతం 9.7 : *ఒక చాపం వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం, ఆ చాపం వృత్తంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.*

నిరూపణ : చాపం PQ, కేంద్రం O వద్ద $\angle POQ$ మరియు మిగిలిన వృత్తం పై బిందువు A వద్ద $\angle PAQ$ అనే కోణాలను చేయుచున్నది. మనం $\angle POQ = 2\angle PAQ$ అని నిరూపించాలి.



పటం. 9.15

పటం 9.15. లో ఇచ్చిన మూడు సందర్భాలను పరిగణనలోకి తీసుకుందాం. (i) లో PQ ఒక అల్ప చాపం (ii) లో చాపం PQ అర్ధవృత్తం (iii) లో PQ ఒక అధిక చాపం.

A బిందువును O కు కలిపి B బిందువు వరకు పొడిగించడం ద్వారా నిరూపణను మనం మొదలుపెడదాం.

అన్ని సందర్భాల్లో,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

ఎందుకంటే ఒక త్రిభుజ బాహ్య కోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

Also in Δ OAQ,

$$OA = OQ \quad \text{(Radii of a circle)}$$

Therefore, $\angle OAQ = \angle OQA$ (Theorem 7.5)

This gives $\angle BOQ = 2 \angle OAQ$ (1)

Similarly, $\angle BOP = 2 \angle OAP$ (2)

From (1) and (2), $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

This is the same as $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ (3)

For the case (iii), where PQ is the major arc, (3) is replaced by

$$\text{reflex angle POQ} = 2 \angle PAQ$$

Remark : Suppose we join points P and Q and form a chord PQ in the above figures. Then $\angle PAQ$ is also called the angle formed in the segment PAQP.

In Theorem 9.7, A can be any point on the remaining part of the circle. So if you take any other point C on the remaining part of the circle (see Fig. 9.16), you have

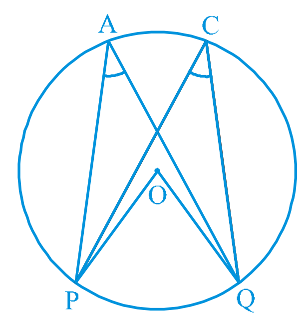


Fig. 9.16

$$\angle POQ = 2 \angle PCQ = 2 \angle PAQ$$

Therefore, $\angle PCQ = \angle PAQ$.

This proves the following:

Theorem 9.8 : *Angles in the same segment of a circle are equal.*

Again let us discuss the case (ii) of Theorem 10.8 separately. Here $\angle PAQ$ is an angle in the segment, which is a semicircle. Also, $\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$. If you take any other point C on the semicircle, again you get that

$$\angle PCQ = 90°$$

Therefore, you find another property of the circle as:

Angle in a semicircle is a right angle.

The converse of Theorem 9.8 is also true. It can be stated as:

Theorem 9.9 : *If a line segment joining two points subtends equal angles at two other points lying on the same side of the line containing the line segment, the four points lie on a circle* (*i.e. they are concyclic*).

Δ OAQ లో కూడా,

$$OA = OQ \qquad \text{(వృత్త వ్యాసార్ధాలు)}$$

కాబట్టి, $\angle OAQ = \angle OQA$ (సిద్ధాంతం 7.5)

$\Rightarrow$ $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ (1)

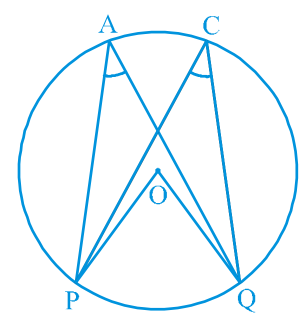
అదేవిధంగా, $\angle BOP = 2\angle OAP$ (2)

(1) మరియు (2)ల నుండి, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

అనగా, $\angle POQ = 2\angle PAQ$ (3)

సందర్భం (iii) లో, PQ అనేది అధిక చాపం కావున సమీకరణం (3)

పరావర్తనం కోణం $\angle POQ = 2\angle PAQ$ గా మార్చబడుతుంది.



పటం. 9.16

సూచన : పై పటాలలో మనం P మరియు Q బిందువులను కలిపి, ఒక జ్యా PQని ఏర్పరిచామనుకుందాం. అప్పుడు $\angle PAQ$ ని PAQP వృత్త ఖండం లో ఏర్పడిన కోణం అని కూడా అంటారు.

సిద్ధాంతం 9.7లో, A అనేది వృత్తం యొక్క మిగిలిన భాగంపై ఏదైనా బిందువు కావచ్చు. కాబట్టి వృత్తం యొక్క మిగిలిన భాగంలో మీరు ఏదైనా ఇతర బిందువు Cని తీసుకున్నట్లయితే (పటం 9.16 చూడండి.), మీకు

$$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$$

కావున, $\angle PCQ = \angle PAQ$.

ఇది ఈ క్రింది దానిని రుజువు చేస్తుంది:

సిద్ధాంతం 9.8 : *ఒకే వృత్తఖండంలోని కోణాలు సమానం.*

మళ్ళీ మనం సిద్ధాంతం 9.7 యొక్క సందర్భం (ii) ను విడిగా చర్చిద్దాం. ఇక్కడ $\angle PAQ$ అనేది వృత్తఖండం లోని ఒక కోణం, ఇది ఒక అర్ధవృత్తం. అలాగే, $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2}\times 180° = 90°$. అర్ధవృత్తంపై ఏదైనా ఇతర బిందువు C ను తీసుకున్నట్లయితే, మరల మీరు

$\angle PCQ = 90°$ ను పొందుతారు.

కాబట్టి, వృత్తం యొక్క మరో ధర్మాన్ని మీరు తెలుసుకుంటారు:

అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణం.

సిద్ధాంతం 9.8 యొక్క విపర్యయం కూడా సత్యం. దీనిని ఇలా పేర్కొనవచ్చు:

సిద్ధాంతం 9.9 : *రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం, ఆ రేఖాఖండానికి ఒకే వైపున గల ఏవేని రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానం అయితే, ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తం పై ఉంటాయి (అనగా అవి చక్రీయాలు).*

You can see the truth of this result as follows:

In Fig. 9.17, AB is a line segment, which subtends equal angles at two points C and D. That is

$$\angle ACB = \angle ADB$$

To show that the points A, B, C and D lie on a circle let us draw a circle through the points A, C and B. Suppose it does not pass through the point D. Then it will intersect AD (or extended AD) at a point, say E (or E′).

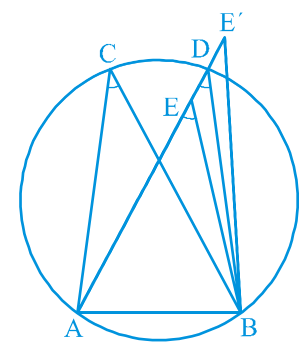


Fig. 9.17

If points A, C, E and B lie on a circle,

$$\angle ACB = \angle AEB \qquad \text{(Why?)}$$

But it is given that $\angle ACB = \angle ADB$.

Therefore, $\angle AEB = \angle ADB$.

This is not possible unless E coincides with D. (Why?)

Similarly, E′ should also coincide with D.

9.5 Cyclic Quadrilaterals

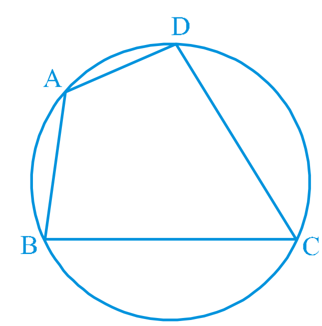


Fig. 9.18

A quadrilateral ABCD is called *cyclic* if all the four vertices of it lie on a circle (see Fig 9.18). You will find a peculiar property in such quadrilaterals. Draw several cyclic quadrilaterals of different sides and name each of these as ABCD. (This can be done by drawing several circles of different radii and taking four points on each of them.) Measure the opposite angles and write your observations in the following table.

S.No. of Quadrilateral	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

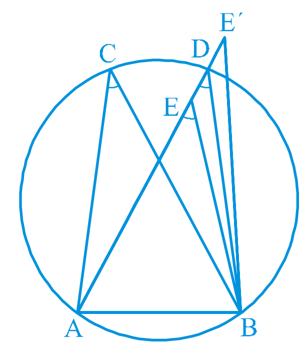
What do you infer from the table?

ఈ ఫలితం యొక్క సత్యాన్ని మీరు ఈ క్రింది విధంగా చూడవచ్చు:

పటం 9.17లో, AB ఒక రేఖాఖండం C మరియు D అనే రెండు బిందువుల వద్ద సమాన కోణాలను చేస్తుంది. అనగా

$$\angle ACB = \angle ADB$$

A, B, C మరియు D అనే బిందువులు ఒక వృత్తం మీద ఉన్నాయని నిరూపించుటకు A, C మరియు B బిందువుల గుండా పోయే ఒక వృత్తాన్ని గీద్దాం. అది D బిందువు గుండా వెళ్ళలేదనుకోండి. అప్పుడు అది AD (లేదా పొడిగించిన AD)ని ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది, ఉదాహరణకు E (లేదా E′) అనుకోండి.



పటం. 9.17

A, C, E మరియు B బిందువులు ఒక వృత్తం మీద ఉన్నట్లయితే,

$$\angle ACB = \angle AEB \quad \text{(ఎందుకు?)}$$

కానీ, దత్తాంశము ప్రకారం $\angle ACB = \angle ADB$.

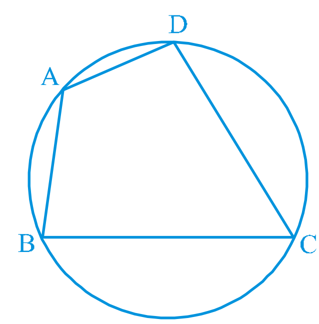
అందువల్ల, $\angle AEB = \angle ADB$.

ఇది E మరియు D లు ఏకీభవించకపోతే సాధ్యం కాదు. (ఎందుకు?)

అదేవిధంగా, E′ కూడా D తో ఏకీభవించాలి.

9.5 చక్రీయ చతుర్భుజాలు

ABCD అనే చతుర్భుజం యొక్క నాలుగు శీర్షాలు ఒకే వృత్తం మీద ఉన్నట్లయితే దానిని చక్రీయ చతుర్భుజం అని అంటారు(పటం 9.18 చూడండి). అటువంటి చతుర్భుజంలో మీరు ఒక ప్రత్యేకమైన ధర్మాన్ని కనుగొంటారు. వేర్వేరు భుజాల గల అనేక చక్రీయ చతుర్భుజాలను గీసి ప్రతిదానికీ ABCD అని పేరు పెట్టండి. (వేర్వేరు వ్యాసార్ధాలతో అనేక వృత్తాలను గీసి ప్రతిదానిపై నాలుగు బిందువులను తీసుకోవడం ద్వారా దీనిని చేయవచ్చు.) ఎదురెదురు కోణాలను కొలిచి మీ పరిశీలనలను ఈ క్రింది పట్టికలో రాయండి.



పటం. 9.18

చతుర్భుజం యొక్క సంఖ్య	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

పట్టిక నుండి మీరు ఏమి నిర్ణయిస్తారు?

You find that $\angle A + \angle C = 180°$ and $\angle B + \angle D = 180°$, neglecting the error in measurements. This verifies the following:

Theorem 9.10 : *The sum of either pair of opposite angles of a cyclic quadrilateral is* 180º.

In fact, the converse of this theorem, which is stated below is also true.

Theorem 9.11 : *If the sum of a pair of opposite angles of a quadrilateral is* 180º, *the quadrilateral is cyclic.*

You can see the truth of this theorem by following a method similar to the method adopted for Theorem 9.9.

Example 2 : In Fig. 9.19, AB is a diameter of the circle, CD is a chord equal to the radius of the circle. AC and BD when extended intersect at a point E. Prove that $\angle$ AEB = 60°.

Solution : Join OC, OD and BC.

Triangle ODC is equilateral (Why?)

Therefore, $\angle$ COD = 60°

Now, $\angle \text{CBD} = \frac{1}{2} \angle \text{COD}$ (Theorem 9.7)

This gives $\angle$ CBD = 30°

Again, $\angle$ ACB = 90° (Why ?)

So, $\angle$ BCE = 180° – $\angle$ ACB = 90°

Which gives $\angle$ CEB = 90° – 30° = 60°, i.e., $\angle$ AEB = 60°

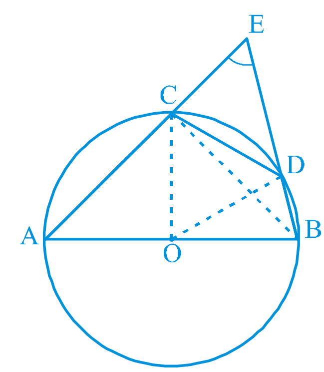


Fig. 9.19

Example 3 : In Fig 9.20, ABCD is a cyclic quadrilateral in which AC and BD are its diagonals. If $\angle$ DBC = 55° and $\angle$ BAC = 45°, find $\angle$ BCD.

Solution : $\angle$ CAD = $\angle$ DBC = 55°

(Angles in the same segment)

Therefore, $\angle$ DAB = $\angle$ CAD + $\angle$ BAC

= 55° + 45° = 100°

But $\angle$ DAB + $\angle$ BCD = 180°

(Opposite angles of a cyclic quadrilateral)

So, $\angle$ BCD = 180° – 100° = 80°

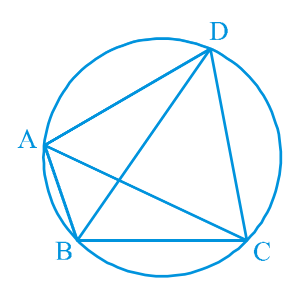


Fig. 9.20

కొలతల్లోని చిన్న చిన్న దోషాలను విస్మరిస్తే $\angle A + \angle C = 180°$ మరియు $\angle B + \angle D = 180°$ అని మీరు కనుగొన్నారు. ఇది క్రింది వానిని ధృవీకరిస్తుంది:

సిద్ధాంతం 9.10 : *ఒక చక్రీయ చతుర్భుజంలోని ప్రతిజత అభిముఖ కోణాల మొత్తం 180°.*

వాస్తవానికి, క్రింద పేర్కొన్న సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం కూడా సత్యమే.

సిద్ధాంతం 9.11 : *ఒక చతుర్భుజంలో ఒక జత ఎదుటి కోణాల మొత్తం180° అయితే, అది చక్రీయ చతుర్భుజం.*

సిద్ధాంతం 9.9 కోసం ఉపయోగించిన పద్ధతినే ఉపయోగించడం ద్వారా మీరు ఈ సిద్ధాంతం యొక్క సత్యంను కూడా చూడవచ్చు.

ఉదాహరణ 2 : పటం 9.19లో, వృత్త వ్యాసం AB. వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానమైన జ్యా CD. AC మరియు BD లు పొడిగించబడినప్పుడు బిందువు E వద్ద ఖండించుకున్నాయి. $\angle AEB = 60°$ అని నిరూపించండి.

సాధన : OC, OD మరియు BC లను కలపండి.

త్రిభుజం ODC అనేది సమబాహు త్రిభుజం (ఎందుకు?)

అందువల్ల, $\angle COD = 60°$

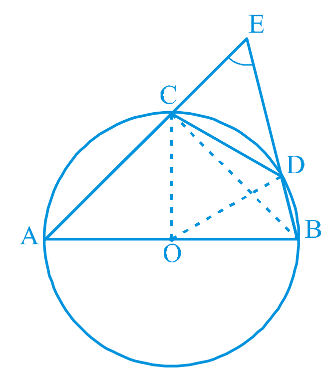
ఇప్పుడు, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (సిద్ధాంతం 9.7)

$\Rightarrow \angle CBD = 30°$

మరల, $\angle ACB = 90°$ (ఎందుకు ?)

కాబట్టి, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

$\Rightarrow \angle CEB = 90° - 30° = 60°$, అనగా $\angle AEB = 60°$



పటం. 9.19

ఉదాహరణ 3 : పటం 9.20 లో, ABCD అనునది AC మరియు BD లు కర్ణాలుగా గల ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం. $\angle DBC = 55°$ మరియు $\angle BAC = 45°$ అయితే $\angle BCD$ ను కనుగొనండి.

సాధన : $\angle CAD = \angle DBC = 55°$

(ఒకే వృత్త ఖండంలోని కోణాలు)

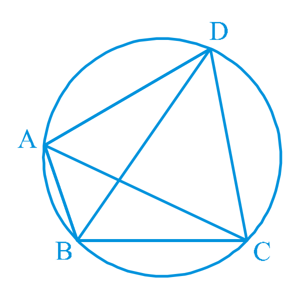
కాబట్టి, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55° + 45° = 100°$

కానీ $\angle DAB + \angle BCD = 180°$

(చక్రీయ చతుర్భుజం యొక్క ఎదుటి కోణాలు)

అందువల్ల, $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$



పటం. 9.20

Example 4 : Two circles intersect at two points A and B. AD and AC are diameters to the two circles (see Fig. 9.21). Prove that B lies on the line segment DC.

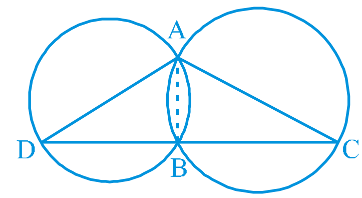


Fig. 9.21

Solution : Join AB.

$$\angle ABD = 90° \text{(Angle in a semicircle)}$$

$$\angle ABC = 90° \text{(Angle in a semicircle)}$$

So, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

Therefore, DBC is a line. That is B lies on the line segment DC.

Example 5 : Prove that the quadrilateral formed (if possible) by the internal angle bisectors of any quadrilateral is cyclic.

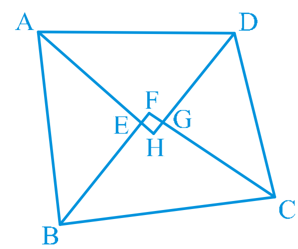


Fig. 9.22

Solution : In Fig. 9.22, ABCD is a quadrilateral in which the angle bisectors AH, BF, CF and DH of internal angles A, B, C and D respectively form a quadrilateral EFGH.

Now, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (Why ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

and $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (Why ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

Therefore, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

Therefore, by Theorem 9.11, the quadrilateral EFGH is cyclic.

EXERCISE 9.3

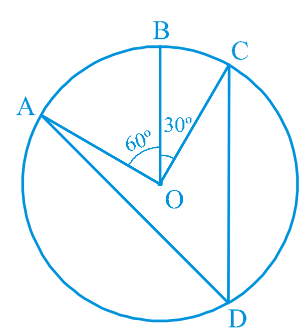
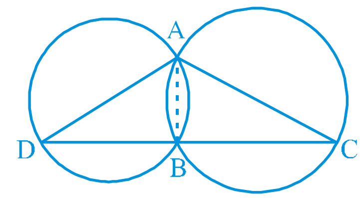


Fig. 9.23

1. In Fig. 9.23, A,B and C are three points on a circle with centre O such that $\angle BOC = 30°$ and $\angle AOB = 60°$. If D is a point on the circle other than the arc ABC, find $\angle ADC$.

ఉదాహరణ 4: రెండు వృత్తాలు A మరియు B అనే రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకున్నాయి. AD మరియు AC అనేవి రెండు వృత్తాలకు వ్యాసాలు (పటం 9.21 చూడండి). B అనునది రేఖాఖండం DC పై ఉంటుందని నిరూపించండి.



పటం. 9.21

సాధన : A, B లను కలపండి.

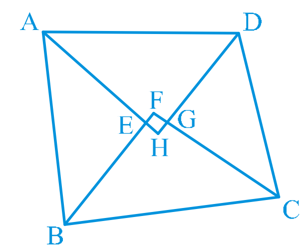
$\angle ABD = 90°$ (అర్థవృత్తంలోని కోణం)

$\angle ABC = 90°$ (అర్థవృత్తంలో కోణం)

కావున, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

అందువలన, DBC అనేది ఒక రేఖాఖండం. అంటే B అనేది DC రేఖాఖండంపై ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 5 : ఏదైనా ఒక చతుర్భుజం యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖల ద్వారా చతుర్భుజం ఏర్పడితే (సాధ్యమైతే) అది చక్రీయం అని నిరూపించండి.



పటం. 9.22

సాధన : పటం 9.22 లో ABCD అనేది ఒక చతుర్భుజం. దీనిలో అంతర కోణాలు A, B, C మరియు D ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు వరసగా AH, BF, CF మరియు DH లు EFGH అనే చతుర్భుజమును ఏర్పరుస్తున్నాయి.

ఇప్పుడు, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (ఎందుకు ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

మరియు $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (ఎందుకు ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

అందువల్ల, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

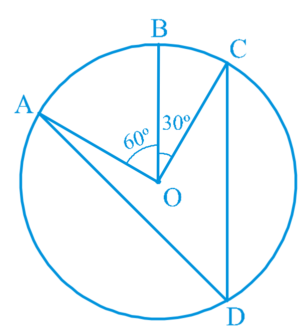
$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

కావున, సిద్ధాంతం 9.11 ద్వారా, చతుర్భుజం EFGH చక్రీయం అగును.

అభ్యాసం 9.3

1. పటం. 9.23లో, $\angle BOC = 30°$ మరియు $\angle AOB = 60°$ అగునట్లు O కేంద్రంగా గల వృత్తం పై A, B మరియు C అనే మూడు బిందువులు ఉన్నాయి. ABC చాపంపై లేని ఏదేని ఒక బిందువు D ఆ వృత్తంపై ఉన్నట్లయితే $\angle ADC$ ని కనుగొనండి.



పటం. 9.23

2. A chord of a circle is equal to the radius of the circle. Find the angle subtended by the chord at a point on the minor arc and also at a point on the major arc.

3. In Fig. 9.24, $\angle$ PQR = 100°, where P, Q and R are points on a circle with centre O. Find $\angle$ OPR.

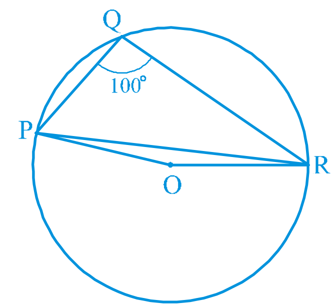


Fig. 9.24

4. In Fig. 9.25, $\angle$ ABC = 69°, $\angle$ ACB = 31°, find $\angle$ BDC.

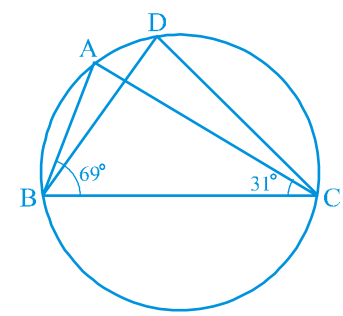


Fig. 9.25

5. In Fig. 9.26, A, B, C and D are four points on a circle. AC and BD intersect at a point E such that $\angle$ BEC = 130° and $\angle$ ECD = 20°. Find $\angle$ BAC.

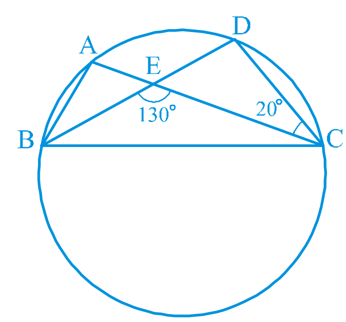


Fig. 9.26

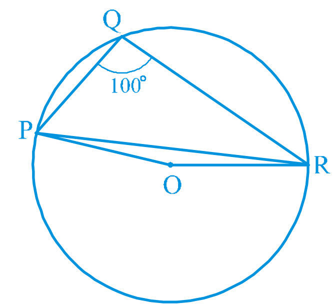
6. ABCD is a cyclic quadrilateral whose diagonals intersect at a point E. If $\angle$ DBC = 70°, $\angle$ BAC is 30°, find $\angle$ BCD. Further, if AB = BC, find $\angle$ ECD.

7. If diagonals of a cyclic quadrilateral are diameters of the circle through the vertices of the quadrilateral, prove that it is a rectangle.

8. If the non-parallel sides of a trapezium are equal, prove that it is cyclic.

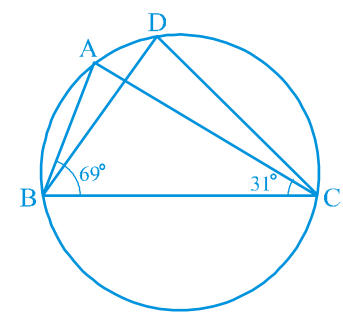
2. ఒక వృత్తంలో వ్యాసార్థానికి సమానమైన జ్యా అల్ప చాపంపై ఏదేని బిందువు వద్ద మరియు అధిక చాపంపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద చేయు కోణాలను కనుగొనండి.

3. పటం 9.24 లో, O కేంద్రంగా గల వృత్తంపై P, Q, R అనే బిందువులు, $\angle PQR = 100°$, అయ్యేటట్లుంటే $\angle OPR$ ను కనుగొనండి.



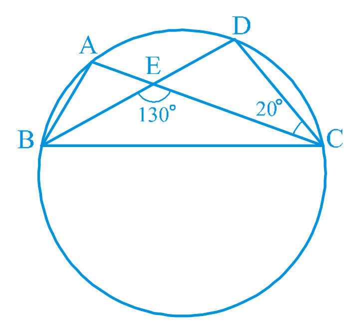
పటం. 9.24

4. పటం 9.25 లో, $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ అయిన $\angle BDC$ కనుగొనండి.



పటం. 9.25

5. పటం 9.26 లో A, B, C, D లు ఒక వృత్తం పై గల నాలుగు బిందువులు. $\angle BEC = 130°$ మరియు $\angle ECD = 20°$ అయ్యే విధంగా AC, BDలు బిందువు E వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. అయిన $\angle BAC$ ను కనుగొనండి.



పటం. 9.26

6. ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం. దీని కర్ణాలు E బిందువు వద్ద ఖండించుకున్నాయి. $\angle DBC=70°$, $\angle BAC=30°$ అయిన $\angle BCD$ ని కనుగొనండి. ఇంకా $AB = BC$ అయితే $\angle ECD$ ని కనుగొనండి.

7. ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు, ఆ చతుర్భుజం శీర్షాల గుండా పోయే వృత్త వ్యాసాలు అయితే అది దీర్ఘచతురస్రం అని నిరూపించండి.

8. ఒక సమలంబ చతుర్భుజం (ట్రెపీజియం) యొక్క అసమాంతర భుజాలు సమానం అయితే, అది చక్రీయమని నిరూపించండి.

9. Two circles intersect at two points B and C. Through B, two line segments ABD and PBQ are drawn to intersect the circles at A, D and P, Q respectively (see Fig. 9.27). Prove that $\angle$ ACP = $\angle$ QCD.

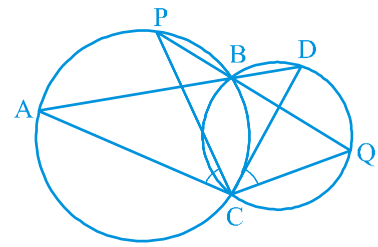


Fig. 9.27

10. If circles are drawn taking two sides of a triangle as diameters, prove that the point of intersection of these circles lie on the third side.

11. ABC and ADC are two right triangles with common hypotenuse AC. Prove that $\angle$ CAD = $\angle$ CBD.

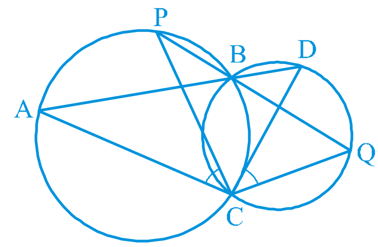
12. Prove that a cyclic parallelogram is a rectangle.

9.6 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. A circle is the collection of all points in a plane, which are equidistant from a fixed point in the plane.
2. Equal chords of a circle (or of congruent circles) subtend equal angles at the centre.
3. If the angles subtended by two chords of a circle (or of congruent circles) at the centre (corresponding centres) are equal, the chords are equal.
4. The perpendicular from the centre of a circle to a chord bisects the chord.
5. The line drawn through the centre of a circle to bisect a chord is perpendicular to the chord.
6. Equal chords of a circle (or of congruent circles) are equidistant from the centre (or corresponding centres).
7. Chords equidistant from the centre (or corresponding centres) of a circle (or of congruent circles) are equal.
8. If two arcs of a circle are congruent, then their corresponding chords are equal and conversely if two chords of a circle are equal, then their corresponding arcs (minor, major) are congruent.
9. Congruent arcs of a circle subtend equal angles at the centre.
10. The angle subtended by an arc at the centre is double the angle subtended by it at any point on the remaining part of the circle.
11. Angles in the same segment of a circle are equal.

9. రెండు వృత్తాలు B మరియు C అనే రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకున్నాయి. ఆ వృత్తాలను A, D మరియు P, Q ల వద్ద వరుసగా ఖండించునట్లు B గుండా, ABD మరియు PBQ రేఖాఖండాలను గీచిన (పటం 9.27 చూడండి) $\angle ACP = \angle QCD$ అని నిరూపించండి.



పటం. 9.27

10. ఒక త్రిభుజం రెండు భుజాలను వ్యాసాలుగా తీసుకొని వృత్తాలు గీచినట్లయితే, ఈ వృత్తాల ఖండన బిందువు మూడవ భుజంపై వుంటుందని నిరూపించండి.

11. ABC మరియు ADC అనేవి ఉమ్మడి కర్ణం ACని కలిగిన రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలయితే $\angle CAD = \angle CBD$ అని నిరూపించండి.

12. చక్రీయ సమాంతర చతుర్భుజం దీర్ఘచతురస్రం అగునని నిరూపించండి.

9.6 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువుకు స్థిర దూరంలో గల అదే తలానికి చెందిన బిందువుల సముదాయాన్ని వృత్తం అంటారు.

2. ఒక వృత్తం (సర్వ సమాన వృత్తాల) లోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే, అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం.

3. ఒక వృత్తం (సర్వ సమాన వృత్తాల) లోని జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన,ఆ జ్యాలు సమానం.

4. ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి ఏదేని జ్యాకు గీచిన లంబం, ఆ జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

5. వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తూ గీయబడిన రేఖ, ఆ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది.

6. వృత్తం (లేదా సర్వసమాన వృత్తాల)లో సమాన పొడవులు గల జ్యాలు కేంద్రం (లేదా అనురూప కేంద్రాల) నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

7. సర్వసమాన వృత్తాల కేంద్రానికి అనురూప కేంద్రాలకు సమాన దూరంలో గల జ్యాల పొడవులు సమానం.

8. ఒక వృత్తం యొక్క రెండు చాపాలు సర్వ సమానం అయితే, వాటి సదృశ జ్యాలు సమానం మరియు దీనికి విపర్యయంగా ఒక వృత్తం యొక్క రెండు జ్యాలు సమానం అయితే, వాటి సదృశ చాపాలు (అల్ప, అధిక) సర్వ సమానాలు.

9. వృత్తం యొక్క సర్వసమాన చాపాలు కేంద్రం వద్ద సమాన కోణాలను ఏర్పరుస్తాయి.

10. ఒక చాపం వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణం,ఆ చాపం మిగిలిన వృత్తంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.

11. ఒకే వృత్తఖండంలోని కోణాలు సమానం

12. Angle in a semicircle is a right angle.

13. If a line segment joining two points subtends equal angles at two other points lying on the same side of the line containing the line segment, the four points lie on a circle.

14. The sum of either pair of opposite angles of a cyclic quadrilateral is 180^0.

15. If sum of a pair of opposite angles of a quadrilateral is 180^0, the quadrilateral is cyclic.

12. అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణం.

13. రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం ఆ రేఖాఖండాన్ని కలిగియున్న సరళరేఖకు ఒకే వైపున గల రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానం అయితే, ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి.

14. ఒక చక్రీయ చతుర్భుజంలోని ఏ రెండు అభిముఖ కోణాల మొత్తం అయిన 180^0.

15. ఒక చతుర్భుజంలో అభిముఖ కోణాల మొత్తం అయిన 180^0 అయితే, అది ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం.

0962CH12

CHAPTER 10

HERON'S FORMULA

10.1 Area of a Triangle — by Heron's Formula

We know that the area of triangle when its height is given, is $\frac{1}{2}$ × base × height. Now suppose that we know the lengths of the sides of a scalene triangle and not the height. Can you still find its area? For instance, you have a triangular park whose sides are 40 m, 32 m, and 24 m. How will you calculate its area? Definitely if you want to apply the formula, you will have to calculate its height. But we do not have a clue to calculate the height. Try doing so. If you are not able to get it, then go to the next section.

Heron was born in about 10AD possibly in Alexandria in Egypt. He worked in applied mathematics. His works on mathematical and physical subjects are so numerous and varied that he is considered to be an encyclopedic writer in these fields. His geometrical works deal largely with problems on mensuration written in three books. Book I deals with the area of squares, rectangles, triangles, trapezoids (trapezia), various other specialised quadrilaterals, the regular polygons, circles, surfaces of cylinders, cones, spheres etc. In this book, Heron has derived the famous formula for the area of a triangle in terms of its three sides.

Heron (10 C.E. – 75 C.E.)

Fig. 10.1

The formula given by Heron about the area of a triangle, is also known as *Hero's formula*. It is stated as:

$$\boxed{\textbf{Area of a triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \text{(I)}$$

G7M6F9

అధ్యాయం ౧౦

హెరాన్ సూత్రం

10.1 ఒక త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం – హెరాన్ సూత్రం ద్వారా

త్రిభుజం ఎత్తు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు అని మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు ఉదాహరణకు విషమబాహు త్రిభుజం భుజాల పొడవులు తెలిసి, ఎత్తు తెలియనప్పటికీ దాని వైశాల్యాన్ని కనుక్కోగలమా?
ఉదాహరణకు, 40 మీ., 32మీ., 24మీ. భుజాలుగా గల త్రిభుజాకార ఉద్యానవనం ఉన్న ఆ త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని మీరు కనుక్కోగలరా? మీరు సూత్రాన్ని ఖచ్చితంగా ఉపయోగించాలి అనుకొన్నట్లయితే, మీరు తప్పకుండా దాని ఎత్తును గణించాలి. కానీ ఎత్తును గణించడానికి ఎటువంటి ఆధారం లేదు. అలా చేయడానికి ప్రయత్నించండి. ఒకవేళ మీరు దానిని రాబట్టలేకపోతే, తరువాత విభాగానికి వెళ్ళండి.

హెరాన్ ఈజిప్టులోని అలెగ్జాండ్రియాలో క్రీ.శ.10 వ సంవత్సరంలో జన్మించాడు. అతను అనువర్తిత గణితం మీద పని చేశాడు. గణితం మరియు భౌతిక శాస్త్ర విషయాలపై ఆయన రచనలు చాలా విస్తృతమైనవి మరియు వైవిధ్యభరితమైనవి, ఈ రంగాలలో అతను ఒక విజ్ఞాన సర్వస్వ రచయితగా పరిగణించబడ్డాడు. అతని జ్యామితీయ రచనలు ఎక్కువగా మూడు పుస్తకాలలో వ్రాసిన క్షేత్రగణిత సమస్యలపై సాగాయి. మొదటి పుస్తకం చతురస్రాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, త్రిభుజాలు, ట్రెపిజాయిడ్లు (సమలంబ చతుర్భుజాలు) వివిధ ఇతర ప్రత్యేక చతుర్భుజాలు, క్రమ బహుభుజిలు, వృత్తాల వైశాల్యాలు, స్థూపాలు, శంఖువులు, గోళాల ఉపరితల వైశాల్యాలు మొదలైన వాటి గురించి వివరిస్తుంది. ఈ పుస్తకంలో, మూడు భుజాల ఆధారంగా త్రిభుజ వైశాల్యానికి ప్రసిద్ధ సూత్రాన్ని హెరాన్ పొందుపరిచాడు.

హెరాన్ (10 C.E. – 75 C.E.)
పటం. 10.1

ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం గురించి హెరాన్ ఇచ్చిన సూత్రాన్ని హీరో ఫార్ములా అని కూడా అంటారు. ఇది ఈ విధంగా పేర్కొనబడింది

$$\boxed{\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \text{(I)}$$

where a, b and c are the sides of the triangle, and s = *semi-perimeter, i.e., half the perimeter of the triangle* = $\dfrac{a+b+c}{2}$,

This formula is helpful where it is not possible to find the height of the triangle easily. Let us apply it to calculate the area of the triangular park ABC, mentioned above (see Fig. 10.2).

Let us take $a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m,

so that we have $s = \dfrac{40 + 24 + 32}{2}$ m = 48 m.

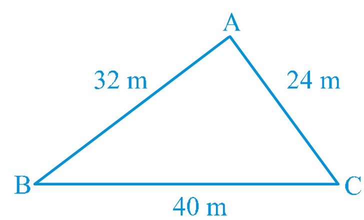


Fig. 10.2

$s - a = (48 - 40)$ m = 8 m,

$s - b = (48 - 24)$ m = 24 m,

$s - c = (48 - 32)$ m = 16 m.

Therefore, area of the park ABC

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}\,\text{m}^2 = 384\,\text{m}^2$$

We see that $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$. Therefore, the sides of the park make a right triangle. The largest side, i.e., BC which is 40 m will be the hypotenuse and the angle between the sides AB and AC will be 90°.

We can check that the area of the park is $\dfrac{1}{2} \times 32 \times 24$ m^2 = 384 m^2.

We find that the area we have got is the same as we found by using Heron's formula.

Now using Heron's formula, you verify this fact by finding the areas of other triangles discussed earlier *viz*.,

(i) equilateral triangle with side 10 cm.

(ii) isosceles triangle with unequal side as 8 cm and each equal side as 5 cm.

You will see that

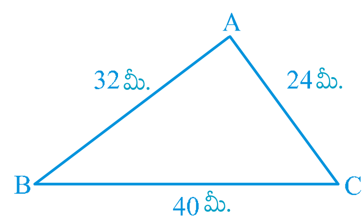
For (i), we have $s = \dfrac{10 + 10 + 10}{2}$ cm = 15 cm.

ఇందులో a, b మరియు c అనేవి త్రిభుజం యొక్క భుజాలు, s = అర్థ చుట్టుకొలత, అంటే త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలతలో సగం $= \dfrac{a+b+c}{2}$,

త్రిభుజం యొక్క ఎత్తును తేలికగా కనుగొనడం సాధ్యం కానప్పుడు ఈ సూత్రం సహాయకారిగా ఉంటుంది. పైన ఉదహరించిన త్రిభుజాకారపు ఉద్యానవనం ABC వైశాల్యాన్ని లెక్కించడానికి దీనిని అన్వయిద్దాం (పటం 10.2 చూడండి.).

కాబట్టి $a = 40$ మీ., $b = 24$ మీ., $c = 32$ మీ.,

$\therefore\ s = \dfrac{40+24+32}{2}$ మీ. $= 48$ మీ. అవుతుంది.



పటం. 10.2

$s - a = (48 - 40)$ మీ. $= 8$ మీ.,

$s - b = (48 - 24)$ మీ. $= 24$ మీ.,

$s - c = (48 - 32)$ మీ. $= 16$ మీ..

కాబట్టి, త్రిభుజాకార ఉద్యానవనం ABC వైశాల్యం

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$ మీ^{2}. 384మీ^{2}.

ఇక్కడ $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ అని గమనించవచ్చు. కాబట్టి ఉద్యానవనం భుజాలు ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. అతి పెద్ద భుజం అనగా కర్ణం 40 మీ. గల BC భుజం, AB మరియు AC భుజాల మధ్య కోణం $90°$ అవుతాయి.

ఉద్యానవనం వైశాల్యాన్ని $\dfrac{1}{2} \times 32 \times 24$ మీ^{2}. $= 384$ మీ^{2}. అని సరిచూడవచ్చు.

ఇప్పుడు మనం కనుక్కున్న వైశాల్యం, హెరాన్ సూత్రం ద్వారా కనుక్కున్న వైశాల్యం ఒకటేనని కనుగొన్నాం.

ఇప్పుడు హెరాన్ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి, ఇంతకు ముందు చర్చించిన ఇతర త్రిభుజాల వైశాల్యాలను కనుక్కోవడం ద్వారా మీరు ఈ వాస్తవాన్ని ధృవీకరించండి.

(i) 10 సెం. మీ భుజం కలిగిన సమబాహు త్రిభుజం.

(ii) ఒక్కొక్కటి 5 సెం. మీ. గల రెండు సమాన భుజాలు మరియు 8 సెం. మీ. మూడవ భుజంగా కలిగిన సమద్విబాహు త్రిభుజం.

మీరు క్రింది వాటిని గమనించగలరు

(i) $s = \dfrac{10+10+10}{2}$ సెం.మీ. $= 15$ సెం.మీ.

Area of triangle $= \sqrt{15(15-10)\,(15-10)\,(15-10)}\ \text{cm}^2$

$$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}\ \text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

For (ii), we have $s = \dfrac{8 \quad 5 \quad 5}{2}$ cm 9 cm

Area of triangle $= \sqrt{9(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}\ \text{cm}^2 = \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$.

Let us now solve some more examples:

Example 1 : Find the area of a triangle, two sides of which are 8 cm and 11 cm and the perimeter is 32 cm (see Fig. 10.3).

Solution : Here we have perimeter of the triangle = 32 cm, a = 8 cm and b = 11 cm.

Third side c = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm

So, $2s = 32$, i.e., $s = 16$ cm,

$s - a = (16 - 8)$ cm = 8 cm,

$s - b = (16 - 11)$ cm = 5 cm,

$s - c = (16 - 13)$ cm = 3 cm.

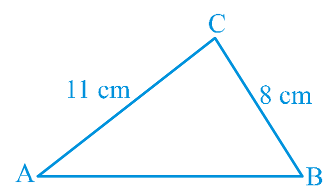


Fig. 10.3

Therefore, area of the triangle $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{30}\ \text{cm}^2$$

Example 2 : A triangular park ABC has sides 120m, 80m and 50m (see Fig. 10.4). A gardener *Dhania* has to put a fence all around it and also plant grass inside. How much area does she need to plant? Find the cost of fencing it with barbed wire at the rate of ₹20 per metre leaving a space 3m wide for a gate on one side.

Solution : For finding area of the park, we have

$2s$ = 50 m + 80 m + 120 m = 250 m.

i.e., s = 125 m

Now, $s - a = (125 - 120)$ m = 5 m,

$s - b = (125 - 80)$ m = 45 m,

$s - c = (125 - 50)$ m = 75 m.

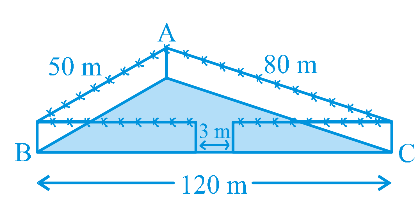


Fig. 10.4

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{15(15-10)\,(15-10)\,(15-10)}$ సెం.మీ.^{2}

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ సెం.మీ^{2}. $25\sqrt{3}$ సెం.మీ^{2}.

(ii), $s = \dfrac{8 \quad 5 \quad 5}{2}$ సెం.మీ. 9 సెం.మీ.

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{9(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}$ సెం.మీ.^{2} $= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ సెం.మీ^{2}. 12 సెం.మీ^{2}.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు సాధిద్దాం:

ఉదాహరణ 1 : రెండు భుజాలు 8 సెం.మీ., 11 సెం.మీ. మరియు చుట్టుకొలత 32 సెం.మీ. గా గల త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి (పటం 10.3 చూడండి).

సాధన : ఇక్కడ మనకు త్రిభుజం యొక్క చుట్టు కొలత = 32 సెం.మీ., $a = 8$ సెం.మీ. మరియు $b = 11$ సెం.మీ.

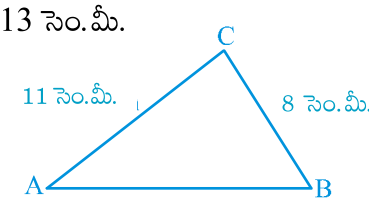
మూడవ భుజం $c = 32$ సెం.మీ. $- (8 + 11)$ సెం.మీ $= 13$ సెం.మీ.

కనుక, $2s = 32$, అనగా, $s = 16$ సెం.మీ.,

$s - a = (16 - 8)$ సెం.మీ. $= 8$ సెం.మీ.,

$s - b = (16 - 11)$ సెం.మీ. $= 5$ సెం.మీ.,

$s - c = (16 - 13)$ సెం.మీ. $= 3$ సెం.మీ..



పటం. 10.3

కాబట్టి, త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ సెం.మీ^{2}. $8\sqrt{30}$ సెం.మీ^{2}.

ఉదాహరణ 2 : ఒక ABC త్రిభుజాకార ఉద్యానవనం యొక్క భుజాలు 120మీ., 80మీ. మరియు 50మీ. (పటం 10.4 చూడండి) ధనియ ఒక తోటమాలిని దాని చుట్టూ ఒక కంచెను నిర్మించాలి అలాగే లోపల గడ్డిని కూడా నాటాలి. ఆమె నాటడానికి ఎంత ప్రాంతం అవసరం అవుతుంది? ఒక గేటు కోసం ఒకవైపున 3 మీ. వెడల్పు ఉన్న స్థలాన్ని విడిచిపెట్టి, ముళ్ళ తీగతో ఆ చుట్టూ కంచె వేయడానికి ప్రతి మీ.కు ₹20 చొప్పున మొత్తం కంచె వేయడానికి ఎంత ఖర్చు అవుతుందో కనుగొనండి.

సాధన : ఉద్యానవనం వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి,

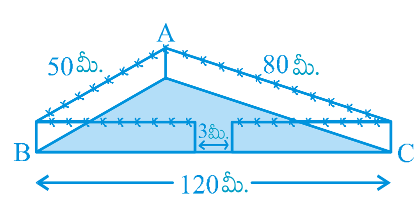
$2s = 50$ మీ. $+ 80$ మీ. $+ 120$ మీ. $= 250$ మీ.

అనగా, $s = 125$ మీ.

ఇప్పుడు, $s - a = (125 - 120)$ మీ. $= 5$ మీ.,

$s - b = (125 - 80)$ మీ. $= 45$ మీ.,

$s - c = (125 - 50)$ మీ. $= 75$ మీ.



పటం. 10.4

Therefore, area of the park $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ \text{m}^2$$

$$= 375\sqrt{15}\ \text{m}^2$$

Also, perimeter of the park = AB + BC + CA = 250 m

Therefore, length of the wire needed for fencing = 250 m – 3 m (to be left for gate)

= 247 m

And so the cost of fencing = ₹20 × 247 = ₹4940

Example 3 : The sides of a triangular plot are in the ratio of 3 : 5 : 7 and its perimeter is 300 m. Find its area.

Solution : Suppose that the sides, in metres, are $3x$, $5x$ and $7x$ (see Fig. 10.5).

Then, we know that $3x + 5x + 7x = 300$ (perimeter of the triangle)

Therefore, $15x = 300$, which gives $x = 20$.

So the sides of the triangle are 3 × 20 m, 5 × 20 m and 7 × 20 m

i.e., 60 m, 100 m and 140 m.

Can you now find the area [Using Heron's formula]?

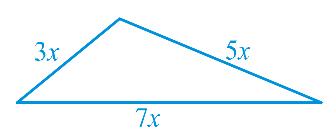


Fig. 10.5

We have $s = \dfrac{60 + 100 + 140}{2}$ m = 150 m,

and area will be $\sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}\ \text{m}^2$

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}\ \text{m}^2$$

$$= 1500\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

EXERCISE 10.1

1. A traffic signal board, indicating 'SCHOOL AHEAD', is an equilateral triangle with side 'a'. Find the area of the signal board, using Heron's formula. If its perimeter is 180 cm, what will be the area of the signal board?

కాబట్టి ఉద్యానవనం వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ మీ^{2}.

$= 375\sqrt{15}$ మీ^{2}.

అదే విధంగా, ఉద్యానవనం యొక్క చుట్టుకొలత $=$ AB + BC + CA = 250 మీ.

అందువల్ల, కంచె కోసం కావలసిన తీగ పొడవు = 250 మీ. – 3 మీ. (గేటు వెడల్పు తీసివేయగ)

= 247 మీ.

మరియు కంచె వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹20 × 247 = ₹4940

ఉదాహరణ 3 : ఒక త్రిభుజాకారపు స్థలం యొక్క భుజాల నిష్పత్తి 3 : 5 : 7 వరుసగా మరియు దాని చుట్టుకొలత 300మీ. అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : త్రిభుజాకారపు స్థలం భుజాలు $3x$ మీ., $5x$ మీ. మరియు $7x$ మీ. (పటం 10.5 చూడండి.) అనుకొనుము.

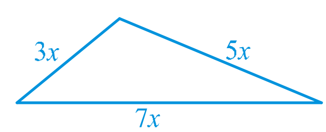
కాబట్టి, $3x + 5x + 7x = 300$ (త్రిభుజం చుట్టుకొలత) అవుతుందని అని మనకు తెలుసు

అందువల్ల, $15x = 300$, అంటే $x = 20$.

కాబట్టి త్రిభుజ భుజాలు 3×20 మీ., 5×20 మీ. మరియు 7×20 మీ.

అనగా, 60 మీ, 100 మీ మరియు 140 మీ. అవుతాయి.

హెరాన్ సూత్రం ఉపయోగించి త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోగలరా?



పటం. 10.5

మనకు $s = \frac{60 + 100 + 140}{2}$ మీ. = 150 మీ.

మరియు త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}$ మీ^{2}.

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ మీ^{2}.

$= 1500\sqrt{3}$ మీ^{2}.

అభ్యాసం 10.1

1. '**పాఠశాల ముందు ఉంది**' అని సూచించే ట్రాఫిక్ సిగ్నల్ బోర్డు, 'a' భుజంగా కలిగిన ఒక సమబాహు త్రిభుజాకారంలో ఉంది. హెరాన్ సూత్రం ఉపయోగించి సిగ్నల్ బోర్డు యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి. దాని చుట్టుకొలత 180 సెం.మీ. అయినపుడు, సిగ్నల్ బోర్డ్ యొక్క వైశాల్యం ఎంత?

2. The triangular side walls of a flyover have been used for advertisements. The sides of the walls are 122 m, 22 m and 120 m (see Fig. 10.6). The advertisements yield an earning of ₹ 5000 per m^2 per year. A company hired one of its walls for 3 months. How much rent did it pay?

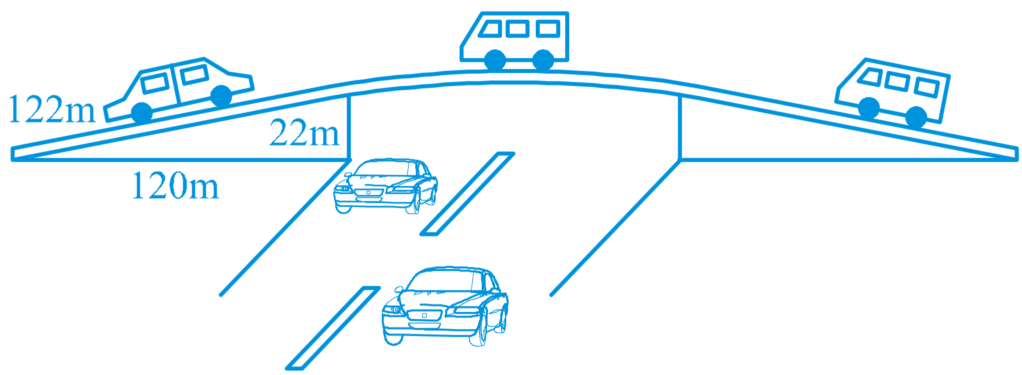


Fig. 10.6

3. There is a slide in a park. One of its side walls has been painted in some colour with a message "KEEP THE PARK GREEN AND CLEAN" (see Fig. 10.7). If the sides of the wall are 15 m, 11 m and 6 m, find the area painted in colour.

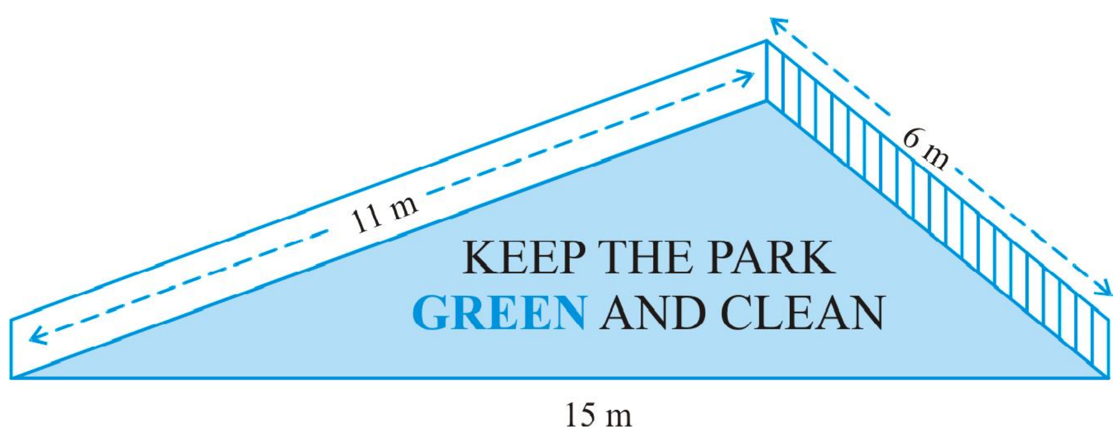


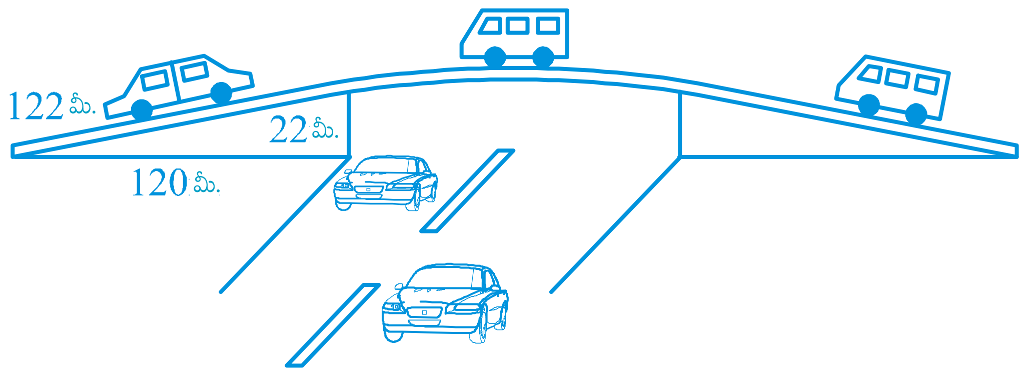
Fig. 10.7

4. Find the area of a triangle two sides of which are 18cm and 10cm and the perimeter is 42cm.

5. Sides of a triangle are in the ratio of 12 : 17 : 25 and its perimeter is 540cm. Find its area.

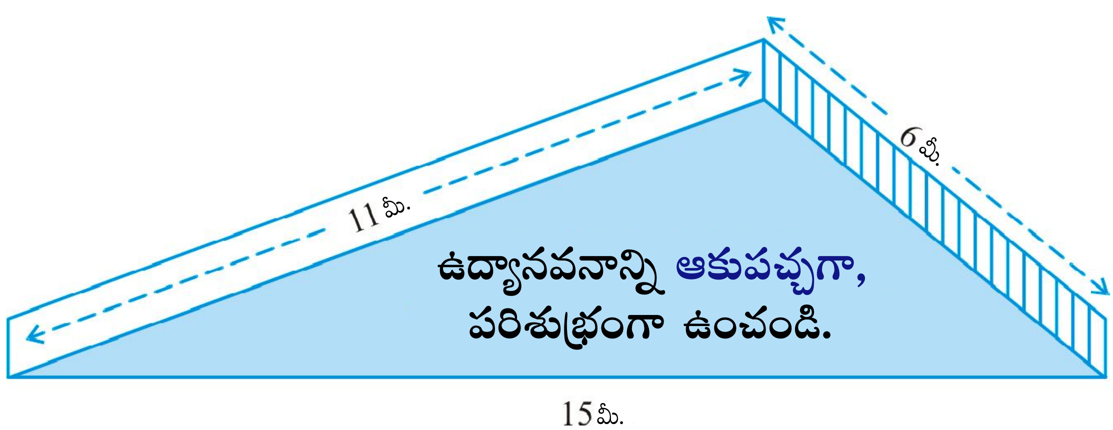
6. An isosceles triangle has perimeter 30 cm and each of the equal sides is 12 cm. Find the area of the triangle.

2. ఫ్లైఓవర్ యొక్క త్రిభుజాకార ప్రక్క గోడలు ప్రకటనల కోసం వాడబడినవి. గోడల యొక్క భుజాలు వరుసగా 122మీ., 22మీ. మరియు 120మీ. (పటం 10.6 చూడండి). ప్రకటనలు సంవత్సరానికి ఒక చ. మీ. కు ₹5000 సంపాదిస్తాయి. ఒక కంపెనీ ఆ గోడల్లో ఒకదానిని 3నెలలకు అద్దెకు తీసుకొంది. అయితే ఆ కంపెనీ ఎంత అద్దె చెల్లించింది?



పటం. **10.6**

3. ఒక ఉద్యానవనంలో జారుడు బల్ల ఉంది. దాని ప్రక్క గోడలలో ఒకదానికి "ఉద్యానవనాన్ని ఆకుపచ్చగా మరియు శుభ్రంగా ఉంచండి" అనే సందేశాన్ని ఒక రంగుతో పెయింటింగ్ చేశారు (పటం 10.7 చూడండి). గోడ యొక్క భుజాలు 15 మీ. 11 మీ. మరియు 6 మీ. అయితే, రంగులతో పెయింట్ చేయబడ్డ ప్రాంత వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.



పటం. **10.7**

4. రెండు భుజాలు 18 సెం.మీ. 10 సెం.మీ. మరియు చుట్టుకొలత 42 సెం.మీ. కలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

5. ఒక త్రిభుజం భుజాల నిష్పత్తి 12 : 17 : 25 మరియు దాని చుట్టుకొలత 540 సెం.మీ. అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

6. సమద్విబాహు త్రిభుజం చుట్టుకొలత 30 సెం.మీ. మరియు సమాన భుజాలు ఒక్కొక్కటి 12 సెం.మీ. అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

10.2 Summary

In this chapter, you have studied the following points :

1. Area of a triangle with its sides as a, b and c is calculated by using Heron's formula, stated as

$$\text{Area of triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

where $$s = \frac{a+b+c}{2}$$

10.2 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. a, b మరియు c భుజాలుగా ఉన్న త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం హెరాన్ సూత్రం ఉపయోగించి లెక్కించబడుతుంది, దీనిని ఇలా పేర్కొంటారు.

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ఇక్కడ $$s = \frac{a+b+c}{2}$$

0962CH13

CHAPTER 11

SURFACE AREAS AND VOLUMES

11.1 Surface Area of a Right Circular Cone

We have already studied the surface areas of cube, cuboid and cylinder. We will now study the surface area of cone.

So far, we have been generating solids by stacking up congruent figures. Incidentally, such figures are called *prisms*. Now let us look at another kind of solid which is not a prism (These kinds of solids are called *pyramids.*). Let us see how we can generate them.

Activity : Cut out a right-angled triangle ABC right angled at B. Paste a long thick string along one of the perpendicular sides say AB of the triangle [see Fig. 11.1(a)]. Hold the string with your hands on either sides of the triangle and rotate the triangle about the string a number of times. What happens? Do you recognize the shape that the triangle is forming as it rotates around the string [see Fig. 11.1(b)]? Does it remind you of the time you had eaten an ice-cream heaped into a container of that shape [see Fig. 11.1 (c) and (d)]?

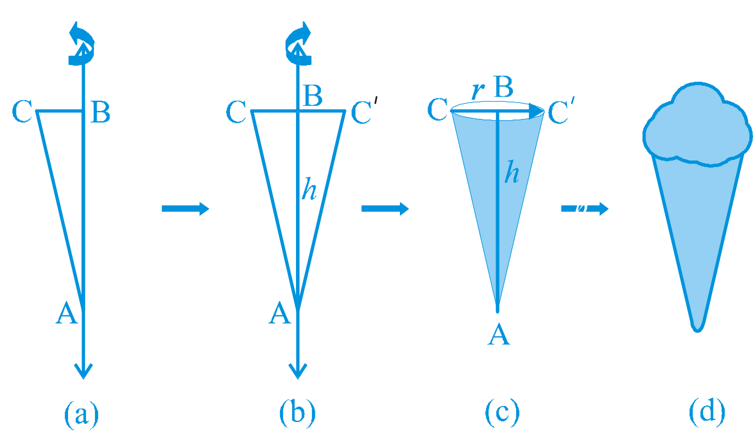


Fig. 11.1

X7R4G5

అధ్యాయం 11

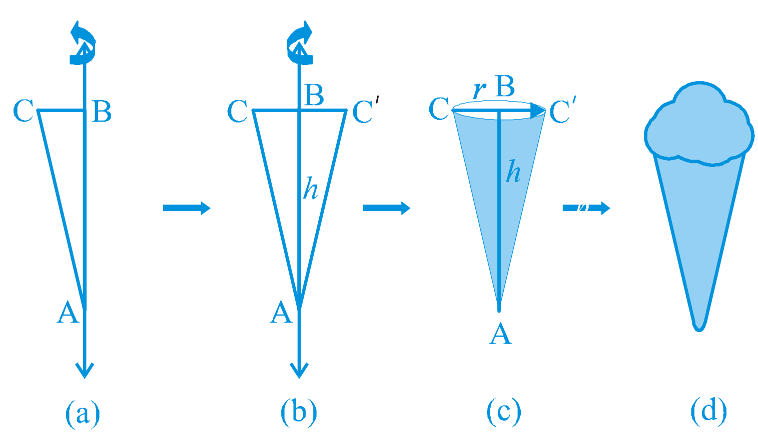
ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు

11.1 క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం

మనం ఇప్పటికే ఘనం, దీర్ఘఘనం మరియు స్థూపం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాలను అధ్యయనం చేశాం. ఇప్పుడు శంఖువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం గురించి అధ్యయనం చేద్దాం.

ఇప్పటివరకు మనం సర్వసమాన పటాలను పేర్చడం ద్వారా ఘనవస్తువులను సృష్టిస్తూ వచ్చాం. యాదృచ్ఛికంగా అటువంటి వస్తువులను పట్టకం అంటారు. ఇప్పుడు మనం పట్టకం కాని మరొక రకమైన ఘన వస్తువులను చూద్దాం. (ఈ రకమైన ఘనవస్తువులను పిరమిడ్లు అంటారు.) వీటిని ఎలా సృష్టించవచ్చో చూద్దాం.

కృత్యం : B వద్ద లంబకోణం గల లంబకోణ త్రిభుజం ABCను కత్తిరించండి. త్రిభుజంలో లంబంగా ఉన్న భుజాలలో ఒక దానిని AB అనుకొని దానివెంట పొడవైన మందపాటి తీగను అతికించండి [పటం 11.1(a) చూడండి]. త్రిభుజానికి ఇరువైపులా మీ చేతులతో తీగను పట్టుకోండి మరియు త్రిభుజాన్ని తీగ చుట్టూ అనేక సార్లు తిప్పండి ఏం జరుగుతుంది? త్రిభుజం తీగ చుట్టూ తిరుగుతున్నప్పుడు ఏర్పడే ఆకారాన్ని మీరు గుర్తించారా [పటం 11.1(b) చూడండి]? మీరు ఆ ఆకారంలో ఉన్న పాత్రలోపోగు (కుప్పగా) చేసిన ఐస్ క్రీమ్ తిన్న సమయాన్ని (సంధర్భం) ఇది మీకు గుర్తుచేస్తుందా [పటం 11.1(c) మరియు (d) చూడండి]?



పటం. 11.1

This is called a *right circular cone*. In Fig. 11.1(c) of the right circular cone, the point A is called the vertex, AB is called the height, BC is called the *radius* and AC is called the slant height of the cone. Here B will be the centre of circular base of the cone. The height, radius and slant height of the cone are usually denoted by h, r and l respectively. Once again, let us see what kind of cone we can *not* call a right circular cone. Here, you are (see Fig. 11.2)! What you see in these figures are not right circular cones; because in (a), the line joining its vertex to the centre of its base is not at right angle to the base, and in (b) the base is not circular.

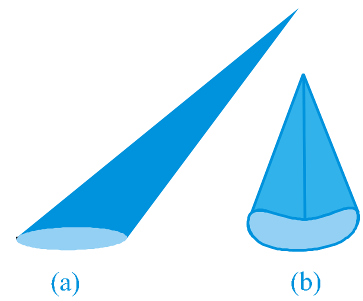


Fig. 11.2

As in the case of cylinder, since we will be studying only about right circular cones, remember that by 'cone' in this chapter, we shall mean a 'right circular cone.'

Activity : (i) Cut out a neatly made paper cone that does not have any overlapped paper, straight along its side, and opening it out, to see the shape of paper that forms the surface of the cone. (The line along which you cut the cone is the *slant height* of the cone which is represented by l). It looks like a part of a round cake.

(ii) If you now bring the sides marked A and B at the tips together, you can see that the curved portion of Fig. 11.3 (c) will form the circular base of the cone.

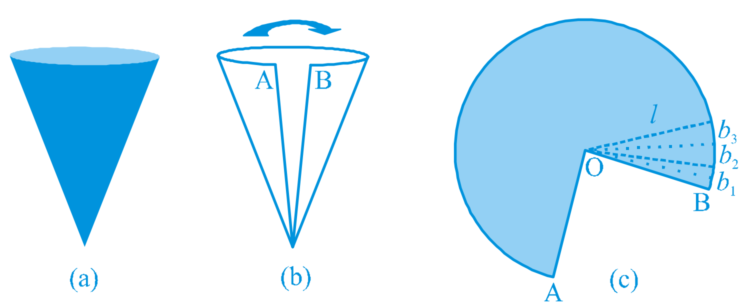


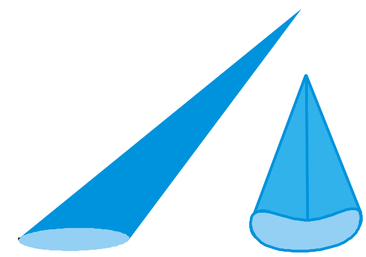
Fig. 11.3

(iii) If the paper like the one in Fig. 11.3 (c) is now cut into hundreds of little pieces, along the lines drawn from the point O, each cut portion is almost a small triangle, whose height is the slant height l of the cone.

(iv) Now the area of each triangle $= \frac{1}{2} \times$ base of each triangle $\times\ l$.

So, area of the entire piece of paper

దీనిని *క్రమ వృత్తాకార శంఖువు* అంటారు. క్రమ వృత్తాకార శంఖువు 11.1 (c) పటంలోని బిందువు A ని శీర్షం అని, AB ని ఎత్తు అని, BC ని వ్యాసార్థం అని మరియు AC ని శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు అని అంటారు. ఇక్కడ B అనేది శంఖువు యొక్క వృత్తాకార భూ కేంద్రం. ఎత్తు, వ్యాసార్థం మరియు ఏటవాలు ఎత్తును సాధారణంగా h, r, l లచే సూచిస్తారు. మరోసారి మనం ఎలాంటి శంఖువును క్రమ వృత్తాకార శంఖువు అని పిలవకూడదో చూద్దాం. ఇక్కడ, మీరు ఈ పటాల్లో (పటం 11.2 చూడండి) మీరు చూసేవి క్రమ వృత్తాకార శంఖువులు కావు. ఎందుకుంటే (a) లో దాని శీర్షం నుండి భూకేంద్రం కు కలిపే రేఖ భూమితో లంబకోణం చేయదు మరియు (b) లో భూమి వృత్తాకారంగా లేదు.

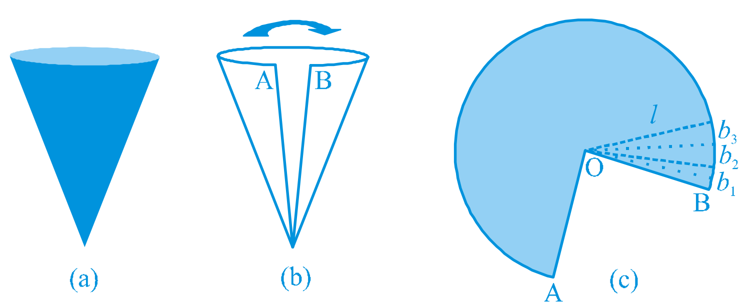


పటం. 11.2

స్థూపం విషయంలాగే , మనం క్రమ వృత్తాకార శంఖువుల గురించి మాత్రమే అధ్యయనం చేస్తాం. కాబట్టి, ఈ అధ్యాయంలో 'శంఖువు' అంటే 'క్రమ వృత్తాకార శంఖువు' అని గుర్తుంచుకోండి.

కృత్యం : (i) కాగితం అధ్యారోహణము కాకుండా చక్కగా తయారుచేయబడిన కాగితపు శంఖువును దాని భుజం వైపు నేరుగా కత్తిరించండి మరియు శంఖువు ఉపరితలం ఏర్పరిచిన కాగితపు ఆకారాన్ని చూడటానికి దానిని తెరవండి. (ఏ రేఖ వెంబడి అయితే శంఖువును కత్తిరించారో దానిని *ఏటవాలు ఎత్తు* అంటారు మరియు l తో సూచిస్తారు.) ఇది గుండ్రని కేక్ లో ఒక భాగంలా కనిపిస్తుంది.

(ii) ఇప్పుడు కొనలు A, B లచే గుర్తించబడిన భుజాలను ఒకచోట చేర్చినట్లయితే, పటం 11.3(c) యొక్క వక్ర భాగం శంఖువు యొక్క వృత్తాకార భూమిని ఏర్పరుస్తుందని మీరు చూడవచ్చు.



పటం. 11.3

(iii) పటం 11.3(c) లో ఉన్నటువంటి కాగితాన్ని ఇప్పుడు బిందువు O నుండి గీసిన రేఖల గుండా వందల కొద్ది చిన్న ముక్కలుగా కత్తిరిస్తే, కత్తిరించిన ప్రతి భాగం ఒక చిన్న త్రిభుజం అవుతుంది. దాని ఎత్తు శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు l గా ఉంటుంది.

(iv) ఇప్పుడు, ప్రతి త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ ప్రతి త్రిభుజం యొక్క భూమి $\times l$.

కాబట్టి, కాగితపు ముక్క యొక్క వైశాల్యం

$= $ sum of the areas of all the triangles

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \cdots = \frac{1}{2}l\left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times l \times \text{length of entire curved boundary of Fig. 11.3(c)}$$

(as $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ makes up the curved portion of the figure)

But the curved portion of the figure makes up the perimeter of the base of the cone and the circumference of the base of the cone $= 2\pi r$, where r is the base radius of the cone.

So, $\boxed{\textbf{Curved Surface Area of a Cone} = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$

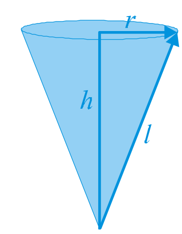


Fig. 11.4

where r is its base radius and l its slant height.

Note that $l^2 = r^2 + h^2$ (as can be seen from Fig. 11.4), by applying Pythagoras Theorem. Here h is the *height* of the cone.

Therefore, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

Now if the base of the cone is to be closed, then a circular piece of paper of radius r is also required whose area is πr^2.

So, $\boxed{\textbf{Total Surface Area of a Cone} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)}$

Example 1 : Find the curved surface area of a right circular cone whose slant height is 10 cm and base radius is 7 cm.

Solution : Curved surface area $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ cm}^2$$

$$= 220 \text{ cm}^2$$

Example 2 : The height of a cone is 16 cm and its base radius is 12 cm. Find the curved surface area and the total surface area of the cone (Use $\pi = 3.14$).

Solution : Here, $h = 16$ cm and $r = 12$ cm.

So, from $l^2 = h^2 + r^2$, we have

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

= అన్ని త్రిభుజ వైశాల్యాల మొత్తం

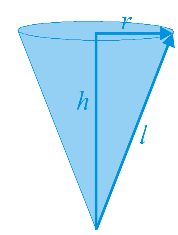
$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \cdots = \frac{1}{2}l\left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\right)$$

$= \frac{1}{2} \times l \times$ పటం 11.3(c) యొక్క మొత్తం వక్ర సరిహద్దు పొడవు

($b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ పటం యొక్క వక్రభాగంను ఏర్పరుస్తాయి.)

కాని పటం యొక్క వక్ర భాగం శంఖువు యొక్క భూ చుట్టుకొలతగా ఏర్పడుతుంది మరియు శంఖువు యొక్క భూ చుట్టుకొలత $= 2\pi r$, ఇక్కడ r అనేది శంఖువు యొక్క భూ వ్యాసార్థం

కాబట్టి, $\boxed{\textbf{శంఖువు వక్రతల వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$



పటం. 11.4

ఇందులో r అనేది దాని భూ వ్యాసార్థం, l దాని ఏటవాలు ఎత్తు.

పైథాగరస్ సూత్రాన్ని వర్తింపచేయడం ద్వారా $l^2 = r^2 + h^2$ (పటం 11.4 నుండి చూడవచ్చు) అని గమనించవచ్చు. ఇక్కడ h శంఖువు యొక్క ఎత్తు.

కావున, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

ఇక్కడ శంఖువు యొక్క భూమి మూసినట్లుగా ఉండటానికి వైశాల్యము πr^2గా వుండే r వ్యాసార్థం గల వృత్తాకారపు కాగితపు ముక్క అవసరం అవుతుంది.

కాబట్టి, $\boxed{\textbf{శంఖువు సంపూర్ణ తల వైశాల్యం} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)}$

ఉదాహరణ 1 : ఏటవాలు ఎత్తు 10 సెం.మీ., భూవ్యాసార్థం 7 సెం.మీ. కలిగిన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : వక్రతల వైశాల్యం $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

$$= 220 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

ఉదాహరణ 2 : శంఖువు ఎత్తు 16 సెం.మీ. మరియు దాని భూవ్యాసార్థం 12 సెం.మీ. అయితే శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణ తల వైశాల్యం కనుక్కోండి. ($\pi = 3.14$ ఉపయోగించండి).

సాధన : ఇక్కడ, $h = 16$ సెం.మీ., $r = 12$ సెం.మీ.

కాబట్టి, $l^2 = h^2 + r^2$ నుండి

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ సెం.మీ.} = 20 \text{ సెం.మీ.}$$

So, curved surface area = πrl

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2$$
$$= 753.6 \text{ cm}^2$$

Further, total surface area = $\pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ cm}^2$$
$$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2$$
$$= 1205.76 \text{ cm}^2$$

Example 3 : A corn cob (see Fig. 11.5), shaped somewhat like a cone, has the radius of its broadest end as 2.1 cm and length (height) as 20 cm. If each 1 cm^2 of the surface of the cob carries an average of four grains, find how many grains you would find on the entire cob.

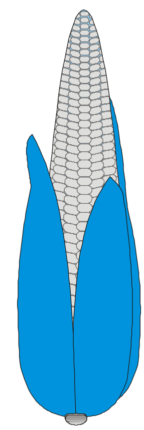


Fig. 11.5

Solution : Since the grains of corn are found only on the curved surface of the corn cob, we would need to know the curved surface area of the corn cob to find the total number of grains on it. In this question, we are given the height of the cone, so we need to find its slant height.

Here, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$$= \sqrt{404.41} \text{ cm} = 20.11 \text{ cm}$$

Therefore, the curved surface area of the corn cob = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{ cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2 = 132.73 \text{ cm}^2 \text{ (approx.)}$$

Number of grains of corn on 1 cm^2 of the surface of the corn cob = 4

Therefore, number of grains on the entire curved surface of the cob

$$= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531 \text{ (approx.)}$$

So, there would be approximately 531 grains of corn on the cob.

EXERCISE 11.1

Assume $\pi = \frac{22}{7}$, unless stated otherwise.

1. Diameter of the base of a cone is 10.5 cm and its slant height is 10 cm. Find its curved surface area.
2. Find the total surface area of a cone, if its slant height is 21 m and diameter of its base is 24 m.

కావున, వక్రతల వైశాల్యం $= \pi r l$

$= 3.14 \times 12 \times 20$ చ.సెం.మీ.

$= 753.6$ చ.సెం.మీ.

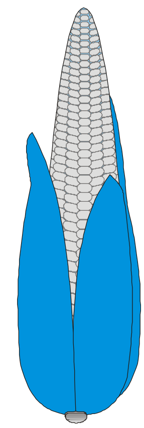
మరియు, సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi r l + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)$ చ.సెం.మీ.

$= (753.6 + 452.16)$ చ.సెం.మీ.

$= 1205.76$ చ.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3 : ఒక మొక్కజొన్న కంకి (పటం 1.5 చూడండి) కొంత వరకు శంఖువు ఆకారంలో ఉంది. దాని లావుగా ఉన్న చివర వ్యాసార్థం 2.1 సెం.మీ. మరియు పొడవు (ఎత్తు) 20 సెం.మీ. ప్రతి 1 చ.సెం.మీ. ఉపరితలం సగటున నాలుగు గింజలు కలిగి ఉంటే, మొత్తం మొక్క జొన్న కంకి లో ఎన్ని గింజలు ఉంటాయి.



పటం. 11.5

సాధన : మొక్కజొన్న గింజలు మొక్కజొన్న కంకి యొక్క వక్ర తలంపై మాత్రమే కనిపిస్తాయి. కాబట్టి, దానిపై ఉన్న మొత్తం గింజల సంఖ్యను కనుక్కోవడానికి మొక్కజొన్న కంకి యొక్క వక్రతల వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోవాలి. ఈ ప్రశ్నలో శంఖువు యొక్క ఎత్తు ఇవ్వబడింది కాబట్టి ఏటవాలు, ఎత్తు కనుక్కోవాలి.

ఇక్కడ, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ సెం.మీ.

$= \sqrt{404.41}$ సెం.మీ $= 20.11$ సెం.మీ.

అందువలన, మొక్కజొన్న కంకి యొక్క వైశాల్యం $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ చ.సెం.మీ. $= 132.726$ చ.సెం.మీ. $= 132.73$ చ.సెం.మీ. (సుమారుగా.)

1 చ. సెం.మీ. మొక్కజొన్న కంకి ఉపరితలంపై గల గింజల సంఖ్య $= 4$

అందువల్ల, మొక్కజొన్న కంకి ఉపరితలంపై గల గింజల సంఖ్య

$= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (సుమారుగా)

కాబట్టి, మొక్కజొన్న కంకి పై సుమారుగా 531 గింజలు ఉంటాయి.

అభ్యాసం 11.1

మరో విధంగా చెప్పనంత వరకు $\pi = \frac{22}{7}$ గా భావించండి.

1. శంఖువు యొక్క భూవ్యాసం 10.5 సెం.మీ., ఏటవాలు ఎత్తు 10 సెం.మీ. దాని వక్రతల వైశాల్యం కనుక్కోండి.
2. శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు 21 మీ., భూవ్యాసం 24 మీ. దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుక్కోండి.

3. Curved surface area of a cone is 308 cm^2 and its slant height is 14 cm. Find (i) radius of the base and (ii) total surface area of the cone.
4. A conical tent is 10 m high and the radius of its base is 24 m. Find

   (i) slant height of the tent.

   (ii) cost of the canvas required to make the tent, if the cost of 1 m^2 canvas is ₹ 70.
5. What length of tarpaulin 3 m wide will be required to make conical tent of height 8 m and base radius 6 m? Assume that the extra length of material that will be required for stitching margins and wastage in cutting is approximately 20 cm (Use $\pi = 3.14$).
6. The slant height and base diameter of a conical tomb are 25 m and 14 m respectively. Find the cost of white-washing its curved surface at the rate of ₹ 210 per 100 m^2.
7. A joker's cap is in the form of a right circular cone of base radius 7 cm and height 24 cm. Find the area of the sheet required to make 10 such caps.
8. A bus stop is barricaded from the remaining part of the road, by using 50 hollow cones made of recycled cardboard. Each cone has a base diameter of 40 cm and height 1 m. If the outer side of each of the cones is to be painted and the cost of painting is ₹ 12 per m^2, what will be the cost of painting all these cones? (Use $\pi = 3.14$ and take $\sqrt{1.04} = 1.02$)

11.2 Surface Area of a Sphere

What is a sphere? Is it the same as a circle? Can you draw a circle on a paper? Yes, you can, because a circle is a plane closed figure whose every point lies at a constant distance (called **radius**) from a fixed point, which is called the **centre** of the circle. Now if you paste a string along a diameter of a circular disc and rotate it as you had rotated the triangle in the previous section, you see a new solid (see Fig 11.6). What does it resemble? A ball? Yes. It is called a **sphere**.

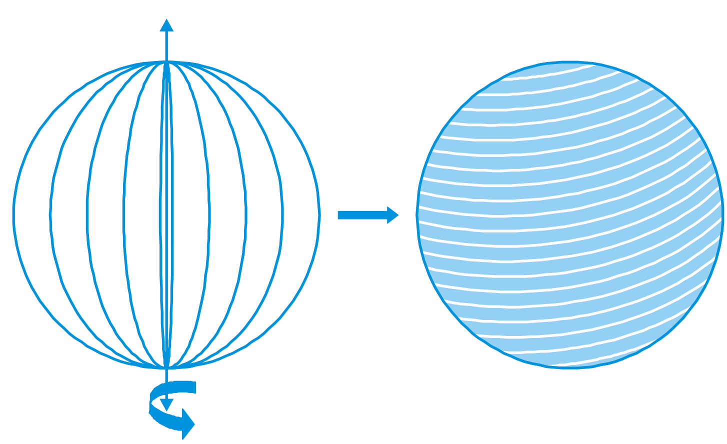
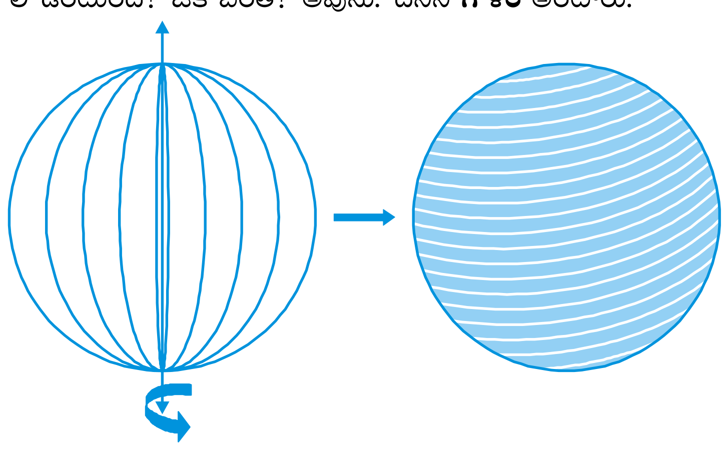


Fig. 11.6

3. శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యం 308 చ.సెం.మీ. మరియు దాని ఏటవాలు ఎత్తు 14 సెం.మీ. అయిన (i) భూవ్యాసార్ధం మరియు (ii) సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుక్కోండి.
4. ఒక శంఖాకార గుడారం ఎత్తు 10 మీ. మరియు దాని భూవ్యాసార్ధం 24 మీ. అయిన
   (i) గుడారం యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు.
   (ii) ఒకవేళ 1 చ. మీ. కాన్వాస్ ఖరీదు ₹70 అయితే గుడారం తయారు చేయడానికి అవసరమైన కాన్వాస్ యొక్క ఖరీదు కనుక్కోండి.
5. ఎత్తు 8 మీ, భూవ్యాసార్ధం 6 మీ కలిగిన శంఖాకారా గుడారాన్ని తయారు చేయడం కోసం 3 మీ. వెడల్పు గల టార్పలిన్‌కి ఎంత పొడవు అవసరం? అంచులను కుట్టడంలో, కత్తిరింపులో వృధాలకు అవసరమైన మెటీరీయల్ అదనపు పొడవు సుమారుగా 20 సెం.మీ. అని భావించండి ($\pi = 3.14$ ఉపయోగించండి).
6. శంఖాకార సమాధి యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు , భూవ్యాసం వరుసగా 25 మీ., 14 మీ. మరియు ప్రతి 100 చ.మీ. కు ₹210 చొప్పున దాని వక్రతలానికి సున్నం వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుక్కోండి.
7. క్రమ వృత్తాకార శంఖువు రూపంలో ఉన్న జోకర్ టోపీ భూవ్యాసార్ధం 7 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 24 సెం.మీ. అటువంటి 10 టోపీలు తయారుచేయడానికి అవసరమైన షీట్ యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.
8. పునరుత్పత్తి చేయబడ్డ కార్డ్ బోర్డ్ తో తయారు చేయబడ్డ 50 గుల్ల శంఖువులను ఉపయోగించి రోడ్డు యొక్క మిగిలిన భాగం నుండి ఒక బస్‌స్టాప్‌కు బారికేడ్ వేయబడింది. ప్రతి శంఖువు 40 సెం.మీ. భూవ్యాసం 1 మీ. ఎత్తును కలిగివుంది. ప్రతి శంఖువు యొక్క వెలుపలి వైపు పెయింట్ వేయాల్సివస్తే మరియు 1 చ.మీ. కు ₹ 12 చొప్పున అన్ని శంఖువులకు పెయింటింగ్ చేయడానికి అయ్యే మొత్తం ఖర్చు ఎంత? ($\pi = 3.14$ ఉపయోగించండి మరియు $\sqrt{1.04} = 1.02$ గా తీసుకోండి.)

11.2 గోళం ఉపరితల వైశాల్యం

గోళం అంటే ఏమిటి? ఇది ఒక వృత్తం లాగా ఉంటుందా? మీరు ఒక కాగితంపై ఒక వృత్తాన్ని గీయగలరా? అవును, మీరు చేయగలరు, ఎందుకంటే వృత్తం అనేది ఒక సమతల సంవృత పటం. దీని పై ప్రతి బిందువు స్థిర బిందువు నుండి (**వృత్త కేంద్రం**) స్థిర దూరం (**వ్యాసార్ధం** అని పిలుస్తారు) లో ఉంటుంది. ఇప్పుడు మీరు వృత్తాకార పలక యొక్క వ్యాసం గుండా (వెంబడి) ఒక తీగను అతికించి మునుపటి విభాగంలో త్రిభుజాన్ని తిప్పినట్లుగా తిప్పితే, మీరు కొత్త ఘన వస్తువు చూస్తారు. (పటం 11.6 చూడండి.) ఇది దేనిని పోలి ఉంటుంది? ఒక బంతి? అవును. దీనిని **గోళం** అంటారు.



పటం. 11.6

Can you guess what happens to the centre of the circle, when it forms a sphere on rotation? Of course, it becomes the centre of the sphere. So, *a sphere is a three dimensional figure* (*solid figure*), *which is made up of all points in the space, which lie at a constant distance called the radius, from a fixed point called the centre of the sphere.*

Note : A sphere is like the surface of a ball. The word *solid sphere* is used for the solid whose surface is a sphere.

Activity : Have you ever played with a top or have you at least watched someone play with one? You must be aware of how a string is wound around it. Now, let us take a rubber ball and drive a nail into it. Taking support of the nail, let us wind a string around the ball. When you have reached the 'fullest' part of the ball, use pins to keep the string in place, and continue to wind the string around the remaining part of the ball, till you have completely covered the ball [see Fig. 11.7(a)]. Mark the starting and finishing points on the string, and slowly unwind the string from the surface of the ball.

Now, ask your teacher to help you in measuring the diameter of the ball, from which you easily get its radius. Then on a sheet of paper, draw four circles with radius equal to the radius of the ball. Start filling the circles one by one, with the string you had wound around the ball [see Fig. 11.7(b)].

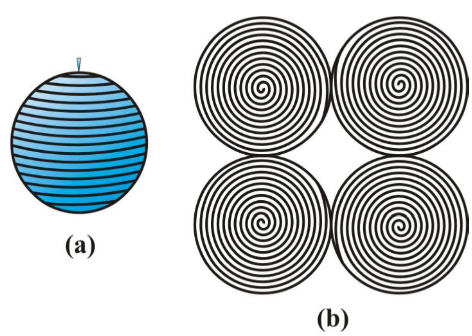


Fig. 11.7

What have you achieved in all this?

The string, which had completely covered the surface area of the sphere, has been used to completely fill the regions of four circles, all of the same radius as of the sphere.

So, what does that mean? This suggests that the surface area of a sphere of radius r

$$= 4 \text{ times the area of a circle of radius } r = 4 \times (\pi r^2)$$

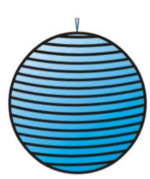
So, $\boxed{\textbf{Surface Area of a Sphere} = 4\pi r^2}$

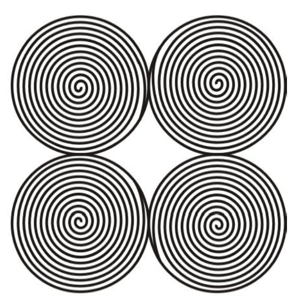
భ్రమణంచే ఒక గోళాన్ని ఏర్పరచినప్పుడు వృత్త కేంద్రానికి ఏమి జరుగుతుందో మీరు ఊహించగలరా? వాస్తవానికి ఇది గోళానికి కేంద్రంగా మారుతుంది. కాబట్టి *గోళమనేది త్రిమితీయ పటం(ఘన వస్తువు) ఇది అంతరాళంలోని అన్ని బిందువులతో రూపొందించబడింది, ఇది వ్యాసార్ధం అని పిలవబడే స్థిరమైన దూరంలో ఉంటుంది. స్థిర బిందువును గోళం యొక్క కేంద్రం అని అంటారు.*

గమనిక : గోళం అనేది బంతి యొక్క ఉపరితలం లాంటిది. ఘన గోళం అనే పదాన్ని ఉపరితలం ఒక గోళంగా ఉన్న ఘనవస్తువు కొరకు ఉపయోగిస్తారు.

కృత్యం : మీరు ఎప్పుడైనా బొంగరంతో ఆడుకున్నారా లేదా కనీసం ఎవరైనా ఆడుకోవడం చూశారా? దాని చుట్టూ ఒక తీగ ఎలా చుట్టబడిందో మీరు తెలుసుకోవాలి. ఇప్పుడు మనం, ఒక రబ్బరు బంతిని తీసుకొని దానిలోనికి ఒక మేకుని దించుదాం. మేకును ఆధారం చేసుకొని బంతి చుట్టూ తీగను తిప్పుదాం. మీరు బంతి యొక్క 'పూర్తి' భాగాన్ని చేరుకున్నప్పుడు, తీగను ఉంచడానికి పిన్నులను ఉపయోగించండి మరియు బంతిని పూర్తిగా కప్పే వరకు తీగను బంతి యొక్క మిగిలిన భాగం చుట్టూ తిప్పడం కొనసాగించండి (పటం 11.7 (a) చూడండి). మొదలు, చివర బిందువులను గుర్తించండి మరియు బంతి యొక్క ఉపరితలం నుంచి తీగను నెమ్మదిగా విప్పండి.

ఇప్పుడు బంతి యొక్క వ్యాసాన్ని కొలవడంలో మీకు సహాయం చేయమని మీ ఉపాధ్యాయుడిని అడగండి. దాని నుండి మీరు దాని వ్యాసార్ధాన్ని సులభంగా పొందుతారు. తరువాత ఒక కాగితం షీటుపై బంతి వ్యాసార్ధానికి సమానమైన వ్యాసార్ధంతో నాలుగు వృత్తాలను గీయండి. బంతి చుట్టూ చుట్టుకున్న తీగతో వృత్తాలను ఒక్కొక్కటిగా నింపడం ప్రారంభించండి. (పటం 11.7(b) చూడండి).


(a)


పటం. 11.7 (b)

వీటన్నింటిలో మీరు ఏమి సాధించారు?

గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యాన్ని పూర్తిగా కప్పిఉంచిన తీగ, నాలుగు వృత్తాల యొక్క ప్రాంతాలను పూర్తిగా నింపడానికి ఉపయోగించబడింది, ఇవన్నీ ఒకే గోళం వ్యాసార్ధం కలిగినవి.

కాబట్టి, దాని అర్ధం ఏమిటి? r వ్యాసార్ధం గల గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం

= r వ్యాసార్ధం గల వృత్త వైశాల్యానికి 4 రెట్లు అని సూచిస్తుంది. $= 4 \times (\pi r^2)$

కాబట్టి, **గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం = $4 \pi r^2$**

where r is the radius of the sphere.

How many faces do you see in the surface of a sphere? There is only one, which is curved.

Now, let us take a solid sphere, and slice it exactly 'through the middle' with a plane that passes through its centre. What happens to the sphere?

Yes, it gets divided into two equal parts (see Fig. 11.8)! What will each half be called? It is called a **hemisphere**. (Because 'hemi' also means 'half')

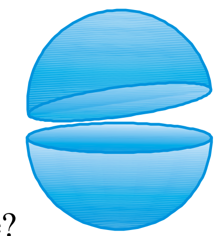


Fig. 11.8

And what about the surface of a hemisphere? How many faces does it have?

Two! There is a curved face and a flat face (base).

The curved surface area of a hemisphere is half the surface area of the sphere, which is $\frac{1}{2}$ of $4\pi r^2$.

Therefore, $\boxed{\textbf{Curved Surface Area of a Hemisphere} = 2\pi r^2}$

where r is the radius of the sphere of which the hemisphere is a part.

Now taking the two faces of a hemisphere, its surface area $2\pi r^2 + \pi r^2$

So, $\boxed{\textbf{Total Surface Area of a Hemisphere} = 3\pi r^2}$

Example 4 : Find the surface area of a sphere of radius 7 cm.

Solution : The surface area of a sphere of radius 7 cm would be

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 616 \text{ cm}^2$$

Example 5 : Find (i) the curved surface area and (ii) the total surface area of a hemisphere of radius 21 cm.

Solution : The curved surface area of a hemisphere of radius 21 cm would be

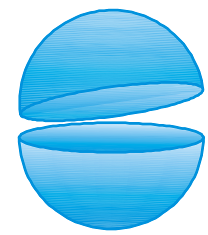
$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

ఇక్కడ, r అనేది గోళం యొక్క వ్యాసార్థం.

ఒక గోళం యొక్క ఉపరితలంపై మీరు ఎన్ని ముఖాలను చూస్తారు? వక్రంగా ఉన్న ఒకే ఒక్కటి ఉంది.

ఇప్పుడు ఒక ఘన గోళాన్ని తీసుకుందాం, మరియు దానిని సరిగ్గా కేంద్రంగుండా ప్రయాణించే తలంతో ముక్కలు చేద్దాం. గోళానికి ఏమి జరుగుతుంది?

అవును, ఇది రెండు సమ భాగాలుగా విభజించబడుతుంది. (పటం. 11.8.చూడండి). ప్రతి సగాన్ని ఏమని పిలుస్తారు? అర్ధగోళం (hemisphere) ఎందుకనగా హెమీ (hemi) అనగా సగం అని అర్థం) అంటారు.



పటం. 11.8

మరియు అర్ధగోళం యొక్క ఉపరితలం గురించి ఏమి చెప్పగలం? దానికి ఎన్ని తలాలుంటాయి?

రెండు! వక్ర తలం, సమతలం (భూమి) ఉంటాయి.

ఒక అర్ధగోళం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యంలో సగం. అది $\frac{1}{2}(4\pi r^2)$.

కాబట్టి, $\boxed{\text{అర్ధగోళం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం} = 2\pi r^2}$

అక్కడ r అనేది గోళంలో భాగమైన అర్ధగోళం యొక్క వ్యాసార్థం.

ఇప్పుడు అర్ధగోళం యొక్క రెండు తలాలు తీసుకుందాం, అవి దాని ఉపరితల వైశాల్యం $2\pi r^2 + \pi r^2$.

కాబట్టి, $\boxed{\text{ఒక అర్ధగోళం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం} = 3\pi r^2}$

ఉదాహరణ 4 : గోళం యొక్క వ్యాసార్థం 7 సెం.మీ. అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : వ్యాసార్థం 7 సెం.మీ కలిగిన గోళం యొక్క ఉపరితల వ్యాసార్థం.

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ చ.సెం.మీ.} = 616 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

ఉదాహరణ 5 : అర్ధగోళం యొక్క వ్యాసార్థం 21 సెం.మీ. అయిన క్రింది వాటిని కనుక్కోండి. (i) వక్రతల వైశాల్యం మరియు (ii) సంపూర్ణతల వైశాల్యం.

సాధన : వ్యాసార్థం 21 సెం.మీ గల అర్ధగోళం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ చ.సెం.మీ.} = 2772 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

(ii) the total surface area of the hemisphere would be

$$3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$$

Example 6 : The hollow sphere, in which the circus motorcyclist performs his stunts, has a diameter of 7 m. Find the area available to the motorcyclist for riding.

Solution : Diameter of the sphere = 7 m. Therefore, radius is 3.5 m. So, the riding space available for the motorcyclist is the surface area of the 'sphere' which is given by

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2$$

$$= 154 \text{ m}^2$$

Example 7 : A hemispherical dome of a building needs to be painted (see Fig. 11.9). If the circumference of the base of the dome is 17.6 m, find the cost of painting it, given the cost of painting is ₹ 5 per 100 cm^2.

Solution : Since only the rounded surface of the dome is to be painted, we would need to find the curved surface area of the hemisphere to know the extent of painting that needs to be done. Now, circumference of the dome = 17.6 m. Therefore, 17.6 = $2\pi r$. So, the radius of the dome

$$= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22} \text{ m} = 2.8 \text{ m}$$

The curved surface area of the dome = $2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2$$

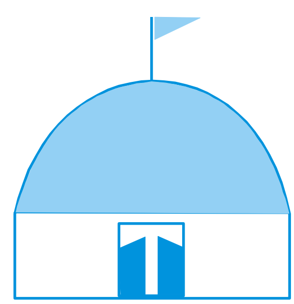


Fig. 11.9

Now, cost of painting 100 cm^2 is ₹ 5.

So, cost of painting 1 m^2 = ₹ 500

Therefore, cost of painting the whole dome

= ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24640

EXERCISE 11.2

Assume $\pi = \frac{22}{7}$, unless stated otherwise.

1. Find the surface area of a sphere of radius:

(i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm

(ii) అర్ధగోళం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం

$$3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ చ.సెం.మీ.} = 4158 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

ఉదాహరణ 6 : ఒక సర్కస్ మోటారు సైకిలిస్టు ఒక గుల్ల గోళాకార ఆకృతిలో విన్యాసం చేస్తున్నాడు. గుల్ల గోళ వ్యాసం 7మీ. సైకిలిస్టు విన్యాసంలో తిరిగేందుకు అవకాశముండే ప్రాంత వైశాల్యం ఎంత?

సాధన : గోళం వ్యాసం = 7 మీ., వ్యాసార్ధం 3.5 మీ. కాబట్టి సైకిలిస్టు విన్యాసం తిరిగేందుకు అవకాశముండే ప్రాంత వైశాల్యం గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం అవుతుంది. అది

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ చ.మీ.}$$

$$= 154 \text{ చ.మీ.}$$

ఉదాహరణ 7 : ఒక భవంతి యొక్క అర్ధగోళాకార గోపురానికి రంగు వేయాలి (పటం 11.9 చూడండి). గోపురం యొక్క భూపరిధి 17.6 మీ. అయిన 100 చ.సెం.మీ. నకు రంగువేయుటకు ₹5 చొప్పున గోపురానికి రంగువేయడానికి ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

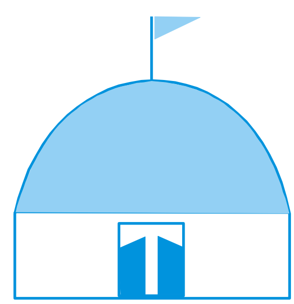
సాధన : గోపురం యొక్క గుండ్రని ఉపరితలానికి మాత్రమే రంగు వేయాలి కనుక, పెయింటింగ్ యొక్క ప్రాంతం తెలుసుకోవడానికి మనం అర్ధగోళం యొక్క వక్రతల వైశాల్యాన్ని కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. ఇప్పుడు గోళం యొక్క చుట్టుకొలత = 17.6 మీ., అందువలన 17.6 = $2\pi r$.

కాబట్టి , గోపురం వ్యాసార్ధం = $17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ మీ. = 2.8 మీ.

గోపురం వక్రతల వైశాల్యం $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ చ.మీ.}$$

$$= 49.28 \text{ చ.మీ.}$$



పటం. 11.9

100 చ.సెం.మీ. నకు రంగు వేయుటకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 5.

అందువలన, 1 చ.మీ. నకు రంగువేయుటకు అయ్యే ఖర్చు = ₹ 500

కావున, గోపురం మొత్తానికి రంగువేయడానికి అయ్యే ఖర్చు

= ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24640

అభ్యాసం 11.2

మరో విధంగా పేర్కొనబడనంత వరకు, $\pi = \frac{22}{7}$ గా భావించండి.

1. క్రింది వ్యాసార్ధం కలిగిన గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం కనుక్కోండి:

(i) 10.5 సెం. మీ. (ii) 5.6 సెం. మీ. (iii) 14 సెం. మీ.

2. Find the surface area of a sphere of diameter:
(i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

3. Find the total surface area of a hemisphere of radius 10 cm. (Use $\pi = 3.14$)

4. The radius of a spherical balloon increases from 7 cm to 14 cm as air is being pumped into it. Find the ratio of surface areas of the balloon in the two cases.

5. A hemispherical bowl made of brass has inner diameter 10.5 cm. Find the cost of tin-plating it on the inside at the rate of ₹ 16 per 100 cm^2.

6. Find the radius of a sphere whose surface area is 154 cm^2.

7. The diameter of the moon is approximately one fourth of the diameter of the earth. Find the ratio of their surface areas.

8. A hemispherical bowl is made of steel, 0.25 cm thick. The inner radius of the bowl is 5 cm. Find the outer curved surface area of the bowl.

9. A right circular cylinder just encloses a sphere of radius r (see Fig. 11.10). Find
(i) surface area of the sphere,
(ii) curved surface area of the cylinder,
(iii) ratio of the areas obtained in (i) and (ii).

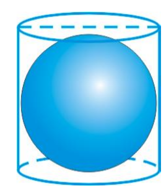


Fig. 11.10

11.3 Volume of a Right Circular Cone

In earlier classes we have studied the volumes of cube, cuboid and cylinder

In Fig 11.11, can you see that there is a right circular cylinder and a right circular cone of the same base radius and the same height?

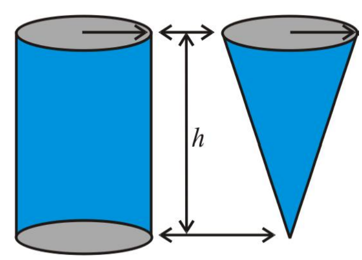


Fig. 11.11

Activity : Try to make a hollow cylinder and a hollow cone like this with the same base radius and the same height (see Fig. 11.11). Then, we can try out an experiment that will help us, to see practically what the volume of a right circular cone would be!

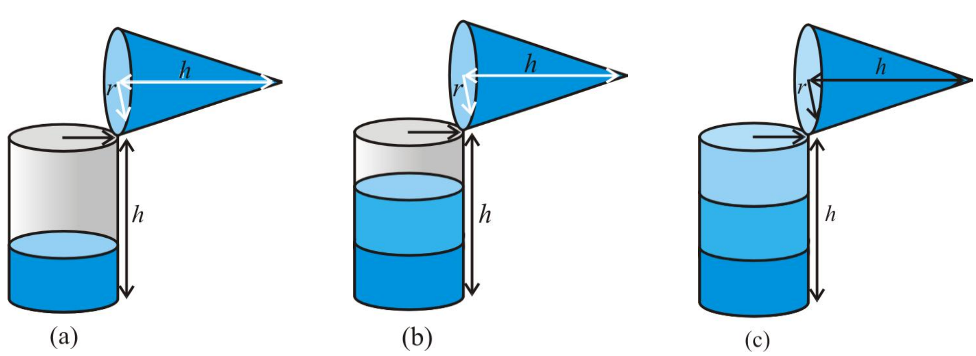
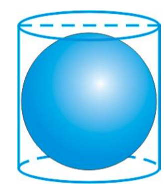


Fig. 11.12

2. క్రింది వ్యాసం కలిగిన గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం కనుక్కోండి:
   (i) 14 సెం. మీ. (ii) 21 సెం. మీ. (iii) 3.5 మీ.
3. 10 సెం. మీ వ్యాసార్థంగల అర్ధగోళం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం కనుక్కోండి. ($\pi = 3.14$ ఉపయోగించండి.)
4. గోళాకార బెలూన్ యొక్క వ్యాసం 7 సెం.మీ. నుండి 14 సెం.మీ. వరకు పెరిగే విధంగా గాలి నింపబడింది. ఈ రెండు సందర్భాలలో గల ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.
5. ఇత్తడితో చేసిన ఒక అర్ధగోళాకార గిన్నె లోపలి వ్యాసం 10.5 సెం.మీ., 100 చ.సెం.మీ.లకు ₹16 చొప్పున లోపలివైపున టిన్ ప్లేటింగ్ చేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుక్కోండి.
6. ఉపరితల వైశాల్యం 154 చ.సెం.మీ. ఉన్న గోళం యొక్క వ్యాసార్థం కనుక్కోండి.
7. చంద్రుని వ్యాసం భూమి యొక్క వ్యాసంలో సుమారు నాలుగవ వంతు ఉంటుంది. వాటి ఉపరితల వైశాల్యాల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.
8. 0.25 సెం.మీ. మందం కలిగిన స్టీలుతో ఒక అర్ధగోళం తయారుచేయబడింది. దాని అంతర వ్యాసార్థం 5 సెం.మీ. అయితే బాహ్య వక్రతల వైశాల్యం కనుక్కోండి?
9. ఒక క్రమ వృత్తాకార స్థూపం r వ్యాసార్థం కలిగిన గోళాన్ని ఇమడ్చబడింది (పటం 11.10 చూడండి).
   (i) గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం,
   (ii) స్థూపం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం,
   (iii) (i) మరియు (ii) లో పొందిన వైశాల్యాల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.

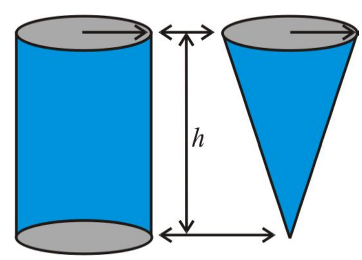


పటం. 11.10

11.3 క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణం

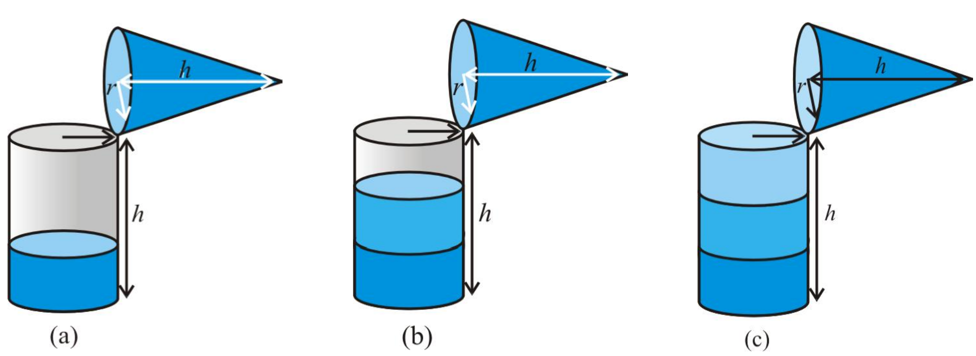
క్రింది తరగతులలో మీరు ఘనం, దీర్ఘఘనం, స్థూపాల ఘనపరిమాణాల గురించి చదివివున్నారు.

మీరు పటం 11.11 లో, క్రమ వృత్తాకార స్థూపం మరియు క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఒకే భూవ్యాసార్థం, ఒకే ఎత్తు ఉన్నట్లు గమనించారా?



పటం. 11.11

కృత్యం : ఒకే భూవ్యాసార్థం , ఒకే ఎత్తు గల గుల్ల స్థూపం మరియు గుల్ల శంఖువును తయారుచేయడానికి ప్రయత్నించండి. (పటం 11.11 చూడండి) అప్పుడు క్రమ వృత్తాకారశంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం ఎంత ఉంటుందో చూడడానికి, మనకు సహాయపడే ఒక ప్రయోగాన్ని ప్రయత్నించవచ్చు.



పటం. 11.12

So, let us start like this.

Fill the cone up to the brim with sand once, and empty it into the cylinder. We find that it fills up only a part of the cylinder [see Fig. 11.12(a)].

When we fill up the cone again to the brim, and empty it into the cylinder, we see that the cylinder is still not full [see Fig. 11.12(b)].

When the cone is filled up for the third time, and emptied into the cylinder, it can be seen that the cylinder is also full to the brim [see Fig. 11.12(c)].

With this, we can safely come to the conclusion that three times the volume of a cone, makes up the volume of a cylinder, which has the same base radius and the same height as the cone, which means that the volume of the cone is one-third the volume of the cylinder.

So, $\boxed{\textbf{Volume of a Cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

where r is the base radius and h is the height of the cone.

Example 8 : The height and the slant height of a cone are 21 cm and 28 cm respectively. Find the volume of the cone.

Solution : From $l^2 = r^2 + h^2$, we have

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

So, volume of the cone $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$

$= 7546 \text{ cm}^3$

Example 9 : Monica has a piece of canvas whose area is 551 m^2. She uses it to have a conical tent made, with a base radius of 7 m. Assuming that all the stitching margins and the wastage incurred while cutting, amounts to approximately 1 m^2, find the volume of the tent that can be made with it.

Solution : Since the area of the canvas = 551 m^2 and area of the canvas lost in wastage is 1 m^2, therefore the area of canvas available for making the tent is (551 – 1) m^2 = 550 m^2.

Now, the surface area of the tent = 550 m^2 and the required base radius of the conical tent = 7m

Note that a tent has only a curved surface (the floor of a tent is not covered by canvas!!).

మనం ఇలా ప్రారంభిద్దాం.

శంఖువు పైఅంచు వరకు ఒకసారి ఇసుకతో నింపండి మరియు దానిని స్థూపంలోనికి పోయండి ఇది స్థూపం యొక్క ఒక భాగాన్ని మాత్రమే నింపుతుందని కనుక్కుంటాం (పటం 11.12 (a) చూడండి).

శంఖువును మళ్ళీ అంచు వరకు నింపి దానిని, స్థూపంలోనికి పోసినప్పుడు స్థూపం ఇంకా నిండుగా లేదని మనం చూస్తాం (పటం 11.12 (b) చూడండి).

శంఖువును మూడవసారి నింపి దానిని స్తూపంలోకి పోసినప్పుడు స్థూపం పై అంచు వరకు నిండుగా ఉన్నట్లుగా చూడవచ్చు (పటం 11.12 (c) చూడండి).

దీనితో, శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణానికి మూడు రెట్లు స్థూపం ఘనపరిమాణం ఉంటుందని ఖచ్చిత నిర్ధారణకు మనం రావచ్చు. దీనికి శంఖువుకు ఉన్న అదే భూవ్యాసార్ధం, అదే ఎత్తు ఉంటుంది. అంటే శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణంలో మూడింట ఒక వంతు.

కాబట్టి, $\boxed{\textbf{శంఖువు ఘనపరిమాణం} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

ఇందులో, r అనేది భూవ్యాసార్ధం మరియు h అనేది శంఖువు ఎత్తు.

ఉదాహరణ 8 : శంఖువు ఎత్తు మరియు ఏటవాలు ఎత్తులు వరుసగా 21 సెం.మీ., 28 సెం.మీ. శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన : $l^2 = r^2 + h^2$, నుండి

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ సెం.మీ.} = 7\sqrt{7} \text{ సెం.మీ.}$$

కాబట్టి, శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ ఘన.సెం.మీ.

$= 7546$ ఘన.సెం.మీ.

ఉదాహరణ 9 : మోనికా 551 చ.మీ. వైశాల్యం గల కాన్వాస్ ముక్కను కలిగివుంది. ఆమె 7 మీ. వ్యాసార్ధంతో శంఖాకారపు గుడారాన్ని తయారుచేయడానికి దానిని ఉపయోగిస్తుంది. అన్ని కుట్టు అంచులు మరియు కత్తిరించేటప్పుడు అయ్యే వృధా దాదాపు 1 చ.మీ. వరకు ఉంటుందని ఊహిస్తే, దానితో తయారు చేయగల గుడారం యొక్క ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన : కాన్వాస్ వైశాల్యం = 551 చ.మీ., వృధా అయిన కాన్వాస్ వైశాల్యం 1 చ.మీ. కాబట్టి గుడారాన్ని తయారుచేయడానికి అందుబాటులో ఉన్న కాన్వాస్ వైశాల్యం (551−1)చ.మీ. = 550 చ.మీ.

ఇప్పుడు, గుడారం ఉపరితల వైశాల్యం = 550 చ.మీ., శంఖాకారపు గుడారంకు అవసరమైన భూవ్యాసార్ధం = 7 మీ.

గుడారానికి వక్రతలం మాత్రమే ఉంటుందని గమనించండి. (గుడారం యొక్క నేల కాన్వాస్‌తో కప్పబడి ఉండదు!)

Therefore, curved surface area of tent = 550 m^2.

That is, $\pi rl = 550$

or, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

or, $l = 3\frac{550}{22}$ m $= 25$ m

Now, $l^2 = r^2 + h^2$

Therefore, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$ m $= \sqrt{625 - 49}$ m $= \sqrt{576}$ m

$= 24$ m

So, the volume of the conical tent $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3 = 1232 \text{ m}^3$.

EXERCISE 11.3

Assume $\pi = \frac{22}{7}$, unless stated otherwise.

1. Find the volume of the right circular cone with
(i) radius 6 cm, height 7 cm (ii) radius 3.5 cm, height 12 cm

2. Find the capacity in litres of a conical vessel with
(i) radius 7 cm, slant height 25 cm(ii) height 12 cm, slant height 13 cm

3. The height of a cone is 15 cm. If its volume is 1570 cm^3, find the radius of the base. (Use $\pi = 3.14$)

4. If the volume of a right circular cone of height 9 cm is 48 π cm^3, find the diameter of its base.

5. A conical pit of top diameter 3.5 m is 12 m deep. What is its capacity in kilolitres?

6. The volume of a right circular cone is 9856 cm^3. If the diameter of the base is 28 cm, find
(i) height of the cone (ii) slant height of the cone
(iii)curved surface area of the cone

7. A right triangle ABC with sides 5 cm, 12 cm and 13 cm is revolved about the side 12 cm. Find the volume of the solid so obtained.

8. If the triangle ABC in the Question 7 above is revolved about the side 5 cm, then find the volume of the solid so obtained. Find also the ratio of the volumes of the two solids obtained in Questions 7 and 8.

9. A heap of wheat is in the form of a cone whose diameter is 10.5 m and height is 3 m. Find its volume. The heap is to be covered by canvas to protect it from rain. Find the area of the canvas required.

అందువల్ల, గుడారం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం = 550 చ.మీ.

కావున ఇది, $\pi r l = 550$

లేదా, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

లేదా, $l = 3\frac{550}{22}$ మీ. $= 25$ మీ.

ఇప్పుడు, $l^2 = r^2 + h^2$

అందువల్ల $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$ మీ. $= \sqrt{625 - 49}$ మీ. $= \sqrt{576}$ మీ.

$= 24$ మీ.

కావున, శంఖాకారపు గుడారం యొక్క ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ మీ^{3}. $= 1232$ మీ^{3}.

అభ్యాసం 11.3

మరోవిధంగా పేర్కొనబడనంతవరకు, $\pi = \frac{22}{7}$గా భావించండి.

1. క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుక్కోండి.
(i) వ్యాసార్థం 6 సెం.మీ., ఎత్తు 7సెం.మీ. (ii) వ్యాసార్థం 3.5 సెం.మీ., ఎత్తు 12 సెం.మీ.

2. శంఖాకార పాత్ర యొక్క సామర్థ్యాన్ని లీటర్లలో కనుక్కోండి.
(i) వ్యాసార్థం 7సెం.మీ., ఏటవాలు ఎత్తు 25సెం.మీ. (ii) ఎత్తు 12సెం.మీ., ఏటవాలు ఎత్తు 13సెం.మీ.

3. ఒక శంఖువు యొక్క ఎత్తు 15 సెం.మీ.దాని ఘనపరిమాణం 1570 ఘ.సెం.మీ. అయితే భూవ్యాసార్థం కనుక్కోండి. (π =3.14 ఉపయోగించండి).

4. ఎత్తు 9 సెం.మీ. గల క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం 48 π ఘ.సెం.మీ. అయితే దాని భూవ్యాసం కనుక్కోండి.

5. పై వ్యాసం 3.5 మీ. గల శంఖాకారపు గుంట యొక్క లోతు 12 మీ. దాని సామర్థ్యం కిలోలీటర్లలో ఎంత?

6. క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణం 9856 ఘ.సెం.మీ. దాని భూవ్యాసం 28 సెం.మీ. అయితే క్రింది వాటిని కనుగొనండి.
(i) శంఖువు యొక్క ఎత్తు (ii) శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు
(iii) శంఖువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యం

7. 5సెం.మీ., 12 సెం.మీ., 13 సెం.మీ. భుజాలు గల లంబకోణ త్రిభుజం ABC, 12 సెం.మీ. గల భుజం వెంబడి భ్రమణం చేయగా ఏర్పడే ఘనవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.

8. ఒకవేళ పై ప్రశ్న 7లోని త్రిభుజం ABC, 5 సెం.మీ. గల భుజం వెంబడి భ్రమణం చేయగా ఏర్పడే ఘనవస్తువు యొక్క ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి. ప్రశ్నలు 7 మరియు 8 లలో పొందిన ఘనవస్తువుల యొక్క ఘనపరిమాణాల నిష్పత్తులను కనుక్కోండి.

9. గోధుమల కుప్ప 10.5 మీ. వ్యాసం, 3 మీ. ఎత్తు గల శంఖువు ఆకారంలో ఉంది. దాని ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి. వర్షం నుండి రక్షించడానికి కుప్పను కాన్వాస్‌తో కప్పాలి. కాబట్టి అవసరమైన కాన్వాస్ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

11.4 Volume of a Sphere

Now, let us see how to go about measuring the volume of a sphere. First, take two or three spheres of different radii, and a container big enough to be able to put each of the spheres into it, one at a time. Also, take a large trough in which you can place the container. Then, fill the container up to the brim with water [see Fig. 11.13(a)].

Now, carefully place one of the spheres in the container. Some of the water from the container will over flow into the trough in which it is kept [see Fig. 11.13(b)]. Carefully pour out the water from the trough into a measuring cylinder (i.e., a graduated cylindrical jar) and measure the water over flowed [see Fig. 11.13(c)]. Suppose the radius of the immersed sphere is r (you can find the radius by measuring the diameter of the sphere). Then evaluate $\frac{4}{3}\pi r^3$. Do you find this value almost equal to the measure of the volume over flowed?

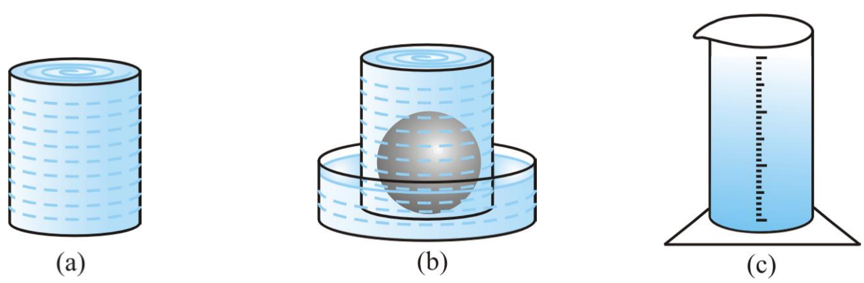


Fig. 11.13

Once again repeat the procedure done just now, with a different size of sphere. Find the radius R of this sphere and then calculate the value of $\frac{4}{3}\pi R^3$. Once again this value is nearly equal to the measure of the volume of the water displaced (over flowed) by the sphere. What does this tell us? We know that the volume of the sphere is the same as the measure of the volume of the water displaced by it. By doing this experiment repeatedly with spheres of varying radii, we are getting the same result, namely, the volume of a sphere is equal to $\frac{4}{3}\pi$ times the cube of its radius. This gives us the idea that

$$\boxed{\textbf{Volume of a Sphere} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

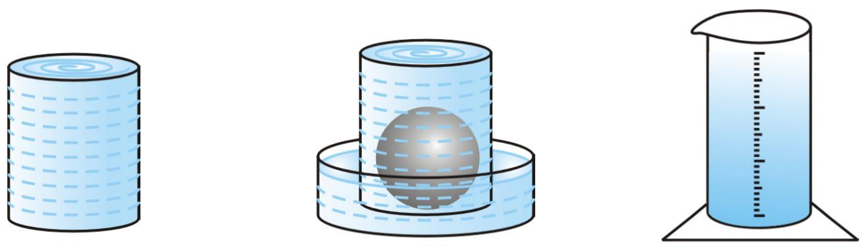
where r is the radius of the sphere.

Later, in higher classes it can be proved also. But at this stage, we will just take it as true.

11.4 గోళం ఘనపరిమాణం

ఇప్పుడు, గోళం ఘనపరిమాణాన్ని ఎలా కొలవాలో చూద్దాం. ముందుగా, వేర్వేరు వ్యాసార్థాల రెండు లేదా మూడు గోళాలను తీసుకోండి, మరియు గోళాలను ఒక్కొక్కటిగా ఉంచగలిగేంత పెద్ద పాత్రను తీసుకోండి. అలాగే, మీరు పాత్రను ఉంచగల పెద్ద తొట్టిని తీసుకోండి. తర్వాత పాత్ర అంచు వరకు నీటితో నింపండి. (పటం 11.13 (a) చూడండి).

ఇప్పుడు, గోళాలలో ఒకదాన్ని పాత్రలో జాగ్రత్తగా ఉంచండి. పాత్ర నుండి కొంత నీరు అది ఉంచబడిన తొట్టిలోకి పొర్లుతుంది.(పటం 11.13(b) చూడండి). తొట్టి నుండి నీటిని, కొలజాడి (కొలతలు గల స్థూపాకార కూజా) లోకి జాగ్రత్తగా పొయ్యండి. మరియు పొర్లిన నీటిని కొలవండి (పటం 11.13(c) చూడండి). మునిగిపోయిన గోళం యొక్క వ్యాసార్థం r అనుకుందాం. (మీరు గోళం వ్యాసం కొలవడం ద్వారా వ్యాసార్థం కనుగొనవచ్చు). అప్పుడు $\frac{4}{3}\pi r^3$ ను లెక్కించండి. పొర్లిన నీటి ఘనపరిమాణం దాదాపుగా ఈ విలువకు సమానమని మీరు కనుగొన్నారా?



పటం. 11.13

వేర్వేరు పరిమాణాలు గల గోళాలతో, ఇప్పుడు చేయబడ్డ ప్రక్రియను మరోసారి పునరావృతం చేయండి. ఈ గోళం యొక్క వ్యాసార్థం R కనుక్కోండి మరియు $\frac{4}{3}\pi R^3$ యొక్క విలువను గణించండి. మరోసారి ఈ విలువ స్థానభ్రంశం చెందిన (పొర్లి పోయిన) నీటి ఘనపరిమాణం యొక్క కొలతకు సుమారుగా సమానం. ఇది మనకు ఏమి చెబుతుంది? గోళం ఘన పరిమాణం దాని ద్వారా స్థానభ్రంశం చేయబడిన నీటి ఘనపరిమాణం కొలతకు సమానమని మనకు తెలుసు. వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు గల గోళాలతో ఈ ప్రయోగాన్ని పదేపదే చేయడం ద్వారా, మనం అదే ఫలితాన్ని పొందుతున్నాము, అవి గోళం యొక్క ఘనపరిమాణం దాని వ్యాసార్థం యొక్క ఘనానికి $\frac{4}{3}\pi$ రెట్లు సమానం. ఇది క్రింది ఆలోచనను కలిగిస్తుంది.

$$\boxed{\textbf{గోళం ఘనపరిమాణం} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

ఇందులో, r అనేది గోళం వ్యాసార్థం.

తరువాత ఉన్నత తరగతులలో కూడా దీనిని నిరూపించవచ్చు. కానీ ఈ దశలో నిజం అని తీసుకుంటాం.

Since a hemisphere is half of a sphere, can you guess what the volume of a hemisphere will be? Yes, it is $\frac{1}{2}$ of $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

So, $\boxed{\textbf{Volume of a Hemisphere} = \frac{2}{3}\pi r^3}$

where r is the radius of the hemisphere.

Let us take some examples to illustrate the use of these formulae.

Example 10 : Find the volume of a sphere of radius 11.2 cm.

Solution : Required volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ cm}^3 = 5887.32 \text{ cm}^3$$

Example 11 : A shot-putt is a metallic sphere of radius 4.9 cm. If the density of the metal is 7.8 g per cm^3, find the mass of the shot-putt.

Solution : Since the shot-putt is a solid sphere made of metal and its mass is equal to the product of its volume and density, we need to find the volume of the sphere.

Now, volume of the sphere = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$$= 493 \text{ cm}^3 \text{ (nearly)}$$

Further, mass of 1 cm^3 of metal is 7.8 g.

Therefore, mass of the shot-putt = 7.8×493 g

$$= 3845.44 \text{ g} = 3.85 \text{ kg (nearly)}$$

Example 12 : A hemispherical bowl has a radius of 3.5 cm. What would be the volume of water it would contain?

Solution : The volume of water the bowl can contain

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3 = 89.8 \text{ cm}^3$$

ఒక అర్ధగోళం, గోళంలో సగభాగం కనుక, దాని ఘనపరిమాణం ఎంత ఉంటుందో మీరు ఊహించగలరా? అవును, ఇది $\frac{4}{3}\pi r^3$ లో $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$.

కాబట్టి, $\boxed{\textbf{అర్ధ గోళం ఘనపరిమాణం} = \frac{2}{3}\pi r^3}$

ఇందులో r అనేది అర్ధగోళం వ్యాసార్థం.

ఈ సూత్రాల ఉపయోగాన్ని వివరించడానికి కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 10 : వ్యాసార్థం 11.2 సెం.మీ. గల గోళం యొక్క ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన : అవసరమైన ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ ఘ.సెం.మీ.} = 5887.32 \text{ ఘ.సెం.మీ.}$$

ఉదాహరణ 11: షాట్‌పుట్ అనేది 4.9 సెం.మీ. వ్యాసార్థం కలిగిన లోహపు గోళం. లోహం సాంద్రత 7.8 గ్రా./ఘ.సెం.మీ. అయితే షాట్‌పుట్ ద్రవ్యరాశి కనుక్కోండి.

సాధన : షాట్‌పుట్ అనేది లోహంతో తయారు చేయబడిన ఒక ఘన గోళం కావున దాని ద్రవ్యరాశి, దాని ఘనపరిమాణం మరియు సాంద్రత యొక్క లబ్ధమునకు సమానం. కాబట్టి మనం గోళం ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోవలసి ఉంటుంది.

ఇప్పుడు, గోళం ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ ఘ.సెం.మీ.}$$

$$= 493 \text{ ఘ.సెం.మీ. (సుమారుగా)}$$

ఇంకా, లోహం 1 ఘ.సెం.మీ. ద్రవ్యరాశి 7.8 గ్రా.

కాబట్టి, షాట్‌పుట్ ద్రవ్యరాశి $= 7.8 \times 493$ గ్రా.

$$= 3845.44 \text{ గ్రా.} = 3.85 \text{ కి.గ్రా. (సుమారుగా)}$$

ఉదాహరణ 12 : ఒక అర్ధగోళాకార గిన్నె 3.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థం కలిగివుంది. దానిలో ఉండే నీటి ఘనపరిమాణం ఎంత?

సాధన : గిన్నెలో ఉండే నీటి ఘనపరిమాణం

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ ఘ.సెం.మీ.} = 89.8 \text{ ఘ.సెం.మీ.}$$

EXERCISE 11.4

Assume $\pi = \frac{22}{7}$, unless stated otherwise.

1. Find the volume of a sphere whose radius is
   (i) 7 cm (ii) 0.63 m
2. Find the amount of water displaced by a solid spherical ball of diameter
   (i) 28 cm (ii) 0.21 m
3. The diameter of a metallic ball is 4.2 cm. What is the mass of the ball, if the density of the metal is 8.9 g per cm^3?
4. The diameter of the moon is approximately one-fourth of the diameter of the earth. What fraction of the volume of the earth is the volume of the moon?
5. How many litres of milk can a hemispherical bowl of diameter 10.5 cm hold?
6. A hemispherical tank is made up of an iron sheet 1 cm thick. If the inner radius is 1 m, then find the volume of the iron used to make the tank.
7. Find the volume of a sphere whose surface area is 154 cm^2.
8. A dome of a building is in the form of a hemisphere. From inside, it was white-washed at the cost of ₹ 4989.60. If the cost of white-washing is ₹ 20 per square metre, find the
   (i) inside surface area of the dome, (ii) volume of the air inside the dome.
9. Twenty seven solid iron spheres, each of radius r and surface area S are melted to form a sphere with surface area S′. Find the
   (i) radius r' of the new sphere, (ii) ratio of S and S′.
10. A capsule of medicine is in the shape of a sphere of diameter 3.5 mm. How much medicine (in mm^3) is needed to fill this capsule?

11.5 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. **Curved surface area of a cone = πrl**
2. **Total surface area of a right circular cone = $\pi rl + \pi r^2$, i.e., $\pi r(l + r)$**
3. **Surface area of a sphere of radius $r = 4\pi r^2$**
4. **Curved surface area of a hemisphere = $2\pi r^2$**
5. **Total surface area of a hemisphere = $3\pi r^2$**
6. **Volume of a cone = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$**
7. **Volume of a sphere of radius $r = \frac{4}{3}\pi r^3$**
8. **Volume of a hemisphere = $\frac{2}{3}\pi r^3$**

[Here, letters l, b, h, a, r, etc. have been used in their usual meaning, depending on the context.]

అభ్యాసం 11.4

మరోవిధంగా పేర్కొనబడనంతవరకు, $\pi = \frac{22}{7}$ గా భావించండి.

1. క్రింది వ్యాసార్ధం కలిగిన గోళం ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.
   (i) 7 సెం.మీ. (ii) 0.63 మీ.
2. క్రింది వ్యాసం కలిగిన ఒక ఘన గోళాకార బంతి ద్వారా స్థానభ్రంశం చెందిన నీటి పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.
   (i) 28 సెం.మీ. (ii) 0.21 మీ.
3. ఒక లోహపు బంతి వ్యాసం 4.2 సెం.మీ. లోహం సాంద్రత 8.9 గ్రా./ఘ.సెం.మీ. అయితే బంతి ద్రవ్యరాశి ఎంత?
4. చంద్రుని వ్యాసం భూమి వ్యాసంలో సుమారు నాలుగవ వంతు ఉంటుంది. భూమి ఘనపరిమాణంలో చంద్రుని ఘనపరిమాణం ఎంత భాగం?
5. 10.5 సెం.మీ. వ్యాసం కలిగిన ఒక అర్ధగోళాకార గిన్నెలో ఎన్ని లీటర్ల పాలను నింపగలరు?
6. ఒక అర్ధగోళాకార ట్యాంకును 1 సెం.మీ. మందం గల ఇనుప రేకుతో తయారుచేసారు. లోపలి వ్యాసార్ధం 1 మీ. అయితే ట్యాంకును తయారుచేయడానికి ఉపయోగించే ఇనుము ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.
7. ఉపరితల వైశాల్యం 154 చ.సెం.మీ. గల గోళం ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.
8. భవనం గోపురం అర్ధగోళం రూపంలో ఉంది. లోపలి నుండి తెల్ల సున్నం వేయడానికి ₹4989.60 ఖర్చు అయ్యింది. తెల్ల సున్నం వేయడానికి ఒక చ.మీ. కు ₹20 చొప్పున ఖర్చు అయితే
   (i) గోపురం లోపలి ఉపరితల వైశాల్యం (ii) గోపురం లోపలి గాలి ఘనపరిమాణాలను కనుక్కోండి.
9. r వ్యాసార్ధం , S ఉపరితల వైశాల్యం కలిగిన ఇరవై ఏడు ఘన లోహపు గోళాలను కరిగించి S′ ఉపరితల వైశాల్యం కలిగిన గోళంగా ఏర్పరిచారు. వీటిని కనుక్కోండి.
   (i) కొత్త గోళం యొక్క వ్యాసార్ధం r' (ii) S మరియు S′ యొక్క నిష్పత్తి
10. ఔషధం యొక్క ఒక క్యాప్సూల్ 3.5 మి.మీ. వ్యాసం కలిగిన గోళాకారంలో ఉంది. క్యాప్సూల్‌లో నింపడానికి ఎంత ఔషదం (ఘ.మి.మీ.లలో) అవసరం అవుతుంది.

11.5 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. **శంఖువు వక్రతల వైశాల్యం $= \pi r l$**
2. **ఒక క్రమ వృత్తాకార శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi r l + \pi r^2$, అంటే, $\pi r (l + r)$**
3. **r వ్యాసార్ధం కలిగిన గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$**
4. **ఒక అర్ధగోళం వక్రతల వైశాల్యం $= 2\pi r^2$**
5. **ఒక అర్ధగోళం సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 3\pi r^2$**
6. **శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$**
7. **r వ్యాసార్ధం కలిగిన గోళం ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$**
8. **అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3$**

[ఇక్కడ, అక్షరాలు l, b, h, a, r మొదలైనవి సందర్భాన్ని బట్టి వాటి యొక్క సాధారణ అర్ధంలో ఉపయోగించబడ్డాయి.]

0962CH14

CHAPTER 12

STATISTICS

12.1 Graphical Representation of Data

The representation of data by tables has already been discussed. Now let us turn our attention to another representation of data, i.e., the graphical representation. It is well said that one picture is better than a thousand words. Usually comparisons among the individual items are best shown by means of graphs. The representation then becomes easier to understand than the actual data. We shall study the following graphical representations in this section.

(A) Bar graphs

(B) Histograms of uniform width, and of varying widths

(C) Frequency polygons

(A) Bar Graphs

In earlier classes, you have already studied and constructed bar graphs. Here we shall discuss them through a more formal approach. Recall that a bar graph is a pictorial representation of data in which usually bars of uniform width are drawn with equal spacing between them on one axis (say, the x-axis), depicting the variable. The values of the variable are shown on the other axis (say, the y-axis) and the heights of the bars depend on the values of the variable.

Example 1 : In a particular section of Class IX, 40 students were asked about the months of their birth and the following graph was prepared for the data so obtained:

Q4B5T8

అధ్యాయం 12

సాంఖ్యక శాస్త్రం

12.1 దత్తాంశం యొక్క రేఖా చిత్ర ప్రదర్శన

దత్తాంశంను పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికల ద్వారా వ్యక్తపరచుట గురించి ఇదివరకే చర్చించాం. ఇప్పుడు మన ఆలోచనలను దత్తాంశాన్ని మరొక పద్ధతిలో ప్రదర్శించడం వైపుకు మరలిద్దాం. అదే రేఖాచిత్రాలలో దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శించడం. వేల పదాల కన్నా ఒక చిత్రం గొప్పది అనేది నానుడి. సాధారణంగా వ్యక్తిగత రాశుల మధ్య ఉన్న పోలికలను అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ రేఖా చిత్రాలు బాగా ఉపయోగపడతాయి. అసలు దత్తాంశం కంటే ఈ చిత్ర ప్రదర్శన ద్వారా సులభంగా అర్థం చేసుకుంటారు. ఈ క్రింది రేఖా చిత్ర ప్రదర్శనల గురించి ఇప్పుడు చర్చిద్దాం.

(A) కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు

(B) సమాన వెడల్పు, వేర్వేరు వెడల్పులు గల సోపాన చిత్రాలు

(C) పౌనఃపున్య బహుభుజి

(A) కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు

క్రింది తరగతులలో, మీరు కమ్మీ చిత్రాలను అధ్యయనం చేశారు మరియు నిర్మించారు. ఈ తరగతిలో మరింత క్షుణ్ణంగా కమ్మీ రేఖా చిత్రం సాధారణంగా సమాన వెడల్పుగల కమ్మీలను, వాటి మధ్య సమాన అంతరం ఉండునట్లు ఒక అక్షం (x - అక్షం అనుకోండి) పై చరరాశిని సూచించే రేఖాచిత్ర ప్రదర్శన అని గుర్తుచేసుకుందాం. మరొక అక్షం (y – అక్షం అనుకోండి)పై సూచించు చరరాశి విలువలు మరియు కమ్మీల పొడవులు చరరాశి విలువలపై ఆధారపడి ఉండును.

ఉదాహరణ 1 : 9వ తరగతిలోని ఒక సెక్షన్ నందు 40 మంది విద్యార్థుల యొక్క పుట్టిన నెలలను అడిగి, వచ్చిన దత్తాంశంతో క్రింది రేఖా చిత్రం తయారు చేయడం జరిగింది.

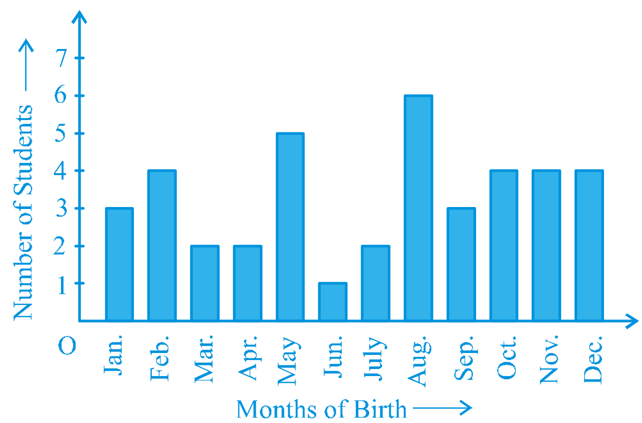


Fig. 12.1

Observe the bar graph given above and answer the following questions:

(i) How many students were born in the month of November?

(ii) In which month were the maximum number of students born?

Solution : Note that the variable here is the 'month of birth', and the value of the variable is the 'Number of students born'.

(i) 4 students were born in the month of November.

(ii) The Maximum number of students were born in the month of August.

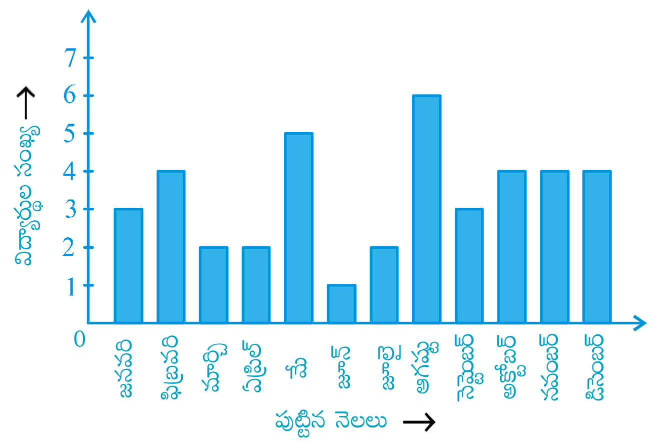
Let us now recall how a bar graph is constructed by considering the following example.

Example 2 : A family with a monthly income of ₹ 20,000 had planned the following expenditures per month under various heads:

Table 12.1

Heads	Expenditure (in thousand rupees)
Grocery	4
Rent	5
Education of children	5
Medicine	2
Fuel	2
Entertainment	1
Miscellaneous	1

Draw a bar graph for the data above.



పటం. 12.1

పై రేఖాచిత్రాన్ని పరిశీలించి ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

(i) నవంబర్ నెలలో ఎంత మంది విద్యార్థులు జన్మించారు?

(ii) ఏ నెలలో విద్యార్థులు అత్యధిక సంఖ్యలో జన్మించారు.

సాధన : పుట్టిన నెలను చరరాశిగా, గుర్తించి 'పుట్టిన విద్యార్థుల సంఖ్య'ను ఆ చరరాశి యొక్క విలువ అని గమనించండి.

(i) నవంబర్ నెలలో నలుగురు విద్యార్థులు జన్మించారు.

(ii) ఆగస్టు నెలలో విద్యార్థులు గరిష్ఠంగా జన్మించారు.

ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా కమ్మీ రేఖా చిత్ర నిర్మాణాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

ఉదాహరణ 2 : నెలసరి ఆదాయం ₹ 20,000 గా గల ఒక కుటుంబం వివిధ అంశాల క్రింద చేయు ఖర్చులకు క్రింది విధంగా ప్రణాళికను రూపొందించుకుంది.

పట్టిక 12.1

అంశాలు	ఖర్చు (వేల రూపాయలలో)
కిరాణా సరుకులు	4
ఇంటి అద్దె	5
పిల్లల విద్య	5
మందులు	2
ఇంధనం	2
వినోదం	1
ఇతరములు	1

పై దత్తాంశానికి కమ్మీరేఖా చిత్రం గీయండి.

Solution : We draw the bar graph of this data in the following steps. Note that the unit in the second column is thousand rupees. So, '4' against 'grocery' means ₹ 4000.

1. We represent the Heads (variable) on the horizontal axis choosing any scale, since the width of the bar is not important. But for clarity, we take equal widths for all bars and maintain equal gaps in between. Let one Head be represented by one unit.
2. We represent the expenditure (value) on the vertical axis. Since the maximum expenditure is ₹ 5000, we can choose the scale as 1 unit = ₹ 1000.
3. To represent our first Head, i.e., grocery, we draw a rectangular bar with width 1 unit and height 4 units.
4. Similarly, other Heads are represented leaving a gap of 1 unit in between two consecutive bars.

The bar graph is drawn in Fig. 12.2.

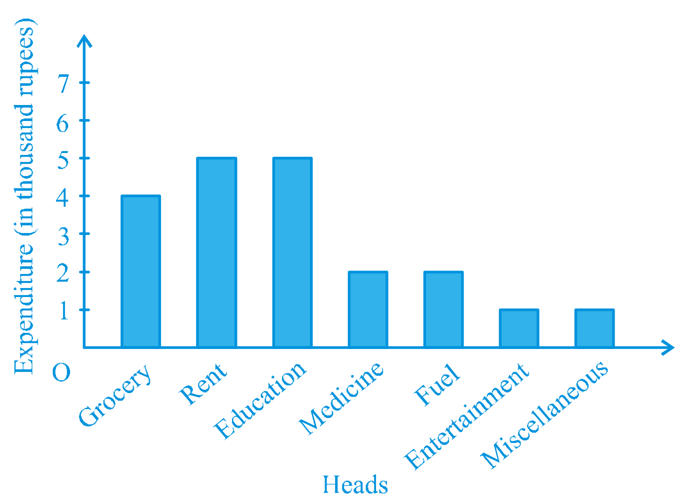


Fig. 12.2

Here, you can easily visualise the relative characteristics of the data at a glance, e.g., the expenditure on education is more than double that of medical expenses. Therefore, in some ways it serves as a better representation of data than the tabular form.

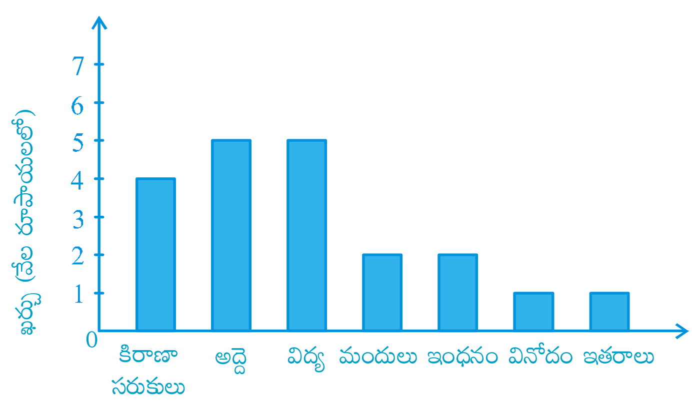
Activity 1 : Continuing with the same four groups of Activity 1, represent the data by suitable bar graphs.

Let us now see how a frequency distribution table for *continuous* class intervals can be represented graphically.

సాధన : పై దత్తాంశానికి కమ్మీ రేఖా చిత్రాలను ఈ క్రింది సోపానాల ద్వారా నిర్మిద్దాం. పై పట్టికలో రెండవ గడిలో ఖర్చు వేల రూ॥లలో ఇవ్వడం జరిగినది. అనగా సరుకుల ఎదురుగా '4' అంటే కిరాణా ₹ 4000 అని అర్థం.

1. కమ్మీ వెడల్పుకు ప్రాముఖ్యత లేనందున మనం అంశాలను (చరరాశులను) క్షితిజ సమాంతర రేఖపై ఏదేని స్కేలుతో సూచిస్తాం. కానీ అన్ని కమ్మీలు ఒకే వెడల్పులో ఉండే విధంగా మరియు కమ్మీల మధ్య ఉన్న ఖాళీలు సమానంగా ఉండే విధంగా చూడాలి. ఒక అంశం ఒక యూనిట్ సూచించునని అనుకుందాం.
2. ఖర్చు వివరాలను లంబరేఖపై (y - అక్షం) తీసుకోవాలి. గరిష్ఠ ఖర్చు ₹ 5000, అయినందున స్కేలు 1 యూనిట్‌కి $=$ ₹ 1000 గా తీసుకోవాలి.
3. మొదటి అంశం కిరాణాను కమ్మీచిత్రంలో చూపుటకు వెడల్పు 1యూనిట్ మరియు ఎత్తు 4 యూనిట్‌లు ఉండే విధంగా దీర్ఘచతురస్రాకార కమ్మీలను గీయాలి.
4. అదే విధంగా, ఇతర అంశాలను కూడ కమ్మీల మధ్య ఖాళీ 1 యూనిట్ ఉండే విధంగా వరుసగా దీర్ఘచతురస్రాకార కమ్మీలను గీయాలి.

కమ్మీ రేఖా చిత్రం పటం 12.2లో గీయబడింది.



పటం. 12.2

ఇక్కడ మీరు దత్తాంశాల సాపేక్ష ధర్మాలను చూడగానే దృశీకరణ చేసుకోగలరు. పై కమ్మీ చిత్రం ద్వారా ఏఏ అంశాలకు ఎంత ఖర్చు చేసారో అనే విషయాలను చూడగానే గుర్తించగలుగుతారు. ఉదా॥ విద్యపై ఖర్చు వైద్యం ఖర్చు కన్నా రెండింతల ఎక్కువగా ఉంది. కాబట్టి కొన్ని సందర్భాలలో దత్తాంశం విభజన పట్టిక రూపంలో కంటే కమ్మీరేఖా చిత్రంలో చూపడం మంచి దత్తాంశ ప్రదర్శనా పద్ధతి అవుతుంది.

కృత్యం 1 : కృత్యం 1 లో ఉన్న నాలుగు సమూహాలతో ఇచ్చిన దత్తాంశానికి అనువైన కమ్మీ చిత్రంలో చూపించండి?

పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో మినహాయింపు తరగతి అంతరాలను రేఖాచిత్రంలో చూపుటను ఇప్పుడు మనం తెలుసుకుందాం.

(B) Histogram

This is a form of representation like the bar graph, but it is used for continuous class intervals. For instance, consider the frequency distribution Table 12.2, representing the weights of 36 students of a class:

Table 12.2

Weights (in kg)	Number of students
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
Total	36

Let us represent the data given above graphically as follows:

(i) We represent the weights on the horizontal axis on a suitable scale. We can choose the scale as 1 cm = 5 kg. Also, since the first class interval is starting from 30.5 and not zero, we show it on the graph by marking a *kink* or a break on the axis.

(ii) We represent the number of students (frequency) on the vertical axis on a suitable scale. Since the maximum frequency is 15, we need to choose the scale to accomodate this maximum frequency.

(iii) We now draw rectangles (or rectangular bars) of width equal to the class-size and lengths according to the frequencies of the corresponding class intervals. For example, the rectangle for the class interval 30.5 - 35.5 will be of width 1 cm and length 4.5 cm.

(iv) In this way, we obtain the graph as shown in Fig. 12.3:

(B) సోపానచిత్రం (హిస్టోగ్రామ్)

ఇది కూడా కమ్మీ రేఖాచిత్రాల మాదిరిగానే దత్తాంశ ప్రదర్శనా పద్ధతి. కానీ, దీనిలో మినహాయింపు తరగతి అంతరాలను ఉపయోగిస్తారు. ఉదాహరణకు ఈ కిందనీయబడిన పౌనపున్య విభాజన పట్టిక 12.2లో 36 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడ్డాయి.

పట్టిక 12.2

విద్యార్థుల బరువు (కి.గ్రాలలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
మొత్తం	36

పైన ఇచ్చిన దత్తాంశం ఈ క్రింది విధంగా రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపుదాం:

(i) బరువులను క్షితిజ సమాంతర అక్షంపై అనువైన స్కేలుతో మనం సూచిస్తాం. మనం స్కేలు 1సెం.మీ. = 5 కి.గ్రా. నిర్ణయిస్తాం. మొదటి తరగతి అంతరం '0' నుండి కాకుండా 30.5 నుండి ప్రారంభం అవుతుంది. కావున దీనిని గ్రాఫ్‌లో అక్షంపై *కింక్* (జిగ్‌జాగ్‌రేఖ) ద్వారా చూపుతాం.

(ii) మనం విద్యార్థుల సంఖ్యను (పౌనఃపున్యంను) నిలువు అక్షంపై అనువైన స్కేలుతో సూచిస్తాం . గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం 15 కావున మనం ఈ గరిష్ఠ పౌనఃపున్యాన్ని అనుసరించి స్కేలును నిర్ధారించవలెను.

(iii) ఇపుడు మనం తరగతి పొడవుకు సమానమైన వెడల్పు మరియు అనురూప తరగతుల పౌనఃపున్యాలకు అనుగుణంగా పొడవులు గల దీర్ఘచతురస్రాలు (లేదా దీర్ఘచతురస్రాకార కమ్మీలు) గీయాలు. ఉదాహరణకు తరగతి అంతరం 30.5 – 35.5 అయిన దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పు 1 సెం.మీ. మరియు 4.5 సెం.మీ. గా ఉంటుంది.

(iv) పై విధంగా చేయటం వలన పటం 12.3లో నిర్మించిన గ్రాఫ్‌ను పొందగలం:

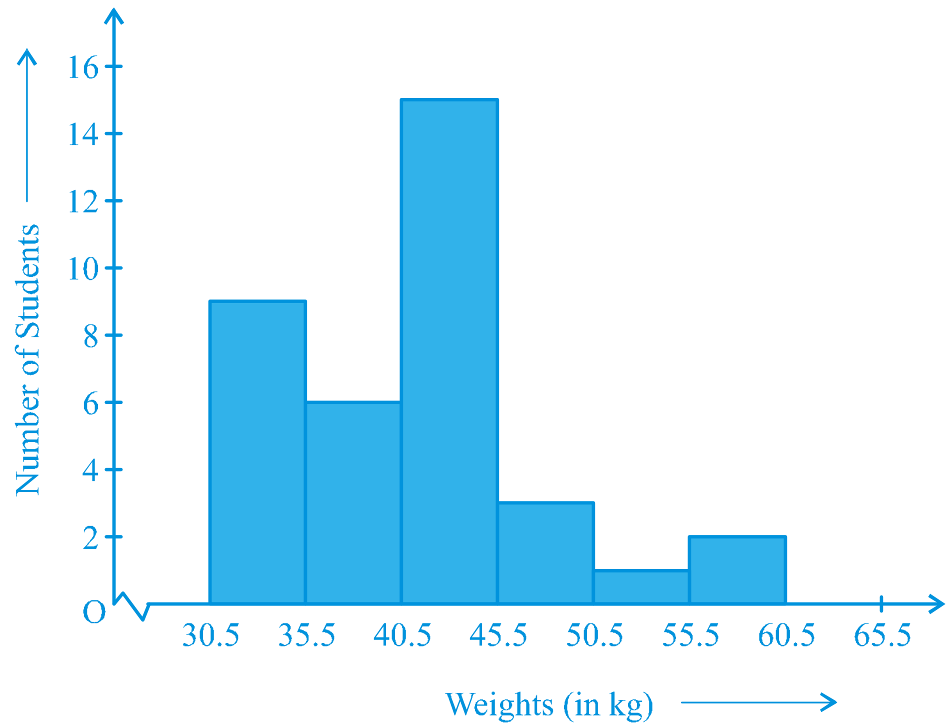


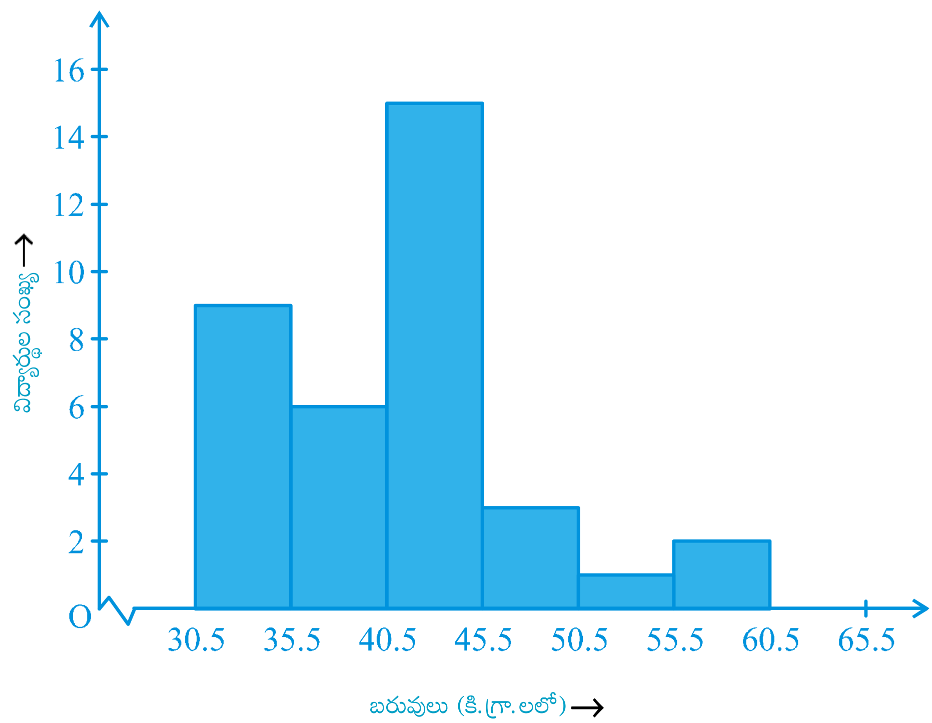
Fig. 12.3

Observe that since there are no gaps in between consecutive rectangles, the resultant graph appears like a solid figure. This is called a *histogram*, which is a graphical representation of a grouped frequency distribution with continuous classes. Also, unlike a bar graph, the width of the bar plays a significant role in its construction.

Here, in fact, areas of the rectangles erected are proportional to the corresponding frequencies. However, since the widths of the rectangles are all equal, the lengths of the rectangles are proportional to the frequencies. That is why, we draw the lengths according to (iii) above.

Now, consider a situation different from the one above.

Example 3 : A teacher wanted to analyse the performance of two sections of students in a mathematics test of 100 marks. Looking at their performances, she found that a few students got under 20 marks and a few got 70 marks or above. So she decided to group them into intervals of varying sizes as follows: 0 - 20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100. Then she formed the following table:



పటం. 12.3

వరుస దీర్ఘ చతురస్రాల మధ్య ఖాళీ లేకుండుట వలన, ఫలితంగా రేఖాచిత్రం ఘనచిత్రంగా కనిపిస్తుంది. దీనినే సోపాన చిత్రం అంటారు. ఇది మినహాయింపు తరగతులతో కూడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనాల యొక్క రేఖా చిత్రం ప్రదర్శన. అదేవిధంగా కమ్మీ చిత్రంవలె కాకుండా కమ్మీ యొక్క వెడల్పు దాని నిర్మాణంలో ముఖ్యమైన పాత్ర పోషిస్తుంది.

దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలు సంబంధిత పౌనఃపున్యాల విలువలకు అనుపాతంలో ఉంటాయి. దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు అన్నీ సమానం, కావున దీర్ఘచతురస్రం పొడవులు సంబంధిత పౌనఃపున్యానికి అనుపాతంలో ఉంటాయి. అందుకని "మనం పొడవులను (iii) ప్రకారం గీస్తాము.

ఇప్పుడు పై పరిస్థితికి భిన్నమైన పరిస్థితిని తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 3 : ఒక ఉపాధ్యాయురాలు 100 మార్కుల గణిత పరీక్షలో రెండు విభాగాల విద్యార్థుల పనితీరును విశ్లేషించాలనుకున్నారు. వారి ప్రతిభను పరిశీలిస్తే కొంతమంది విద్యార్థులు 20 మార్కుల లోపు మరియు మరికొంత మందికి 70 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు వచ్చినట్లు ఆమె గుర్తించింది. కాబట్టి ఆమె వారిని వివిధ పరిమాణాలు 0 - 20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100 తరగతి అంతరాలుగా గల గ్రూపులుగా విభజించాలని నిర్ణయించుకుంది. అప్పుడు ఆమె క్రింది పట్టికను తయారు చేసింది.

Table 12.3

Marks	Number of students
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - above	8
Total	90

A histogram for this table was prepared by a student as shown in Fig. 12.4.

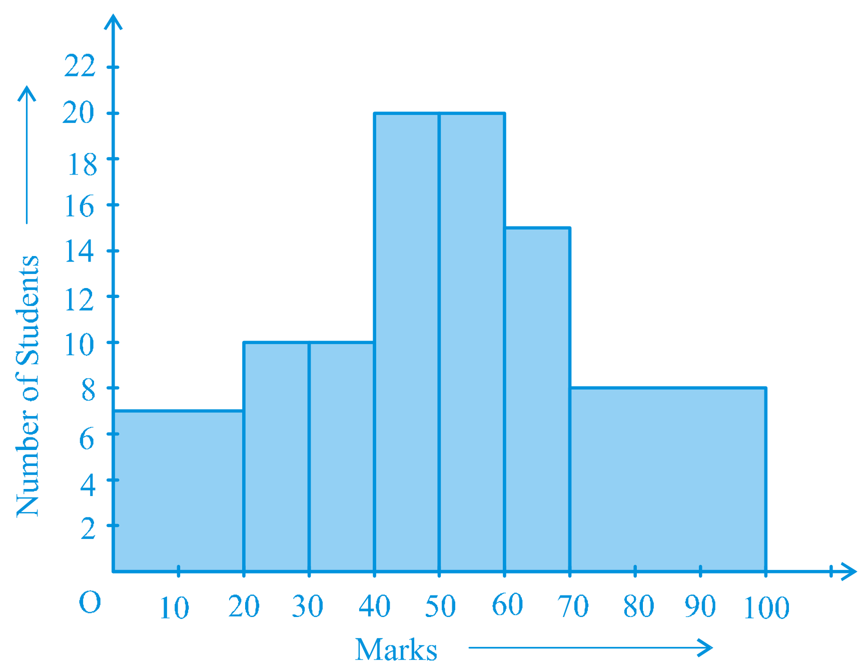


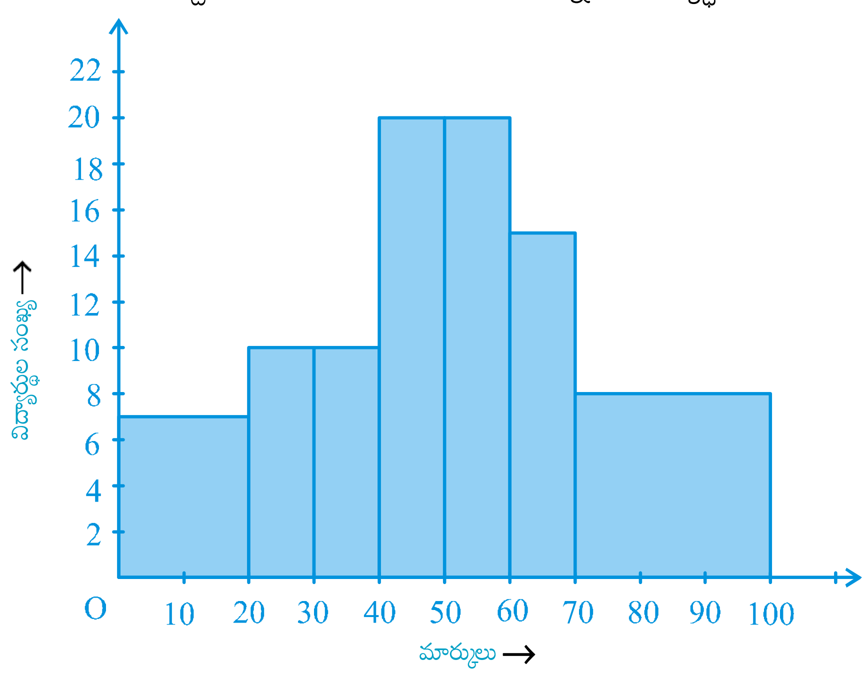
Fig. 12.4

Carefully examine this graphical representation. Do you think that it correctly represents the data? No, the graph is giving us a misleading picture. As we have mentioned earlier, the areas of the rectangles are proportional to the frequencies in a histogram. Earlier this problem did not arise, because the widths of all the rectangles were equal. But here, since the widths of the rectangles are varying, the histogram above does not

పట్టిక 12.3

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - 70 కంటే ఎక్కువ	8
మొత్తం	90

పటం 12.4లో చూపిన విధంగా పట్టికకు సంబంధించిన సోపాన చిత్రాన్ని ఒక విద్యార్థి తయారు చేసాడు.



పటం. 12.4

ఈ రేఖాచిత్ర ప్రాతినిధ్యాన్ని జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి. ఇది దత్తాంశాన్ని సరిగా ప్రాతినిధ్యపరుస్తుందని మీరు అనుకుంటున్నారా? లేదు, రేఖాచిత్రం మనల్ని తప్పుదోవ పట్టించే చిత్రంగా ఉంది. మనం ఇంతకు ముందు పేర్కొన్నట్లుగా దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలు సోపాన చిత్రంలోని పౌనఃపున్యాలకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి. ఇంతకు ముందు ఈ సమస్య రాలేదు. ఎందుకనగా ఈ దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానం. కానీ ఇక్కడ దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు మారుతూ ఉంటాయి. కాబట్టి పైన ఉన్న సోపానరేఖాచిత్రం సరైనది కాదు.

give a correct picture. For example, it shows a greater frequency in the interval 70 - 100, than in 60 - 70, which is not the case.

So, we need to make certain modifications in the lengths of the rectangles so that the areas are again proportional to the frequencies.

The steps to be followed are as given below:

1. Select a class interval with the minimum class size. In the example above, the minimum class-size is 10.

2. The lengths of the rectangles are then modified to be proportionate to the class-size 10.

For instance, when the class-size is 20, the length of the rectangle is 7. So when the class-size is 10, the length of the rectangle will be $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$.

Similarly, proceeding in this manner, we get the following table:

Table 12.4

Marks	**Frequency**	**Width of the class**	**Length of the rectangle**
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 - 100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

ఉదాహరణకు తరగతి అంతరం 60–70 కంటే, తరగతి అంతరం 70 – 100 ఎక్కువ పౌన:పున్యాన్ని చూపుతుంది. పై చిత్రం అలా చూపడం లేదు.

కాబట్టి మనం దీర్ఘచతురస్రాల పొడవులలో కొన్ని మార్పులు చేయాలి. తద్వారా వైశాల్యాలు. తిరిగి పౌనఃపున్యాలకు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

అనుసరించాల్సిన సోపానాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

1. కనీస తరగతి పొడవుతో తరగతి అంతరం ఎంచుకోండి. పై ఉదాహరణలో కనీస తరగతి పొడవు 10.

2. దీర్ఘ చతురస్రాల పొడవులు తరగతి పొడవు 10కి అనుపాతంలో ఉండే విధంగా సవరించబడతాయి.

ఉదాహరణకు, తరగతి పొడవు 20 అయిన దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 7, కాబట్టి తరగతి పొడవు '10' అయినపుడు దీర్ఘచతురస్రం పొడవు $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$

అదే విధంగా, ఈ పద్ధతిలో చేసుకుంటూపోతే క్రింది పట్టికను పొందుతాం.

పట్టిక 12.4

మార్కులు	పౌన:పున్యాలు	తరగతి వెడల్పు	దీర్ఘ చతుస్రం యొక్క పొడవు
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 - 100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

Since we have calculated these lengths for an interval of 10 marks in each case, we may call these lengths as "proportion of students per 10 marks interval".

So, the correct histogram with varying width is given in Fig. 12.5.

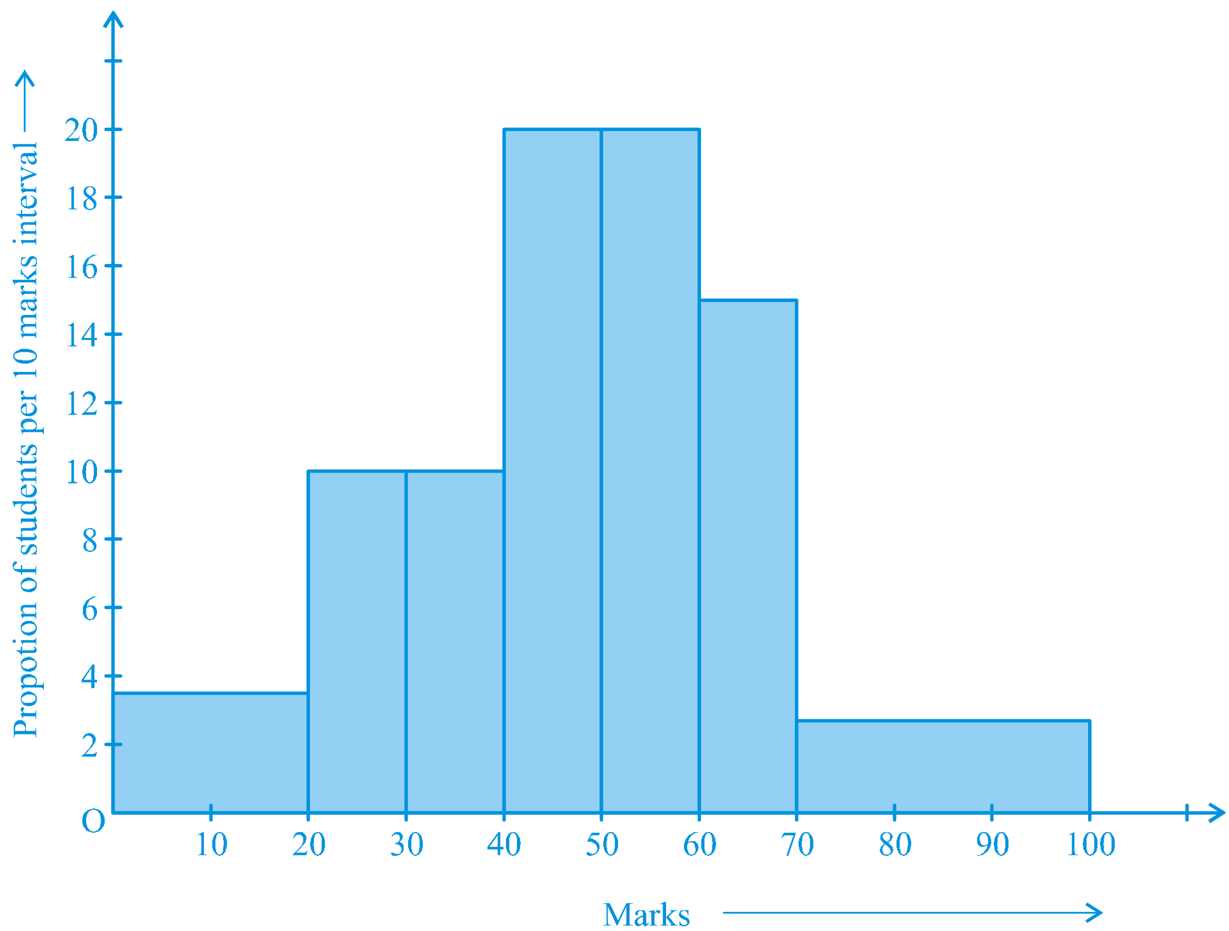


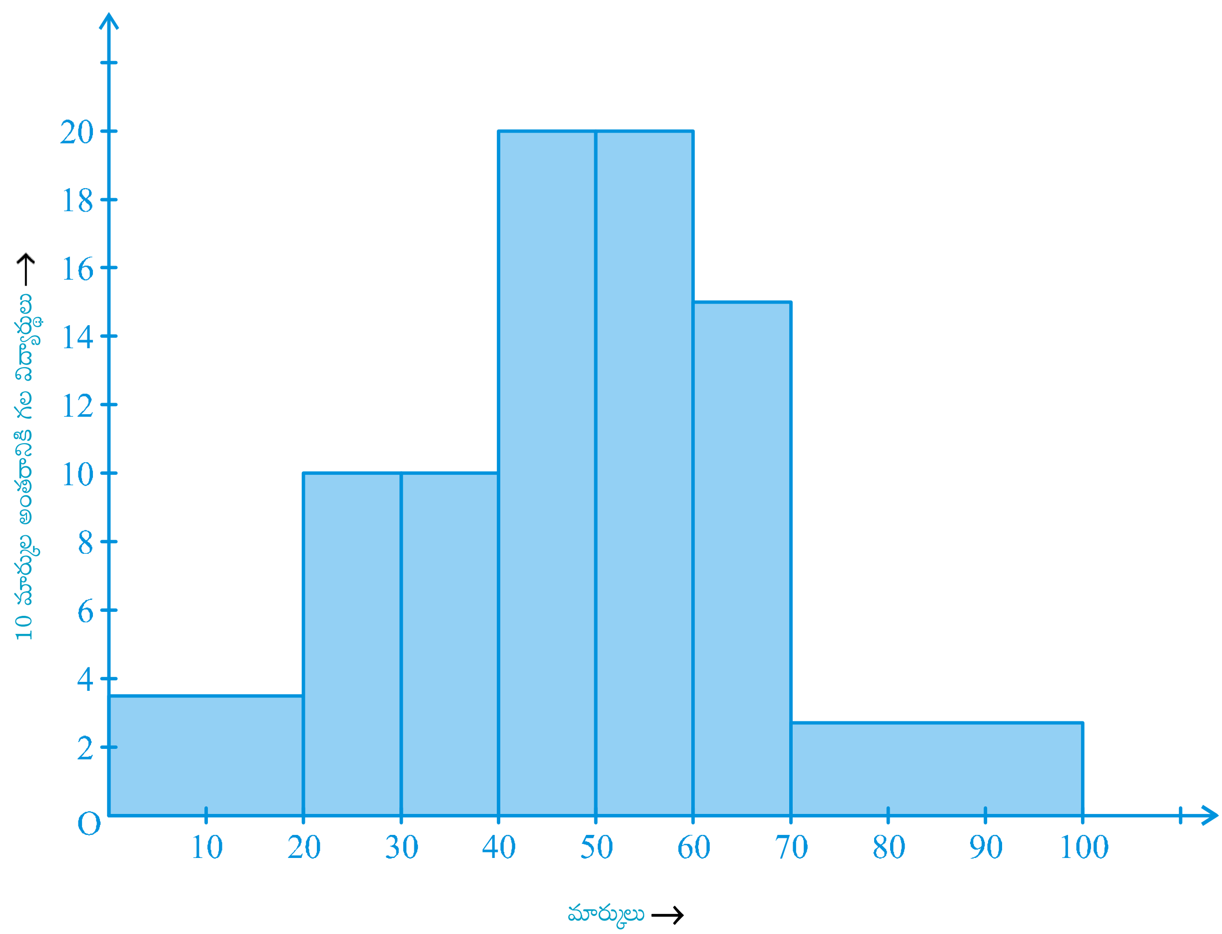
Fig. 12.5

(C) Frequency Polygon

There is yet another visual way of representing quantitative data and its frequencies. This is a polygon. To see what we mean, consider the histogram represented by Fig. 12.3. Let us join the mid-points of the upper sides of the adjacent rectangles of this histogram by means of line segments. Let us call these mid-points B, C, D, E, F and G. When joined by line segments, we obtain the figure BCDEFG (see Fig. 12.6).

ఇక్కడ ప్రతి సందర్భములో తరగతి అంతరము 10 మార్కులుగా తీసుకొని ఈ పొడవులను లెక్కించడం వలన మనము ఈ పొడవులను "10 మార్కుల అంతరానికి గల విద్యార్థుల సంఖ్యకు అనుపాతంలో ఉంటాయని" పిలుస్తాం.

పటం 12.5లో వివిధ వెడల్పులలో సోపాన చిత్రం ఇవ్వబడింది.



పటం. 12.5

(C) పౌనపున్య బహుభుజి

పరిమాణాత్మక దత్తాంశం మరియు వాటి పౌనఃపున్యాలను సూచించుటకు మరొక దృశ్యీకరణ పద్ధతి కూడా ఉంది. ఇది ఒక బహుభుజి. దీనిని అర్థం చేసుకొనుటకు పటం 12.5లో సూచించిన సోపాన చిత్రాన్ని గమనించండి. మనం ఈ సోపాన చిత్రంలో ఆసన్న దీర్ఘచతురస్రాల పై భుజాలపై మధ్య బిందువులను రేఖా ఖండాల సహాయంతో కలుపుదాం. ఈ మధ్యబిందువును B, C, D, E, F మరియు G గా తీసుకుందాం. రేఖాఖండాలలో కలిపినపుడు మనం పటం BCDEFG (పటం 12.6 చూడండి) ను పొందుతాం.

To complete the polygon, we assume that there is a class interval with frequency zero before 30.5 - 35.5, and one after 55.5 - 60.5, and their mid-points are A and H, respectively. ABCDEFGH is the frequency polygon corresponding to the data shown in Fig. 12.3. We have shown this in Fig. 12.6.

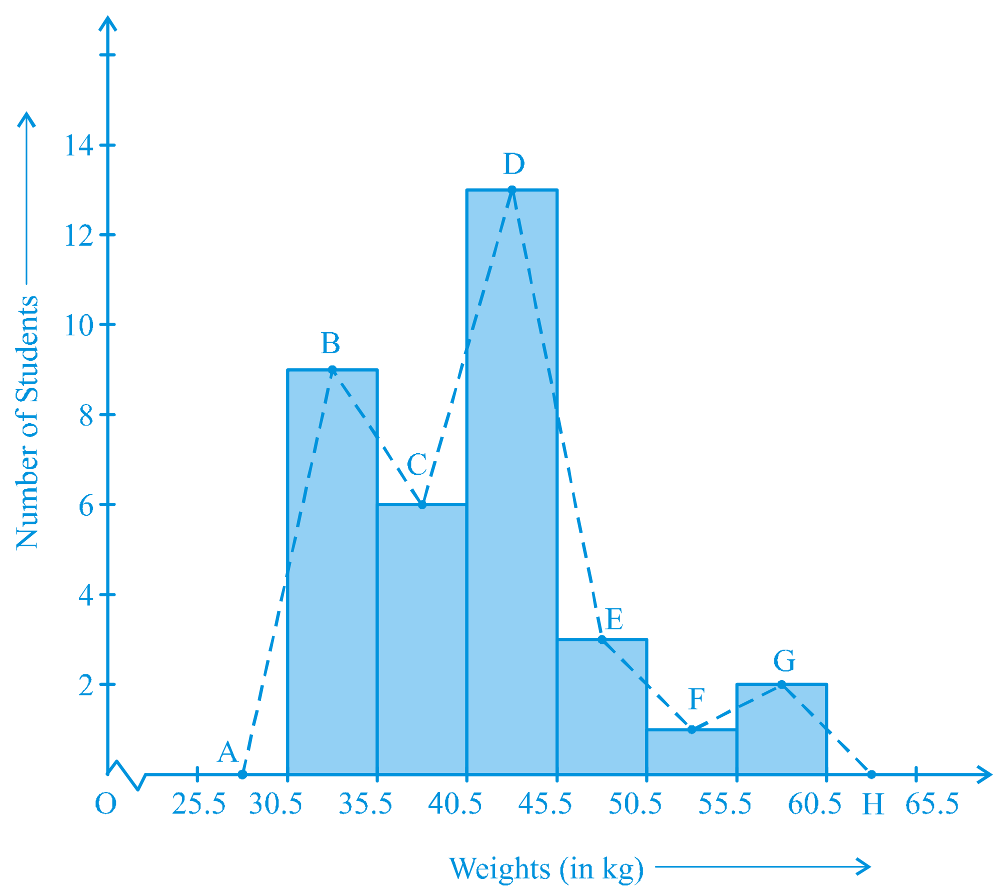
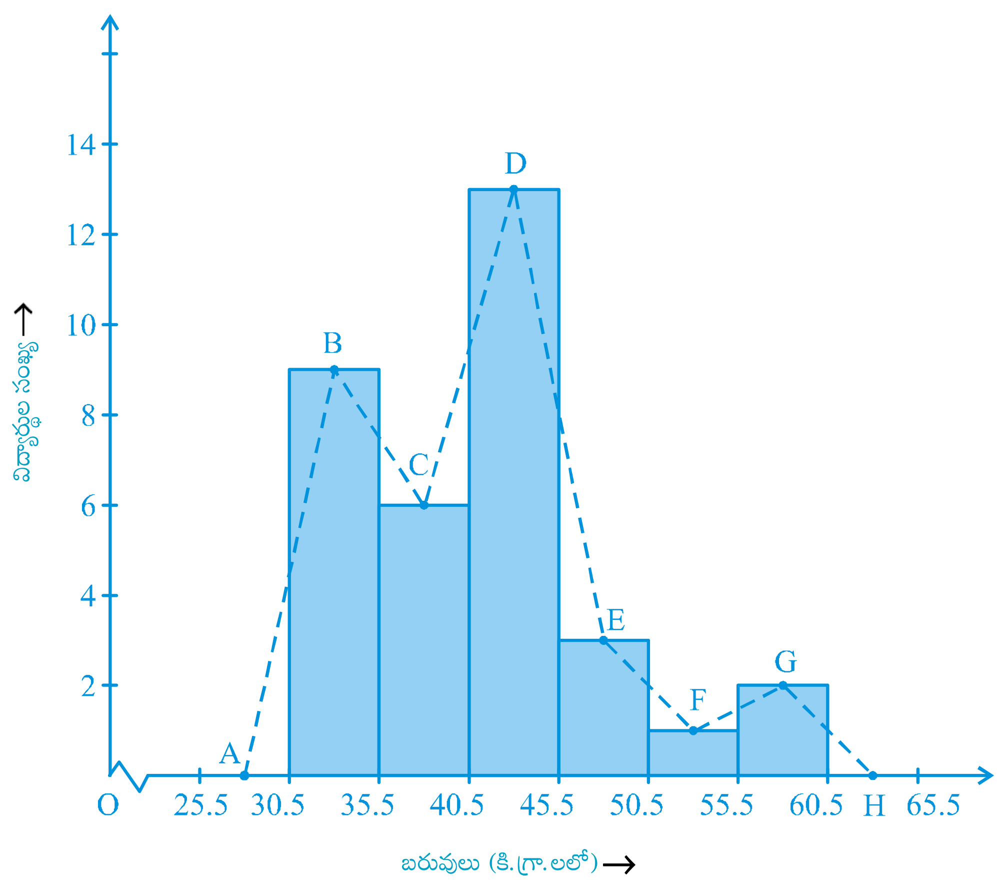


Fig. 12.6

Although, there exists no class preceding the lowest class and no class succeeding the highest class, addition of the two class intervals with zero frequency enables us to make the area of the frequency polygon the same as the area of the histogram. Why is this so? (**Hint :** Use the properties of congruent triangles.)

Now, the question arises: how do we complete the polygon when there is no class preceding the first class? Let us consider such a situation.

బహుభుజిని పూర్తి చేయడానికి, మనం 30.5 – 35.5 కి ముందు మరియు 55.5 – 60.5 కి తర్వాత ఒక తరగతి అంతరం పౌనఃపున్యం '0'గా మరియు వాటి మధ్య బిందువులు వరుసగా A మరియు H లుగా ఊహించుకొందాం. ABCDEFGH అనేది పటం12.5లో చూపిన దత్తాంశానికి సంబంధించిన పౌనఃపున్య బహుభుజి. దీనిని పటం 12.6లో చూపబడినది.



పటం. 12.6

మొదటి తరగతికి ముందు మరియు చివరి తరగతి తర్వాత ఏ తరగతీ లేకున్నప్పటికీ సున్నా పౌనఃపున్యంతో రెండు తరగతి అంతరాలను కలుపడం వలన పౌనఃపున్య బహుభుజి వైశాల్యాన్ని సోపానచిత్రం (Histogram) వైశాల్యంతో సమానంగా ఉండేలా చేస్తుంది. ఇది ఎందుకు? (**సూచన:** సరూప త్రిభుజాల ధర్మాలను ఉపయోగించండి)

ఇప్పుడు, ఒక ప్రశ్న తలెత్తుతుంది. మొదటి తరగతికి ముందు తరగతి లేనప్పుడు మనం బహుభుజిని ఎలా పూర్తి చేయాలి? అటువంటి సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం.

Example 4 : Consider the marks, out of 100, obtained by 51 students of a class in a test, given in Table 12.5.

Table 12.5

Marks	Number of students
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
Total	51

Draw a frequency polygon corresponding to this frequency distribution table.

Solution : Let us first draw a histogram for this data and mark the mid-points of the tops of the rectangles as B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, respectively. Here, the first class is 0-10. So, to find the class preceeding 0-10, we extend the horizontal axis in the negative direction and find the mid-point of the imaginary class-interval (–10) - 0. The first end point, i.e., B is joined to this mid-point with zero frequency on the negative direction of the horizontal axis. The point where this line segment meets the vertical axis is marked as A. Let L be the mid-point of the class succeeding the last class of the given data. Then OABCDEFGHIJKL is the frequency polygon, which is shown in Fig. 12.7.

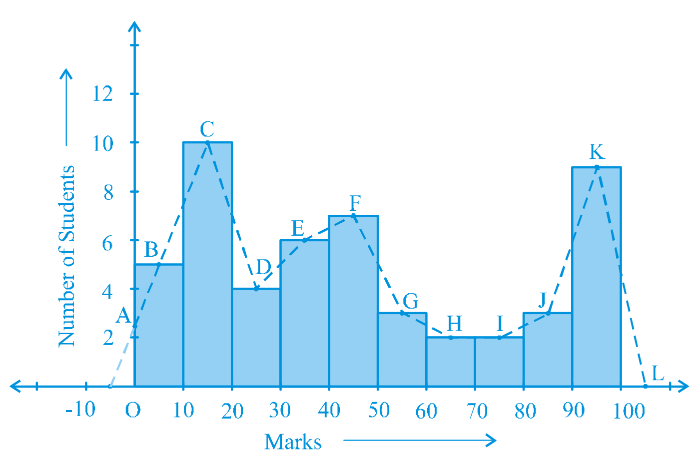


Fig. 12.7

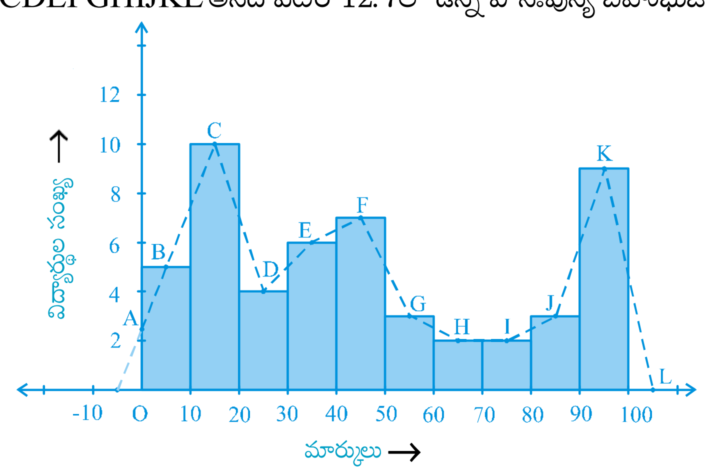
ఉదాహరణ 4 : ఒక పరీక్షలో ఒక తరగతిలోని 51 మంది విద్యార్థులు 100 మార్కులకు పొందిన మార్కులను పట్టిక 12.5లో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక 12.5

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
మొత్తం	51

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికకు అనుగుణంగా పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

సాధన : ముందుగా ఈ దత్తాంశానికి సోపాన చిత్రం (హిస్టోగ్రాము) గీయండి మరియు దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క పై వెడల్పుల యొక్క మధ్య బిందువులను వరుసగా B, C, D, E, F, G, H, I, J, K లుగా గుర్తించండి. ఇక్కడ మొదటి తరగతి 0 – 10. కాబట్టి, 0 – 10 ముందు ఉన్న తరగతిని కనుగొనడానికి, క్షితిజ సమాంతర అక్షాన్ని ఋణాత్మక దిశలో విస్తరింప చేస్తాం మరియు ఊహించిన ముందు తరగతి (–10) - 0 మధ్య బిందువును కనుగొంటాము. మొదట ముగింపు బిందువు అనగా B ని క్షితిజ సమాంతర అక్షం యొక్క ఋణాత్మక దిశలో సున్నా పౌనఃపున్యం గల మధ్య బిందువుతో కలపాలి. ఈ రేఖాఖండం నిలువు అక్షాన్ని కలిపే బిందువు A గా గుర్తించబడింది. L ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క చివరి తరగతి తర్వాత వచ్చే తరగతి మధ్య బిందువుగా ఉంటుంది. అప్పుడు OABCDEFGHIJKL అనేది పటం 12.7లో ఉన్న పౌనఃపున్య బహుభుజిని సూచిస్తుంది.



పటం. 12.7

Frequency polygons can also be drawn independently without drawing histograms. For this, we require the mid-points of the class-intervals used in the data. These mid-points of the class-intervals are called **class-marks**.

To find the class-mark of a class interval, we find the sum of the upper limit and lower limit of a class and divide it by 2. Thus,

$$\textbf{Class-mark} = \frac{\textbf{Upper limit + Lower limit}}{\textbf{2}}$$

Let us consider an example.

Example 5 : In a city, the weekly observations made in a study on the cost of living index are given in the following table:

Table 12.6

Cost of living index	Number of weeks
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
Total	52

Draw a frequency polygon for the data above (without constructing a histogram).

Solution : Since we want to draw a frequency polygon without a histogram, let us find the class-marks of the classes given above, that is of 140 - 150, 150 - 160,....

For 140 - 150, the upper limit = 150, and the lower limit = 140

So, the class-mark = $\frac{150 + 140}{2} = \frac{290}{2} = 145$.

Continuing in the same manner, we find the class-marks of the other classes as well. So, the new table obtained is as shown in the following table:

సోపానచిత్రాలను గీయనవసరం లేకుండానే పౌనఃపున్య బహుభుజిని స్వతంత్రంగా గీయగలం. దీని కొరకు దత్తాంశంలో ఉపయోగించిన తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులు అవసరం. ఈ తరగతి అంతర మధ్య బిందువులను **తరగతి మధ్యవిలువలు** అని పిలుస్తాం.

తరగతి అంతరం యొక్క తరగతి మధ్యవిలువను కనుగొనుటకు ఎగువ అవధి, దిగువ అవధుల మొత్తాన్ని మనం 2తో భాగిస్తాం. ఆ విధంగా,

$$\textbf{తరగతి మధ్యవిలువ} = \frac{\text{ఎగువ అవధి} + \text{దిగువ అవధి}}{2}$$

ఒక ఉదాహరణ తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 5 : ఒక నగరంలో జీవన వ్యయ సూచికపై చేసిన అధ్యయనంలో వారాల వారీగా పరిశీలనలు కింద పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి:

పట్టిక 12.6

జీవన వ్యయ సూచిక	వారాల సంఖ్య
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
మొత్తం	52

పై దత్తాంశానికి పౌనఃపున్య బహుభుజిని (సోపానచిత్రం గీయకనే) గీయండి.

సాధన : సోపాన చిత్రం గీయకుండా పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయాలి అనుకుంటున్నాం కనుక ఇచ్చిన దత్తాంశంలో తరగతి అంతరాలు అంటే 140 - 150, 150 - 160,.... లకు తరగతి మధ్యవిలువలను కనుగొందాం.

140 - 150 నకు ఎగువ అవధి = 150, మరియు దిగువ అవధి = 140

కనుక ఆ తరగతి మధ్యవిలువ $= \dfrac{150 + 140}{2} = \dfrac{290}{2} = 145.$

ఇదే పద్ధతి కొనసాగిస్తూ, మిగిలిన తరగతుల తరగతి మధ్యవిలువలను మనం కనుగొందాం. కనుక పొందిన నూతన పట్టిక, క్రింద చూపబడింది:

Table 12.7

Classes	Class-marks	Frequency
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
Total		52

We can now draw a frequency polygon by plotting the class-marks along the horizontal axis, the frequencies along the vertical-axis, and then plotting and joining the points B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) and G(195, 2) by line segments. We should not forget to plot the point corresponding to the class-mark of the class 130 - 140 (just before the lowest class 140 - 150) with zero frequency, that is, A(135, 0), and the point H (205, 0) occurs immediately after G(195, 2). So, the resultant frequency polygon will be ABCDEFGH (see Fig. 12.8).

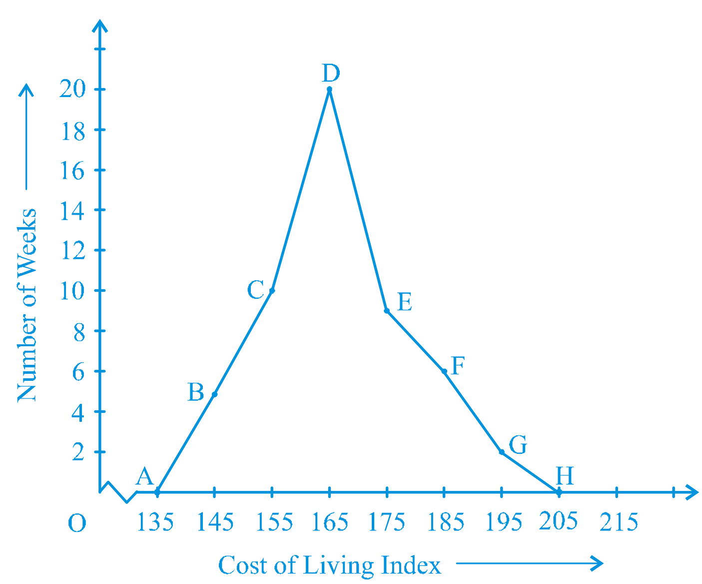
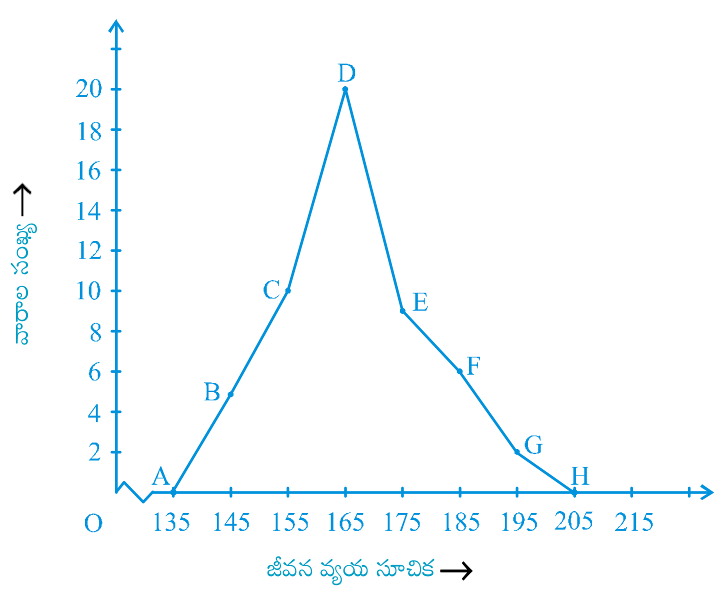


Fig. 12.8

పట్టిక 12.7

తరగతులు	తరగతి మధ్య విలువలు	పౌనఃపున్యం
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
మొత్తం		52

మనం క్షితిజ సమాంతర అక్షం (x– అక్షం) పై తరగతి అంతరముల తరగతి మధ్య విలువలు నిలువు అక్షం (y – అక్షం) పై పౌన:పున్యాలను గుర్తించి, B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6), G(195, 2) బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితంపై గుర్తించి రేఖా ఖండములచే కలిపి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయవచ్చును. తరగతి 130–140 (కనిష్ట తరగతి 140–150 కి ముందున్న తరగతి) తరగతి మధ్యవిలువకు సంబంధించిన బిందువును సున్నా పౌనఃపున్యంలో గుర్తించడం మర్చిపోకూడదు. అనగా A(135, 0) మరియు బిందువు H (205, 0), G(195, 2) తర్వాత వెంటనే ఏర్పడుతుంది. కాబట్టి ఫలితంగా పౌన:పున్య బహుభుజి ABCDEFGH ఏర్పడుతుంది. (పటం 12.8 చూపిన విధంగా)



పటం. 12.8

Frequency polygons are used when the data is continuous and very large. It is very useful for comparing two different sets of data of the same nature, for example, comparing the performance of two different sections of the same class.

EXERCISE 12.1

1. A survey conducted by an organisation for the cause of illness and death among the women between the ages 15 - 44 (in years) worldwide, found the following figures (in %):

S.No.	Causes	Female fatality rate (%)
1.	Reproductive health conditions	31.8
2.	Neuropsychiatric conditions	25.4
3.	Injuries	12.4
4.	Cardiovascular conditions	4.3
5.	Respiratory conditions	4.1
6.	Other causes	22.0

(i) Represent the information given above graphically.

(ii) Which condition is the major cause of women's ill health and death worldwide?

(iii) Try to find out, with the help of your teacher, any two factors which play a major role in the cause in (ii) above being the major cause.

2. The following data on the number of girls (to the nearest ten) per thousand boys in different sections of Indian society is given below.

Section	Number of girls per thousand boys
Scheduled Caste (SC)	940
Scheduled Tribe (ST)	970
Non SC/ST	920
Backward districts	950
Non-backward districts	920
Rural	930
Urban	910

పెద్ద విలువలు గల, మరియు మినహాయింపు తరగతి అంతరాల దత్తాంశం ఇచ్చినపుడు పౌన:పున్య బహుభుజులు ఉపయోగించబడతాయి. ఒకే స్వభావంగల రెండు వేర్వేరు దత్తాంశాలను పోల్చడానికి ఇది చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు ఒకే తరగతిలో రెండు వేర్వురు విభాగాల పని తీరును పోల్చడం.

అభ్యాసం 12.1

1. ఈ పట్టికనందు ప్రపంచవ్యాప్తంగా 15-44 సంవత్సరాల మధ్య వయస్సుగల మహిళల అనారోగ్యం మరియు మరణాలకు గల కారణాలను అన్వేషిస్తూ ఒక సంస్థ నిర్వహించిన సర్వే వివరాలను శాతాలలో (%) పొందుపరచడమైంది.:

వ. సం	కారణాలు	మహిళల మరణాల రేటు (%)
1.	పునరుత్పత్తికి సంబంధించిన ఆరోగ్య సమస్యలు	31.8
2.	నరాలు మరియు మానసిక సమస్యలు	25.4
3.	గాయాలు	12.4
4.	గుండె సంబంధిత సమస్యలు	4.3
5.	శ్వాసకోశ సమస్యలు	4.1
6.	ఇతర కారణాలు	22.0

(i) పై దత్తాంశాన్ని గ్రాఫులో చూపండి.

(ii) ప్రపంచ వ్యాప్తంగా ఏకారణం చేత మహిళల మరణాల రేటు ఎక్కువగా ఉంది?

(iii) మీ ఉపాధ్యాయుని సహాయంతో (ii) లో తెలిపిన కారణం, ప్రధాన కారణాంగా ఉండడానికి గల ఏవైనా రెండు ప్రధాన కారణాలను కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి.

2. భారతీయ సమాజంలో వివిధ శాఖలలో ఉన్న ప్రతి 1000 మంది బాలురకు గల బాలికల సంఖ్యను (దగ్గరి పదికి) సమాచారం పట్టిక రూపంలో ఇవ్వబడింది.

శాఖ	ప్రతి వేయి మంది అబ్బాయిలకు గల అమ్మాయిల సంఖ్య
షెడ్యూల్డు కులం (SC)	940
షెడ్యూల్డు తెగ (ST)	970
SC/ST కానివారు	920
వెనుక బడిన జిల్లాలు	950
వెనుక బడని జిల్లాలు	920
గ్రామీణ ప్రాంతాలు	930
పట్టణ ప్రాంతాలు	910

(i) Represent the information above by a bar graph.

(ii) In the classroom discuss what conclusions can be arrived at from the graph.

3. Given below are the seats won by different political parties in the polling outcome of a state assembly elections:

Political Party	A	B	C	D	E	F
Seats Won	75	55	37	29	10	37

(i) Draw a bar graph to represent the polling results.

(ii) Which political party won the maximum number of seats?

4. The length of 40 leaves of a plant are measured correct to one millimetre, and the obtained data is represented in the following table:

Length (in mm)	**Number of leaves**
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) Draw a histogram to represent the given data. [Hint: First make the class intervals continuous]

(ii) Is there any other suitable graphical representation for the same data?

(iii) Is it correct to conclude that the maximum number of leaves are 153 mm long? Why?

5. The following table gives the life times of 400 neon lamps:

Life time (in hours)	**Number of lamps**
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) పైన తెలిపిన దత్తాంశాన్ని కమ్మీ రేఖా చిత్రంలో చూపండి?

(ii) కమ్మీ రేఖా చిత్రం ద్వారా వచ్చిన ఫలితాలను తరగతిగదిలో చర్చించండి?

3. రాష్ట్ర శాసనసభకు నిర్వహించిన ఎన్నికలలో వివిధ రాజకీయ పార్టీలు గెలుపొందిన స్థానాల సంఖ్య ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది:

రాజకీయ పార్టీ	A	B	C	D	E	F
గెలుపొందిన స్థానాలు	75	55	37	29	10	37

(i) పై దత్తాంశానికి కమ్మీ రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

(ii) ఏ రాజకీయపార్టీ అత్యధిక స్థానాలు గెలుచుకుంది?

4. 40 ఆకుల పొడవులను కొలిచి 1 మి.మీ. కు సవరించారు మరియు వచ్చిన దత్తాంశం క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది

పొడవు (మి.మీ.లలో)	**ఆకుల సంఖ్య**
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) పై దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రం గీయుము. [సూచన: మొదటి తరగతి అంతరాలు మినహాయింపు తరగతి అంతరాలుగా మార్చండి.]

(ii) ఈ దత్తాంశాన్ని ప్రాతినిధ్యపరిచే మరొక సరైన రేఖాచిత్రం ఉందా?

(iii) పై దత్తాంశంలో ఆకుల గరిష్ట పొడవు 153 మి.మీ. అనడం సబబేనా? ఎందుకు?

5. ఈ కింది పట్టికలో 400 నియాన్ దీపాలు యొక్క జీవితకాలాలు ఇవ్వబడ్డాయి:

జీవిత కాలం (గంటలలో)	**దీపాల సంఖ్య**
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) Represent the given information with the help of a histogram.

(ii) How many lamps have a life time of more than 700 hours?

6. The following table gives the distribution of students of two sections according to the marks obtained by them:

Section A		Section B	
Marks	**Frequency**	**Marks**	**Frequency**
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

Represent the marks of the students of both the sections on the same graph by two frequency polygons. From the two polygons compare the performance of the two sections.

7. The runs scored by two teams A and B on the first 60 balls in a cricket match are given below:

Number of balls	Team A	Team B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

Represent the data of both the teams on the same graph by frequency polygons.

[**Hint :** First make the class intervals continuous.]

(i) ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని సోపాన చిత్రరూపంలో చూపించండి?

(ii) 700 గంటల కన్నా ఎక్కువ జీవితకాలం ఉన్న దీపాల సంఖ్య ఎంత?

6. క్రింది పట్టిక మార్కుల ఆధారంగా విద్యార్థులను రెండు సెక్షన్‌లుగా విభజించిన దత్తాంశాన్ని తెలియచేయును.

తరగతి A		తరగతి B	
మార్కులు	పౌనఃపున్యం	మార్కులు	పౌనఃపున్యం
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

మార్కుల ఆధారంగా విభజించిన రెండు తరగతుల దత్తాంశాలతో ఏర్పడు రెండు పౌనఃపున్య బహుభుజిలను ఒకే గ్రాఫ్‌పై చూపించండి. ఈ రెండు పౌనఃపున్య బహుభుజిల ద్వారా రెండు సెక్షన్‌ల విద్యార్థుల ప్రగతిని పోల్చండి?

7. క్రికెట్ మ్యాచ్ నందు A మరియు B టీమ్‌లు మొదటి 60 బంతులలో సాధించిన పరుగులు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది:

బంతుల సంఖ్య	జట్టు A	జట్టు B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

ఒకే గ్రాఫ్ పై రెండు జట్ల దత్తాంశాన్ని పౌనఃపున్యాలు బహుభుజులతో చూపించండి.

[**సూచన :** మొదటి తరగతి అంతరాలను మినహాయింపు తరగతులుగా మార్చండి.]

8. A random survey of the number of children of various age groups playing in a park was found as follows:

Age (in years)	Number of children
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

Draw a histogram to represent the data above.

9. 100 surnames were randomly picked up from a local telephone directory and a frequency distribution of the number of letters in the English alphabet in the surnames was found as follows:

Number of letters	Number of surnames
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 -12	16
12 -20	4

(i) Draw a histogram to depict the given information.

(ii) Write the class interval in which the maximum number of surnames lie.

12.2 Summary

In this chapter, you have studied the following points:

1. How data can be presented graphically in the form of bar graphs, histograms and frequency polygons.

8. ఒక యాదృచ్ఛిక సర్వేలో పార్కునందు ఆడుకుంటున్న వివిధ వయస్సు గల పిల్లల సంఖ్యను వారి వివరాలు ఈ కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

వయస్సు (సం॥లలో)	పిల్లల సంఖ్య
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

పై దత్తాంశానికి సోపాన చిత్రాన్ని గీయండి.

9. స్థానిక టెలిఫోన్ డైరెక్టరీ నుండి యాదృచ్ఛికంగా సేకరించిన 100 ఇంటి పేర్లలో గల ఆంగ్ల అక్షరాల సంఖ్య ఆధారంగా పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక ఇవ్వబడింది:

అక్షరాల సంఖ్య	ఇంటిపేర్ల సంఖ్య
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 -12	16
12 -20	4

(i) దత్తాంశంలో ఇవ్వబడిన సమాచారానికి సోపాన పట్టికను గీయండి?

(ii) ఎక్కువ ఇంటి పేర్లు గల తరగతి అంతరంను రాయండి.

12.2 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేసారు:

1. కమ్మీరేఖా చిత్రాలు, సోపాన చిత్రాలు మరియు పౌనఃపున్య బహుభుజిలలో ఇచ్చిన దత్తాంశమును రేఖాచిత్రంలో ఏ విధంగా సూచిస్తామో నేర్చుకున్నాం.

APPENDIX 2

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELLING

A2.1 Introduction

Right from your earlier classes, you have been solving problems related to the real-world around you. For example, you have solved problems in simple interest using the formula for finding it. The formula (or equation) is a relation between the interest and the other three quantities that are related to it, the principal, the rate of interest and the period. This formula is an example of a **mathematical model**. A **mathematical model** is a mathematical relation that describes some real-life situation.

Mathematical models are used to solve many real-life situations like:

- launching a satellite.
- predicting the arrival of the monsoon.
- controlling pollution due to vehicles.
- reducing traffic jams in big cities.

In this chapter, we will introduce you to the process of constructing mathematical models, which is called **mathematical modelling**. In mathematical modelling, we take a real-world problem and write it as an equivalent mathematical problem. We then solve the mathematical problem, and interpret its solution in terms of the real-world problem. After this we see to what extent the solution is valid in the context of the real-world problem. So, the *stages* involved in mathematical modelling are formulation, solution, interpretation and validation.

We will start by looking at the process you undertake when solving word problems, in Section A2.2. Here, we will discuss some word problems that are similar to the ones you have solved in your earlier classes. We will see later that the steps that are used for solving word problems are some of those used in mathematical modelling also.

అనుబంధం 2

గణిత నమూనా విధానాలు – పరిచయం

A2.1 పరిచయం

మీ ముందు తరగతుల నుండి, మీరు మీ చుట్టూ ఉన్న వాస్తవ ప్రపంచానికి సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరిస్తున్నారు. ఉదాహరణకు, మీరు బారువడ్డీ సూత్రంను ఉపయోగించి దానికి సంబంధించిన సమస్యలను పరిష్కరించారు. సూత్రం (లేదా సమీకరణం) అనేది వడ్డీ మరియు దానికి సంబంధించిన ఇతర మూడు పరిమాణాలు, అసలు, వడ్డీ రేటు మరియు కాలానికి మధ్య ఉన్న సంబంధం తెలియజేస్తుంది. ఈ సూత్రం ఒక **గణిత నమూనా**కు ఒక ఉదాహరణ. ఒక **గణిత నమూనా** అనేది ఒక గణిత సంబంధం, ఇది కొన్ని నిజ జీవిత పరిస్థితులను వివరిస్తుంది.

దిగువ పేర్కొన్న అనేక నిజ జీవిత పరిస్థితులను పరిష్కరించడం కొరకు గణిత నమూనాలు ఉపయోగించబడతాయి:

- ఉపగ్రహాన్ని ప్రయోగించడం.
- ఋతుపవనాల రాకను అంచనా వేయడం.
- వాహనాల వల్ల కలిగే కాలుష్యాన్ని నియంత్రించడం.
- పెద్ద నగరాల్లో ట్రాఫిక్ రద్దీలను తగ్గించడం.

ఈ అధ్యాయంలో, గణిత నమూనాలను నిర్మించే ప్రక్రియను మేము మీకు పరిచయం చేస్తాము, దీనిని **గణిత నమూనా విధానం** అని అంటారు. గణిత నమూనాలో, మనం ఒక నిజ జీవిత సమస్యను తీసుకొని, దానిని సమానమైన గణిత సమస్యగా వ్రాస్తాము. అప్పుడు మేము గణిత సమస్యను పరిష్కరిస్తాము, మరియు వాస్తవ ప్రపంచ సమస్య పరంగా దాని పరిష్కారాన్ని వివరిస్తాము. దీని తరువాత వాస్తవ ప్రపంచ సమస్య సందర్భంలో పరిష్కారం ఏ మేరకు చెల్లుబాటు అవుతుందో మనం చూస్తాం. కాబట్టి, గణిత నమూనా లో ఇమిడి ఉండే దశలు సూత్రీకరణ, పరిష్కారం, వ్యాఖ్యానం మరియు ధృవీకరణ.

సెక్షన్ A2. 2లో పద సమస్యలను పరిష్కరించేటప్పుడు మీరు చేపట్టే ప్రక్రియను చూడటం ద్వారా మేం ప్రారంభిస్తాం. ఇక్కడ, మీ ముందు తరగతులలో మీరు పరిష్కరించిన సమస్యలను పోలి ఉండే కొన్ని పద సమస్యలను మనం చర్చిద్దాం. పద సమస్యలను పరిష్కరించడానికి ఉపయోగించే దశలు గణిత నమూనా లో కూడా ఉపయోగించిన వాటిలో కొన్ని అని మనం తరువాత చూద్దాం.

In the next section, that is Section A2.3, we will discuss some simple models.

In Section A2.4, we will discuss the overall process of modelling, its advantages and some of its limitations.

A2.2 Review of Word Problems

In this section, we will discuss some word problems that are similar to the ones that you have solved in your earlier classes. Let us start with a problem on direct variation.

Example 1 : I travelled 432 kilometres on 48 litres of petrol in my car. I have to go by my car to a place which is 180 km away. How much petrol do I need?

Solution : We will list the steps involved in solving the problem.

Step 1 : Formulation : You know that farther we travel, the more petrol we require, that is, the amount of petrol we need varies directly with the distance we travel.

Petrol needed for travelling 432 km = 48 litres

Petrol needed for travelling 180 km = ?

Mathematical Description : Let

x = distance I travel

y = petrol I need

y varies directly with x.

So, $y = kx$, where k is a constant.

I can travel 432 kilometres with 48 litres of petrol.

So, $y = 48,\ x = 432.$

Therefore, $k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}.$

Since $y = kx$,

therefore, $$y = \frac{1}{9}x \qquad (1)$$

Equation or Formula (1) describes the relationship between the petrol needed and distance travelled.

Step 2 : Solution : We want to find the petrol we need to travel 180 kilometres; so, we have to find the value of y when $x = 180$. Putting $x = 180$ in (1), we have

తరువాత విభాగంలో, అంటే విభాగం A2.3లో, మనం కొన్ని సరళమైన నమూనాలను చర్చిద్దాం.

విభాగం A2.4లో, నమూనా యొక్క మొత్తం ప్రక్రియ, దాని యొక్క ప్రయోజనాలు మరియు దాని యొక్క కొన్ని పరిమితుల గురించి మనం చర్చిద్దాం.

A2.2 పద సమస్యల సమీక్ష

ఈ విభాగం లో, మీ ముందు తరగతులలో మీరు పరిష్కరించిన సమస్యలను పోలి ఉండే కొన్ని పద సమస్యలను మనం చర్చిద్దాం. ఒక సమస్యను అనులోమానుపాతంతో ప్రారంభిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : నేను నా కారులో 48 లీటర్ల పెట్రోల్ పై 432 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించాను. నేను నా కారులో 180 కిలోమీటర్ల దూరంలో ఉన్న ప్రదేశానికి వెళ్ళాలి. నాకు ఎంత పెట్రోల్ అవసరం అవుతుంది?

సాధన : సమస్యను పరిష్కరించడంలో ఇమిడి ఉన్న సోపానాలను మనం జాబితా చేస్తాము.

సోపానం 1 : సూత్రీకరణ : మనం ఎక్కువ దూరం ప్రయాణిస్తే ఎక్కువ పెట్రోలు అవసరమవుతుందని మీకు తెలుసు, అంటే మనకు అవసరమైన పెట్రోలు పరిమాణం మనం ప్రయాణించే దూరాన్ని బట్టి నేరుగా మారుతుంది..

432 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించడానికి అవసరమైన పెట్రోలు = 48 లీటర్లు

180 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించడానికి అవసరమైన పెట్రోల్ = ?

గణిత వివరణ :

x = నేను ప్రయాణించే దూరం

y = అవసరమైన పెట్రోల్ అనుకుందాం.

y అనేది x తో నేరుగా మారుతుంది.

కాబట్టి, $y = kx$, ఇక్కడ k అనేది స్థిరాంకం.

నేను 48 లీటర్ల పెట్రోల్ తో 432 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించగలను.

కాబట్టి, $y = 48,\ x = 432.$

అందువలన, $$k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}.$$

కాని, $y = kx,$

అందువలన, $$y = \frac{1}{9}x \qquad (1)$$

సమీకరణం లేదా సూత్రం (1) అనేది, అవసరమైన పెట్రోల్ మరియు ప్రయాణించిన దూరం మధ్య సంబంధాన్ని వివరిస్తుంది.

సోపానం 2 : సాధన: మనం 180 కి.మీ. ప్రయాణించడానికి అవసరమైన పెట్రోలును కనుగొనాలనుకుంటున్నాం; కాబట్టి, $x = 180$ అయినప్పుడు మనం y యొక్క విలువను కనుగొనాలి. $x = 180$ ని (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే, మనకు

$$y = \frac{180}{9} = 20.$$

Step 3 : Interpretation : Since $y = 20$, we need 20 litres of petrol to travel 180 kilometres.

Did it occur to you that you may not be able to use the formula (1) in all situations? For example, suppose the 432 kilometres route is through mountains and the 180 kilometres route is through flat plains. The car will use up petrol at a faster rate in the first route, so we cannot use the same rate for the 180 kilometres route, where the petrol will be used up at a slower rate. So the formula works if all such conditions that affect the rate at which petrol is used are the same in both the trips. Or, if there is a difference in conditions, the effect of the difference on the amount of petrol needed for the car should be very small. The petrol used will vary directly with the distance travelled only in such a situation. We assumed this while solving the problem.

Example 2 : Suppose Sudhir has invested ₹ 15,000 at 8% simple interest per year. With the return from the investment, he wants to buy a washing machine that costs ₹ 19,000. For what period should he invest ₹ 15,000 so that he has enough money to buy a washing machine?

Solution : Step 1 : Formulation of the problem : Here, we know the principal and the rate of interest. The interest is the amount Sudhir needs in addition to 15,000 to buy the washing machine. We have to find the number of years.

Mathematical Description : The formula for simple interest is $I = \frac{Pnr}{100}$,

where P = Principal,

n = Number of years,

r % = Rate of interest

I = Interest earned

Here, the principal = ₹ 15,000

The money required by Sudhir for buying a washing machine = ₹ 19,000

So, the interest to be earned = ₹ (19,000 – 15,000)

= ₹ 4,000

The number of years for which ₹ 15,000 is deposited = n

The interest on ₹ 15,000 for n years at the rate of 8% = I

Then, $$I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

$$y = \frac{180}{9} = 20 \text{ వస్తుంది.}$$

సోపానం 3 : **వాఖ్యానం :** $y = 20$ కనుక, 180 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించడానికి మనకు 20 లీటర్ల పెట్రోల్ అవసరం అవుతుంది.

అన్ని సందర్భాల్లోనూ ఫార్ములా (1)ని మీరు ఉపయోగించలేకపోవచ్చు అని మీకు అనిపించిందా? ఉదాహరణకు, 432 కిలో మీటర్ల మార్గం పర్వతాల గుండా మరియు 180 కిలో మీటర్ల మార్గం చదునైన మైదానాల గుండా ఉందనుకోండి. ఈ కారు మొదటి మార్గంలో ఎక్కువగా పెట్రోల్ ను ఉపయోగిస్తుంది, కాబట్టి 180 కిలోమీటర్ల మార్గంలో మేము అదే రేటును ఉపయోగించలేము, ఇక్కడ పెట్రోల్ తక్కువగా ఉపయోగించబడుతుంది. కాబట్టి పెట్రోల్ ఉపయోగించే రేటును ప్రభావితం చేసే అటువంటి పరిస్థితులన్నీ రెండు ట్రిప్పుల్లోనూ ఒకేవిధంగా ఉన్నట్లయితే ఫార్ములా పనిచేస్తుంది. లేదా, పరిస్థితులలో తేడా ఉంటే, కారుకు అవసరమైన పెట్రోలు పరిమాణంపై వ్యత్యాసం యొక్క ప్రభావం చాలా తక్కువగా ఉండాలి. అటువంటి పరిస్థితిలో మాత్రమే ప్రయాణించిన దూరాన్ని బట్టి ఉపయోగించిన పెట్రోల్ నేరుగా మారుతుంది. సమస్యను పరిష్కరించేటప్పుడు మేము దీనిని ఊహించాము.

ఉదాహరణ 2 : సుధీర్ సంవత్సరానికి 8% సరళ వడ్డీకి ₹15,000 పెట్టుబడి పెట్టాడనుకోండి. పెట్టుబడి నుండి వచ్చే ప్రతిఫలంతో, అతను ₹19,000 అయ్యే వాషింగ్ మెషిన్‌ను కొనుగోలు చేయాలనుకుంటున్నాడు. వాషింగ్ మెషిన్ కొనుగోలు చేయడానికి తగినంత డబ్బు ఉండటం కొరకు అతడు ఏ కాలవ్యవధి వరకు ₹15,000 పెట్టుబడిగా పెట్టాలి?

సాధన : సోపానం 1 : **సమస్య యొక్క సూత్రీకరణ :** ఇక్కడ మనకు అసలు మరియు వడ్డీరేటు తెలుసు. వాషింగ్ మెషిన్ కొనుగోలు చేయడం కొరకు సుధీర్‌కు ₹15,000లకు అదనంగా వడ్డీ నుంచి వచ్చే సొమ్ము అవసరం అవుతుంది. మనం ఆ సంవత్సరాల సంఖ్యను కనుగొనాలి.

గణిత వివరణ : బారు వడ్డీ కి సూత్రం $I = \frac{Pnr}{100}$,

ఇక్కడ $P =$ అసలు,

$n =$ సంవత్సరాల సంఖ్య,

$r\ \% =$ వడ్డీరేటు

$I =$ సంపాదించిన వడ్డీ

ఇక్కడ, అసలు = ₹15000

వాషింగ్ మెషిన్ కొనుగోలు చేయడం కొరకు సుధీర్ కు అవసరమైన డబ్బు = ₹19,000

అందువల్ల, సంపాదించాల్సిన వడ్డీ = ₹(19,000 – 15,000)

= ₹4,000

₹15,000 డిపాజిట్ చేయబడ్డ సంవత్సరాల సంఖ్య = n

8% చొప్పున n సంవత్సరాలకు ₹15,000 పై వచ్చే వడ్డీ = I

అప్పుడు, $$I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

So, $$I = 1200n \quad (1)$$

gives the relationship between the number of years and interest, if ₹ 15000 is invested at an annual interest rate of 8%.

We have to find the period in which the interest earned is ₹ 4000. Putting I = 4000 in (1), we have

$$4000 = 1200n \quad (2)$$

Step 2 : Solution of the problem : Solving Equation (2), we get

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}.$$

Step 3 : Interpretation : Since $n = 3\frac{1}{3}$ and one third of a year is 4 months, Sudhir can buy a washing machine after 3 years and 4 months.

Can you guess the assumptions that you have to make in the example above? We have to assume that the interest rate remains the same for the period for which we calculate the interest. Otherwise, the formula $I = \frac{Pnr}{100}$ will not be valid. We have also assumed that the price of the washing machine does not increase by the time Sudhir has gathered the money.

Example 3 : A motorboat goes upstream on a river and covers the distance between two towns on the riverbank in six hours. It covers this distance downstream in five hours. If the speed of the stream is 2 km/h, find the speed of the boat in still water.

Solution : Step 1 : Formulation : We know the speed of the river and the time taken to cover the distance between two places. We have to find the speed of the boat in still water.

Mathematical Description : Let us write x for the speed of the boat, t for the time taken and y for the distance travelled. Then

$$y = tx \quad (1)$$

Let d be the distance between the two places.

While going upstream, the actual speed of the boat

= speed of the boat – speed of the river,

because the boat is travelling against the flow of the river.

So, the speed of the boat upstream = $(x - 2)$ km/h

It takes 6 hours to cover the distance between the towns upstream. So, from (1),

we get $$d = 6(x - 2) \quad (2)$$

కాబట్టి, $\mathrm{I} = 1200n$ (1)

ఒకవేళ ₹15000ను 8% వార్షిక వడ్డీ రేటుతో మదుపు చేసినట్లయితే, సంవత్సరాల సంఖ్య మరియు వడ్డీ మధ్య సంబంధాన్ని ఇస్తుంది.

d¥bÍ~+º q e&ž ₹4000, కనుక దాని కాలవ్యవధిని మనం కనుగొనాలి. $\mathrm{I} = 4000$ను (1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే మనకు

$$4000 = 1200n \tag{2}$$

సోపానం 2 : సమస్య పరిష్కారం : సమీకరణము (2) ను పరిష్కరించుట, మనము దీనిని పొందుతాము

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}.$$

సోపానం3 : వ్యాఖ్యానం: $n = 3\frac{1}{3}$ మరియు ఒక సంవత్సరంలో మూడింట ఒక వంతు 4 నెలలు, కనుక సుధీర్ 3 సంవత్సరాల 4 నెలల తరువాత వాషింగ్ మెషిన్ కొనుగోలు చేయగలడు.

పై ఉదాహరణలో మీరు చేయాల్సిన ఊహలను మీరు ఊహించగలరా? వడ్డీరేటు ఏ కాలానికి మనం ఒకే విధంగా ఉంటుందో ఆ కాలానికి మనం భావించాలి. వడ్డీని లెక్కించండి. లేనిపక్షంలో, $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{P}nr}{100}$ సూత్రం చెల్లుబాటు కాదు. సుధీర్ డబ్బులు సేకరించే సమయం వరకు వాషింగ్ మెషీన్ ధర పెరగదని మనం భావించాలి.

ఉదాహరణ 3 : ఒక మోటారు పడవ ఒక నదిలో ప్రవహానికి వెదురుగా వెళుతుంది మరియు నదీతీరంలో రెండు పట్టణాల మధ్య దూరాన్ని ఆరు గంటల్లో ప్రయాణం చేస్తుంది. ఇది ఈ దూరాన్ని ఐదు గంటల్లో ప్రవహ దిశలో ప్రయాణం చేస్తుంది. ఒకవేళ ప్రవాహం యొక్క వేగం గంటకు 2 కిలోమీటర్లు అయితే, నిశ్చల నీటిలో పడవ యొక్క వేగాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : సోపానం 1 : సూత్రీకరణ : నది యొక్క వేగము మరియు రెండు ప్రదేశాల మధ్య దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టే సమయము మనకు తెలుసు. నిశ్చలమైన నీటిలో పడవ వేగాన్ని మనం కనుగొనాలి.

గణిత వివరణ: పడవ వేగానికి x, పట్టిన కాలానికి t మరియు ప్రయాణించిన దూరానికి y అని మనం రాద్దాం. తర్వాత

$$y = tx \tag{1}$$

d అనేది రెండు ప్రదేశాల మధ్య దూరం అనుకుందాం.

ప్రవాహానికి ఎదురుగా వెళ్ళేటప్పుడు, పడవ వాస్తవ వేగం

= పడవ వేగము – నది వేగము,

ఎందుకంటే పడవ నది ప్రవాహానికి వ్యతిరేకంగా ప్రయాణిస్తోంది.

కాబట్టి, ప్రవాహానికి ఎదురు దిశలో పడవ వేగం $= (x - 2)$ కి.మీ./గం.

ప్రవాహానికి ఎదురుగా పట్టణాల మధ్య ప్రయాణం చేయడానికి 6 గంటలు పడుతుంది. కాబట్టి, (1) నుండి,

మనకు $d = 6(x - 2)$ వస్తుంది. (2)

When going downstream, the speed of the river has to be *added* to the speed of the boat.

So, the speed of the boat downstream = $(x + 2)$ km/h

The boat takes 5 hours to cover the same distance downstream. So,

$$d = 5(x + 2) \tag{3}$$

From (2) and (3), we have

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \tag{4}$$

Step 2 : Finding the Solution

Solving for x in Equation (4), we get $x = 22$.

Step 3 : Interpretation

Since $x = 22$, therefore the speed of the motorboat in still water is 22 km/h.

In the example above, we know that the speed of the river is not the same everywhere. It flows slowly near the shore and faster at the middle. The boat starts at the shore and moves to the middle of the river. When it is close to the destination, it will slow down and move closer to the shore. So, there is a small difference between the speed of the boat at the middle and the speed at the shore. Since it will be close to the shore for a small amount of time, this difference in speed of the river will affect the speed only for a small period. So, we can ignore this difference in the speed of the river. We can also ignore the small variations in speed of the boat. Also, apart from the speed of the river, the friction between the water and surface of the boat will also affect the actual speed of the boat. We also assume that this effect is very small.

So, we have assumed that

1. The speed of the river and the boat remains constant all the time.
2. The effect of friction between the boat and water and the friction due to air is negligible.

We have found the speed of the boat in still water with the *assumptions* (*hypotheses*) above.

As we have seen in the word problems above, there are 3 *steps in solving a word problem. These are*

1. **Formulation :** We analyse the problem and see which factors have a major influence on the solution to the problem. These are the **relevant factors**. In our first example, the relevant factors are the distance travelled and petrol consumed. We ignored the other factors like the nature of the route, driving speed, etc. Otherwise, the problem would have been more difficult to solve. The factors that we ignore are the **irrelevant factors**.

ప్రవహా దిశలో వెళ్ళేటప్పుడు, నది వేగాన్ని పడవ వేగానికి కలపాల్సి ఉంటుంది.

కాబట్టి, ప్రవహాదిశలో పడవ వేగం = $(x + 2)$ కి.మీ./గం.

పడవ ప్రవహాదిశలో అదే దూరాన్ని ప్రయాణించడానికి 5 గంటలు పడుతుంది. కనుక,

$$d = 5(x + 2) \tag{3}$$

(2) మరియు (3) ల నుంచి, మనకు

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \text{ వస్తుంది.} \tag{4}$$

సోపానం 2 : సమస్య పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం

x కొరకు సమీకరణం (4)ను సాధించడం ద్వారా, మనకు $x = 22$ వస్తుంది.

సోపానం 3 : వ్యాఖ్యానం

$x = 22$, కనుక, నిశ్చల నీటిలో పడవ యొక్క వేగం 22 కి.మీ./గం.

పై ఉదాహరణలో, నది యొక్క వేగం ప్రతిచోటా ఒకేలా ఉండదని మనకు తెలుసు. ఇది ఒడ్డుకు దగ్గరలో నెమ్మదిగా మరియు మధ్యలో వేగంగా ప్రవహిస్తుంది. పడవ నది ఒడ్డున మొదలై మధ్య భాగం వైపుగా కదులుతుంది. ఇది గమ్యస్థానానికి దగ్గరగా ఉన్నప్పుడు, అది నెమ్మదిస్తుంది మరియు ఒడ్డుకు దగ్గరగా కదులుతుంది. కాబట్టి, మధ్యలో పడవ వేగానికి, ఒడ్డు వద్ద వేగానికి మధ్య ఒక చిన్న వ్యత్యాసం ఉంది. ఇది కొద్దికాలం పాటు ఒడ్డుకు దగ్గరగా ఉంటుంది కనుక, నది యొక్క వేగంలో ఈ వ్యత్యాసం కొద్ది కాలానికి మాత్రమే వేగాన్ని ప్రభావితం చేస్తుంది. కాబట్టి, నది యొక్క వేగంలో ఈ వ్యత్యాసాన్ని మనం విస్మరించవచ్చు. పడవ యొక్క వేగంలో చిన్న వ్యత్యాసాలను కూడా మనం విస్మరించవచ్చు. అలాగే, నది యొక్క వేగముతో పాటు, పడవ యొక్క ఉపరితలం మరియు నీరు ల మధ్య ఘర్షణ కూడా పడవ యొక్క వాస్తవ వేగాన్ని ప్రభావితం చేస్తుంది. ఈ ప్రభావం చాలా చిన్నదని కూడా మనం భావిస్తాం. .

కాబట్టి, మనం

1. నది మరియు పడవ యొక్క వేగం ఎల్లప్పుడూ స్థిరంగా ఉంటుంది.

2. పడవ మరియు నీటి మధ్య ఘర్షణ యొక్క ప్రభావం మరియు గాలి వల్ల కలిగే ఘర్షణ ప్రభావం స్వల్పంగా ఉంటుంది.

ప్రతిపాదనలతో నిశ్చలమైన నీటిలో పడవ యొక్క వేగాన్ని మేము కనుగొన్నాం.

మనం పైన పేర్కొన్న పద సమస్యలలో చూసినట్లుగా, ఒక పద సమస్యను పరిష్కరించడంలో 3 సోపానాలుంటాయి. అవి

1. **సూత్రీకరణ :** మనం సమస్యను విశ్లేషిస్తాం మరియు సమస్య యొక్క పరిష్కారంపై ఏ కారకాలు ప్రధాన ప్రభావాన్ని చూపుతాయో చూస్తాం. ఇవి **సంబంధిత కారకాలు**. మా మొదటి ఉదాహరణలో, సంబంధిత కారకాలు ప్రయాణించిన దూరం మరియు పెట్రోల్ వినియోగం, రహదారి యొక్క స్వభావం, ప్రయాణ వేగం మొదలైన ఇతర కారకాలను మేము విస్మరించాం. లేకపోతే, సమస్యను పరిష్కరించడం మరింత కష్టంగా ఉండేది. మనం విస్మరించే కారకాలు **అసంబద్ధమైన కారకాలు**.

We then describe the problem mathematically, in the form of one or more mathematical equations.

2. **Solution :** We find the solution of the problem by solving the mathematical equations obtained in Step 1 using some suitable method.

3. **Interpretation :** We see what the solution obtained in Step 2 means in the context of the original word problem.

Here are some exercises for you. You may like to check your understanding of the steps involved in solving word problems by carrying out the three steps above for the following problems.

EXERCISE A 2.1

In each of the following problems, clearly state what the relevant and irrelevant factors are while going through Steps 1, 2 and 3 given above.

1. Suppose a company needs a computer for some period of time. The company can either hire a computer for ₹ 2,000 per month or buy one for ₹ 25,000. If the company has to use the computer for a long period, the company will pay such a high rent, that buying a computer will be cheaper. On the other hand, if the company has to use the computer for say, just one month, then hiring a computer will be cheaper. Find the number of months beyond which it will be cheaper to buy a computer.
2. Suppose a car starts from a place A and travels at a speed of 40 km/h towards another place B. At the same instance, another car starts from B and travels towards A at a speed of 30 km/h. If the distance between A and B is 100 km, after how much time will the cars meet?
3. The moon is about 3,84,000 km from the earth, and its path around the earth is nearly circular. Find the speed at which it orbits the earth, assuming that it orbits the earth in 24 hours. (Use $\pi = 3.14$)
4. A family pays ₹ 1000 for electricity on an average in those months in which it does not use a water heater. In the months in which it uses a water heater, the average electricity bill is ₹ 1240. The cost of using the water heater is ₹ 8.00 per hour. Find the average number of hours the water heater is used in a day.

A2.3 Some Mathematical Models

So far, nothing was new in our discussion. In this section, we are going to add another step to the three steps that we have discussed earlier. This step is called *validation.* What does validation mean? Let us see. In a real-life situation, we cannot accept a model that gives us an answer that does not match the reality. This process of checking the answer against reality, and modifying the mathematical description if necessary, is

అప్పుడు మనం సమస్యను ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ గణిత సమీకరణాల రూపంలో గణితపరంగా వివరిస్తాము.

2. **సాధన:** సోపానం 1 లో పొందిన గణిత సమీకరణాలను తగిన పద్ధతిని ఉపయోగించి పరిష్కరించడం ద్వారా సమస్యకు పరిష్కారాన్ని కనుగొంటాం.

3. **వాఖ్యానం:** సోపానం 2 లో మనం పొందిన సాధన, ఇచ్చిన పద సమస్యకు ఏ సందర్భంలో ఎంత వరకు సరిపోతుందో చూస్తాం.

మీ కోసం ఇక్కడ కొన్ని అభ్యాసాలు ఉన్నాయి. ఈ క్రింది సమస్యల కొరకు పైన పేర్కొన్న మూడు సోపానాలను చేపట్టడం ద్వారా పద సమస్యలను పరిష్కరించడంలో ఇమిడి ఉండే సోపానాలపై మీ అవగాహనను సరిచూసుకోవడానికి మీరు ఇష్టపడవచ్చు.

అభ్యాసం A 2.1

దిగువ పేర్కొన్న ప్రతి సమస్యలోనూ, పైన ఇవ్వబడ్డ సోపానాలు 1, 2 మరియు 3 ద్వారా వెళ్లేటప్పుడు సంబంధిత మరియు అసంబద్ధ కారకాలు ఏమిటో స్పష్టంగా పేర్కొనండి.

1. ఒక కంపెనీకి కొంత కాలానికి కంప్యూటర్ అవసరం అనుకుందాం. కంపెనీ నెలకు ₹2,000కు కంప్యూటర్‌ను అద్దెకు తీసుకోవచ్చు లేదా ₹25,000కు ఒకదాన్ని కొనుగోలు చేయవచ్చు. ఒకవేళ కంపెనీ కంప్యూటర్‌ను ఎక్కువ కాలం ఉపయోగించాల్సి వస్తే, ఆ సంస్థ అంత ఎక్కువ అద్దె చెల్లించడం కన్నా, కంప్యూటర్‌ను కొనుగోలు చేయడం చౌకగా ఉంటుందని పేర్కొంది. మరోవైపు, కంపెనీ కేవలం ఒక నెల మాత్రమే కంప్యూటర్‌ను ఉపయోగించాల్సి వస్తే, అప్పుడు కంప్యూటర్‌ను అద్దెకు తీసుకోవడం చౌకగా ఉంటుంది. ఎన్ని నెలలకు కంప్యూటర్‌ను కొనుగోలు చేయడం చౌకగా ఉంటుందో కనుగొనండి.
2. ఒక కారు A అనే ప్రదేశం నుంచి బయలుదేరి గంటకు 40 కిలోమీటర్ల వేగంతో మరో ప్రదేశం B వైపు ప్రయాణిస్తుందనుకోండి. అదే సందర్భంలో, మరో కారు B నుంచి ప్రారంభమై గంటకు 30 కిలోమీటర్ల వేగంతో A వైపు ప్రయాణిస్తుంది. ఒకవేళ A మరియు B ల మధ్య దూరం 100 కిలోమీటర్లు అయితే, ఎంత సమయం తరువాత కార్లు కలుస్తాయి?
3. చంద్రుడు భూమికి 3,84,000 కిలోమీటర్ల దూరంలో ఉన్నాడు మరియు భూమి చుట్టూ దాని మార్గం దాదాపు వృత్తాకారంగా ఉంటుంది 24 గంటల్లో భూమి చుట్టూ పరిభ్రమిస్తుందని భావించి, అది భూమిని పరిభ్రమిస్తున్న వేగాన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ ఉపయోగించండి)
4. వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించని ఆ నెలల్లో ఒక కుటుంబం సగటున విద్యుత్ కొరకు ₹1000 చెల్లిస్తుంది. వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించే నెలల్లో, సగటు విద్యుత్ బిల్లు ₹1240. వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించడానికి అయ్యే ఖర్చు గంటకు ₹8.00 ఒక రోజులో వాటర్ హీటర్ ఉపయోగించే సగటు గంటల సంఖ్యను కనుగొనండి.

A2.3 కొన్ని గణిత నమూనాలు

ఇప్పటివరకు, మా చర్చలో కొత్తగా ఏమీ లేదు. ఈ విభాగంలో, మనం ఇంతకు ముందు చర్చించిన మూడు సోపానాలకు మరో సోపానంను జోడించబోతున్నాం. ఈ దశను *ధ్రువీకరణ* అని అంటారు. ధ్రువీకరణ అంటే ఏమిటి? మనం చూద్దాం. నిజ జీవిత పరిస్థితిలో, వాస్తవికతతో సరిపోని సమాధానాన్ని ఇచ్చే నమూనాను మనం అంగీకరించలేము. వాస్తవికతకు వ్యతిరేకంగా సమాధానాన్ని తనిఖీ చేసే ఈ ప్రక్రియ, మరియు ఒకవేళ అవసరం అయితే గణిత వివరణను సవరించడం,

called *validation*. This is a very important step in modelling. We will introduce you to this step in this section.

First, let us look at an example, where we do not have to modify our model after validation.

Example 4 : Suppose you have a room of length 6 m and breadth 5 m. You want to cover the floor of the room with square mosaic tiles of side 30 cm. How many tiles will you need? Solve this by constructing a mathematical model.

Solution : Formulation : We have to consider the area of the room and the area of a tile for solving the problem. The side of the tile is 0.3 m. Since the length is 6 m, we can fit in $\frac{6}{0.3} = 20$ tiles along the length of the room in one row (see Fig. A2.1.).

Area covered by full tiles

4.8 m

Fig. A2.1

Since the breadth of the room is 5 metres, we have $\frac{5}{0.3} = 16.67$. So, we can fit in 16 tiles in a column. Since $16 \times 0.3 = 4.8$, $5 - 4.8 = 0.2$ metres along the breadth will not be covered by tiles. This part will have to be covered by cutting the other tiles. The breadth of the floor left uncovered, 0.2 metres, is more than half the length of a tile, which is 0.3 m. So we cannot break a tile into two equal halves and use both the halves to cover the remaining portion.

Mathematical Description : We have:

Total number of tiles required = (Number of tiles along the length

× Number of tiles along the breadth) + Number of tiles along the uncovered area (1)

ధృవీకరణ అని పిలుస్తారు. నమూనా విధానంలో ఇది చాలా ముఖ్యమైన దశ. ఈ విభాగంలో ఈ సోపానంను మేం మీకు పరిచయం చేస్తాం.

మొదట, మనం ధృవీకరణ తరువాత మన నమూనాని మార్పు చేయాల్సిన అవసరంలేని ఒక ఉదాహరణను చూద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : మీకు 6 మీటర్ల పొడవు, 5 మీటర్ల వెడల్పు ఉన్న గది ఉందనుకోండి. మీరు గది యొక్క నేలను 30 సెం.మీ. భుజం కలిగిన చతురస్రాకార మొజాయిక్ టైల్స్ తో కప్పాలని అనుకుంటున్నారు. మీకు ఎన్ని టైల్స్ అవసరం అవుతాయి? గణిత నమూనాను నిర్మించడం ద్వారా దీనిని పరిష్కరించండి.

సాధన : సూత్రీకరణ : సమస్యను పరిష్కరించడానికి గది యొక్క వైశాల్యం మరియు టైల్ యొక్క వైశాల్యాన్ని మనం పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. టైల్ యొక్క భుజం 0.3 మీ. పొడవు 6 మీ. కనుక, మనం $\frac{6}{0.3}$ లో ఒక వరసలో గది పొడవు వెంబడి 20 టైల్స్ అమర్చవచ్చు (పటం A2.1చూడండి).

పూర్తి టైల్స్‌తో కప్పబడిన ప్రాంతం

4.8 మీ.

పటం. A2.1

గది వెడల్పు 5 మీటర్లు కనుక, మనకు $\frac{5}{0.3} = 16.67$ వస్తుంది. కాబట్టి, మనం ఒక నిలువ వరుసలో 16 టైల్స్‌ని అమర్చవచ్చును. $16 \times 0.3 = 4.8$, $5 - 4.8 = 0.2$ మీ. వెడల్పు వెంబడి టైల్స్ అమర్చబడి ఉండవు. ఇతర టైల్స్‌ను కత్తిరించడం ద్వారా ఈ భాగాన్ని పూర్తి చేయాల్సి ఉంటుంది. 0.2 మీ. పూర్తి చేయబడని నేల యొక్క వెడల్పు టైల్ యొక్క పొడవులో సగం పొడవు అనగా 0.3 మీ. కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది. కాబట్టి మనం ఒక టైల్‌ను రెండు సమాన భాగాలుగా విడగొట్టి మరియు మిగిలిన భాగాన్ని పూర్తిగా కప్పలేము.

గణిత వివరణ :

అవసరమైన మొత్తం టైల్స్ సంఖ్య = (పొడవు వెంబడి టైల్స్ సంఖ్య

× వెడల్పు వెంబడి టైల్స్ సంఖ్య) + కప్పబడని ప్రాంతం వెంబడి ఉన్న టైల్స్ సంఖ్య

(1)

Solution : As we said above, the number of tiles along the length is 20 and the number of tiles along the breadth is 16. We need 20 more tiles for the last row. Substituting these values in (1), we get $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$.

Interpretation : We need 340 tiles to cover the floor.

Validation : In real-life, your mason may ask you to buy some extra tiles to replace those that get damaged while cutting them to size. This number will of course depend upon the skill of your mason! But, we need not modify Equation (1) for this. This gives you a rough idea of the number of tiles required. So, we can stop here.

Let us now look at another situation now.

Example 5 : In the year 2000, 191 member countries of the U.N. signed a declaration. In this declaration, the countries agreed to achieve certain development goals by the year 2015. These are called the *millennium development goals*. One of these goals is to promote gender equality. One indicator for deciding whether this goal has been achieved is the ratio of girls to boys in primary, secondary and tertiary education. India, as a signatory to the declaration, is committed to improve this ratio. The data for the percentage of girls who are enrolled in primary schools is given in Table A2.1.

Table A2.1

Year	Enrolment (in %)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

Source : *Educational statistics, webpage of Department of Education, GOI.*

* *indicates that the data is provisional.*

సాధన : మనం పైన చెప్పినట్లుగా, పొడవు వెంబడి టైల్స్ సంఖ్య 20 మరియు వెడల్పు వెంబడి టైల్స్ సంఖ్య 16. చివరి వరస కొరకు మనకు మరో 20 టైల్స్ అవసరం అవుతాయి. ఈ విలువలను (1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే, మనకు $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$ వస్తుంది.

వ్యాఖ్యానం : నేలను పూర్తిగా కప్పడానికి మనకు 340 టైల్స్ అవసరం అవుతాయి.

ధ్రువీకరణ : నిజజీవితంలో, మీ మేస్త్రీ టైల్స్‌ను కత్తిరించినప్పుడు పాడైపోయిన వాటిని మార్చడం కొరకు మిమ్మల్ని అదనపు టైల్స్‌ని కొనుగోలు చేయమని అడగవచ్చు. ఈ సంఖ్య మీ మేస్త్రీ యొక్క నైపుణ్యంపై ఆధారపడి ఉంటుంది! అయితే, దీని కొరకు మనం సమీకరణం (1)ని సవరించాల్సిన అవసరం లేదు. అవసరమైన టైల్స్ సంఖ్య గురించి ఇది మీకు ఒక ప్రాథమిక ఆలోచనను ఇస్తుంది. కాబట్టి, మేము ఇక్కడ ఆపవచ్చు.

ఇప్పుడు మనం మరో పరిస్థితిని చూద్దాం.

ఉదాహరణ 5 : 2000 సంవత్సరంలో ఐక్యరాజ్యసమితిలోని 191 సభ్య దేశాలు ఒప్పందంపై సంతకం చేశారు. ఈ ఒప్పందంలో, దేశాలు 2015 సంవత్సరం నాటికి కొన్ని అభివృద్ధి లక్ష్యాలను సాధించడానికి అంగీకరించాయి. వీటిని *సహస్రాబ్ది అభివృద్ధి లక్ష్యాలు* అంటారు. ఈ లక్ష్యాలలో ఒకటి లింగ సమానత్వాన్ని ప్రోత్సహించడం. ప్రాథమిక, మాధ్యమిక మరియు తృతీయ విద్యలో బాలికలు మరియు బాలుర నిష్పత్తి ఈ లక్ష్యాన్ని సాధించారా లేదా అని నిర్ణయించడానికి ఒక సూచిక. ఒప్పందంపై సంతకం చేసిన భారతదేశం, ఈ నిష్పత్తిని మెరుగుపరచడానికి కట్టుబడి ఉంది. ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో చేరిన బాలికల శాతం యొక్క దత్తాంశాన్ని పట్టిక A2.1లో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక A2.1

సంవత్సరం	**నమోదు (% లలో)**
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

మూలం : *విద్యా గణాంకాలు, డిపార్ట్ మెంట్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషన్ యొక్క వెబ్ పేజీ, GOI.*

* *డేటా తాత్కాలికమైనదని సూచిస్తుంది.*

Using this data, mathematically describe the rate at which the proportion of girls enrolled in primary schools grew. Also, estimate the year by which the enrolment of girls will reach 50%.

Solution : Let us first convert the problem into a mathematical problem.

Step 1 : Formulation : Table A2.1 gives the enrolment for the years 1991-92, 1992-93, etc. Since the students join at the beginning of an academic year, we can take the years as 1991, 1992, etc. Let us assume that the percentage of girls who join primary schools will continue to grow at the same rate as the rate in Table A2.1. So, the number of years is important, not the specific years. (To give a similar situation, when we find the simple interest for, say, ₹ 1500 at the rate of 8% for three years, it does not matter whether the three-year period is from 1999 to 2002 or from 2001 to 2004. What is important is the interest rate in the years being considered). Here also, we will see how the enrolment grows after 1991 by comparing the number of years that has passed after 1991 and the enrolment. Let us take 1991 as the 0th year, and write 1 for 1992 since 1 year has passed in 1992 after 1991. Similarly, we will write 2 for 1993, 3 for 1994, etc. So, Table A2.1 will now look like as Table A2.2.

Table A2.2

Year	Enrolment (in %)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ఈ డేటాను ఉపయోగించి, ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో చేరిన బాలికల నిష్పత్తి ఏ రేటుతో పెరిగిందో గణితపరంగా వివరించండి. అలాగే, బాలికల నమోదు 50% కు చేరుకునే సంవత్సరాన్ని అంచనా వేయండి.

సాధన : ముందుగా సమస్యను గణిత సమస్యగా మారుద్దాం.

సోపానం 1 : సూత్రీకరణ : 1991–92, 1992–93 మొదలైన సంవత్సరాలకు సంబంధించిన నమోదును పట్టిక A2.1 ఇస్తుంది. ఒక విద్యాసంవత్సరం ప్రారంభంలో విద్యార్థులు చేరడం వల్ల, మనం 1991, 1992 మొదలైన సంవత్సరాలను తీసుకోవచ్చు. ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో చేరే బాలికల శాతం పట్టిక A2.1లో ఉన్న రేటుకు సమానంగా పెరుగుతూనే ఉంటుందనుకుందాం. కాబట్టి, సంవత్సరాల సంఖ్య ముఖ్యం, నిర్దిష్ట సంవత్సరాలు కాదు. (ఇలాంటి పరిస్థితిని ఇవ్వడానికి, మూడు సంవత్సరాలకు 8% చొప్పున ? 1500 కొరకు సరళ వడ్డీని మనం కనుగొన్నప్పుడు, మూడు సంవత్సరాల కాలవ్యవధి 1999 నుంచి 2002 వరకు లేదా 2001 నుంచి 2004 వరకు ఉంటుందా అనేది ముఖ్యం కాదు. ముఖ్యమైన విషయం ఏమిటంటే, పరిగణనలోకి తీసుకోబడుతున్న సంవత్సరాల్లో వడ్డీ రేటు). ఇక్కడ కూడా, 1991 తరువాత గడిచిపోయిన సంవత్సరాల సంఖ్యను మరియు నమోదును పోల్చడం ద్వారా 1991 తరువాత నమోదు ఎలా పెరుగుతుందో చూద్దాం. 1991ని 0వ సంవత్సరంగా తీసుకుందాం. 1991 తర్వాత 1992లో 1 సంవత్సరం గడిచిపోయింది కనుక 1992కు 1 రాయండి. అదేవిధంగా, మనం 1993 కొరకు 2, 1994 కొరకు 3 మొదలైనవి రాస్తాం. కాబట్టి, పట్టిక A2.1 ఇప్పుడు పట్టిక A2.2 వలే కనిపిస్తుంది.

పట్టిక A2.2

సంవత్సరం	నమోదు (% లలో)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

The increase in enrolment is given in the following table :

Table A2.3

Year	Enrolment (in %)	Increase
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

At the end of the one-year period from 1991 to 1992, the enrolment has increased by 0.7% from 41.9% to 42.6%. At the end of the second year, this has increased by 0.1%, from 42.6% to 42.7%. From the table above, we cannot find a definite relationship between the number of years and percentage. But the increase is fairly steady. Only in the first year and in the 10th year there is a jump. The mean of the values is

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

Let us assume that the enrolment steadily increases at the rate of 0.22 per cent.

Mathematical Description : We have assumed that the enrolment increases steadily at the rate of 0.22% per year.

So, the Enrolment Percentage (EP) in the first year $= 41.9 + 0.22$

EP in the second year $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

EP in the third year $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

So, the enrolment percentage in the nth year $= 41.9 + 0.22n$, for $n \geq 1$. (1)

నమోదులో పెరుగుదల దిగువ పట్టికలో ఇవ్వబడింది:

పట్టిక A2.3

సంవత్సరం	నమోదు (% లలో)	పెరుగుదల
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 నుండి 1992 వరకు ఒక సంవత్సర కాలం ముగిసే సమయానికి, నమోదు 41.9% నుండి 42.6% కు 0.7% పెరిగింది. రెండవ సంవత్సరం ముగిసే సమయానికి ఇది 0.1% పెరిగింది, ఇది 42.6% నుండి 42.7%కి పెరిగింది. పై పట్టిక నుండి, సంవత్సరాల సంఖ్య మరియు శాతం మధ్య ఒక నిర్దిష్ట సంబంధాన్ని మనం కనుగొనలేము. కానీ పెరుగుదల చాలా స్థిరంగా ఉంది. మొదటి సంవత్సరంలో మరియు 10వ సంవత్సరంలో మాత్రమే ఎక్కువగా పెరిగి ఉంటుంది. విలువల యొక్క సగటు

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

నమోదు 0.22 శాతం చొప్పున క్రమంగా పెరుగుతుందని అనుకుందాం..

గణిత వివరణ: సంవత్సరానికి 0.22% చొప్పున నమోదు క్రమంగా పెరుగుతుందని మేము ఊహించాము.

కాబట్టి, మొదటి సంవత్సరంలో నమోదు శాతం (EP) $= 41.9 + 0.22$

రెండవ సంవత్సరంలో $\text{EP} = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

మూడవ సంవత్సరంలో $\text{EP} = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

కాబట్టి, n సంవత్సరంలో నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22n$, $n \geq 1$ కొరకు. (1)

Now, we also have to find the number of years by which the enrolment will reach 50%. So, we have to find the value of n in the equation or formula

$$50 = 41.9 + 0.22n \qquad (2)$$

Step 2 : Solution : Solving (2) for n, we get

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

Step 3 : Interpretation : Since the number of years is an integral value, we will take the next higher integer, 37. So, the enrolment percentage will reach 50% in 1991 + 37 = 2028.

In a word problem, we generally stop here. But, since we are dealing with a real-life situation, we have to see to what extent this value matches the real situation.

Step 4 : Validation: Let us check if Formula (2) is in agreement with the reality. Let us find the values for the years we already know, using Formula (2), and compare it with the known values by finding the difference. The values are given in Table A2.4.

Table A2.4

Year	Enrolment (in %)	Values given by (2) (in %)	Difference (in %)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

As you can see, some of the values given by Formula (2) are less than the actual values by about 0.3% or even by 0.5%. This can give rise to a difference of about 3 to 5 years since the increase per year is actually 1% to 2%. We may decide that this

ఇప్పుడు, నమోదు 50% కు చేరుకునే సంవత్సరాల సంఖ్యను కూడా మనం కనుగొనాలి. కాబట్టి, సమీకరణం లేదా సూత్రంలో n యొక్క విలువను మనం కనుగొనాలి.

$$50 = 41.9 + 0.22n \qquad (2)$$

సోపానం 2 : పరిష్కారం : n కొరకు (2)ని సాధించడం వలన మనం

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$ ను పొందుతాం.

సోపానం 3 : వ్యాఖ్యానం : సంవత్సరాల సంఖ్య ఒక పూర్ణాంక విలువ కనుక, మనం తదుపరి అధిక పూర్ణాంకం, 37 ను తీసుకుంటాం. అందువల్ల, నమోదు శాతం $1991 + 37 = 2028$ కు చేరుకుంటుంది.

పద సమస్యలో, మనం సాధారణంగా ఇక్కడే ఆగిపోతాం. కానీ, మనం నిజజీవిత పరిస్థితితో వ్యవహరిస్తున్నాం కాబట్టి, ఈ విలువ వాస్తవ పరిస్థితికి ఏ మేరకు సరిపోతుందో చూడాలి.

సోపానం 4 : ధృవీకరణ: సూత్రం (2) వాస్తవికత తో ఏకీభవిస్తోందా లేదా అని సరిచూద్దాం. ఫార్ములా (2)ను ఉపయోగించి మనకు ఇప్పటికే తెలిసిన సంవత్సరాల విలువలను కనుగొందాం మరియు వ్యత్యాసాన్ని కనుగొనడం ద్వారా తెలిసిన విలువలతో దానిని పోల్చుదాం. ఈ విలువలు పట్టిక A2.4లో ఇవ్వబడ్డాయి.

పట్టిక A2.4

సంవత్సరం	నమోదు (% లలో)	(2) ద్వారా ఇవ్వబడ్డ విలువలు (%లలో)	వ్యత్యాసం (% లలో)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

సూత్రం (2) ద్వారా ఇవ్వబడ్డ కొన్ని విలువలు వాస్తవ విలువల కంటే సుమారు 0.3% లేదా 0.5% తక్కువగా ఉన్నాయి. ఇది సుమారు 3 నుండి 5 సంవత్సరాల వ్యత్యాసానికి దారితీస్తుంది, ఎందుకంటే సంవత్సరానికి పెరుగుదల వాస్తవానికి 1% నుండి 2% వరకు ఉంటుంది. దీనిని మనం నిర్ణయించుకోవచ్చు.

much of a difference is acceptable and stop here. In this case, (2) is our mathematical model.

Suppose we decide that this error is quite large, and we have to improve this model. Then we have to go back to Step 1, the formulation, and change Equation (2). Let us do so.

Step 1 : Reformulation : We still assume that the values increase steadily by 0.22%, but we will now introduce a correction factor to reduce the error. For this, we find the mean of all the errors. This is

$$\frac{0 + 0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

We take the mean of the errors, and correct our formula by this value.

Revised Mathematical Description : Let us now add the mean of the errors to our formula for enrolment percentage given in (2). So, our corrected formula is:

Enrolment percentage in the nth year $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$,

for $n \geq 1$ (3)

We will also modify Equation (2) appropriately. The new equation for n is:

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad (4)$$

Step 2 : Altered Solution : Solving Equation (4) for n, we get

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

Step 3 : Interpretation: Since $n = 36$, the enrolment of girls in primary schools will reach 50% in the year 1991 + 36 = 2027.

Step 4 : Validation: Once again, let us compare the values got by using Formula (4) with the actual values. Table A2.5 gives the comparison.

చాలా వ్యత్యాసం ఆమోదయోగ్యమైనది మరియు ఇక్కడ ఆగిపోతుంది. ఈ సందర్భంలో, (2) అనేది మన గణిత నమూనా.

ఈ దోషం చాలా పెద్దదని మనం నిర్ణయించుకుందాం, మరియు మనం ఈ నమూనాను మెరుగుపరచాలి. తరువాత మనం తిరిగి సోపానం1 సూత్రీకరణకు వెళ్లాలి మరియు సమీకరణం(2)ని మార్చాలి. అలా చేద్దాం.

సోపానం 1 : పునఃనిర్మాణం : మనం నమోదు విలువను 0.22% చొప్పున పెరుగుతాయని మనం ఇప్పటికీ అనుకున్నప్పటికీ, మనం దోషాన్ని తగ్గించడం కొరకు మనం దోషనివారణ స్థిరాంకాన్ని ప్రవేశపెడతాం. దీని కొరకు మనం అన్ని దోషాల యొక్క సగటును కనుగొంటాం. ఇది

$$\frac{0 + 0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

ఈ బేధాల యొక్క సరాసరిని తీసుకొని మళ్ళీ మన సూత్రాన్ని సరిదిద్దుకోవచ్చు.

పునః గణిత వివరణ: (2)లో నమోదు శాతంకు ఇచ్చిన సూత్రానికి దోషాల యొక్క సగటును కలపడం వలన క్రింది సరైన సూత్రం లభిస్తుంది.

nవ సంవత్సరంలో నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n,$

కొరకు $n \geq 1$ (3)

మనం సమీకరణం(2)ని కూడా సముచితంగా మార్పు చేస్తాం. n కొరకు కొత్త సమీకరణం:

$$50 = 42.08 + 0.22n \tag{4}$$

సోపానం 2 : సవరించిన సాధన : n కొరకు సమీకరణ (4) ను సాధిస్తే, మనకు

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36 \text{ వస్తుంది.}$$

సోపానం 3 : వ్యాఖ్యానం: $n = 36$, నుండి ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదు $1991 + 36 = 2027$ సంవత్సరంలో 50% కు చేరుకుంటుంది.

సోపానం 4 : ధృవీకరణ: మరోసారి, సూత్రం (4) తో వచ్చిన విలువలను వాస్తవ విలువలతో పోల్చుదాం. పట్టిక A2.5 ఈ పోలికను ఇస్తుంది.

Table A2.5

Year	Enrolment (in %)	Values given by (2)	Difference between values	Values given by (4)	Difference between values
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

As you can see, many of the values that (4) gives are closer to the actual value than the values that (2) gives. The mean of the errors is 0 in this case.

We will stop our process here. So, Equation (4) is our mathematical description that gives a mathematical relationship between years and the percentage of enrolment of girls of the total enrolment. We have constructed a mathematical model that describes the growth.

The process that we have followed in the situation above is called mathematical modelling.

We have tried to construct a mathematical model with the mathematical tools that we already have. There are better mathematical tools for making predictions from the data we have. But, they are beyond the scope of this course. Our aim in constructing this model is to explain the process of modelling to you, not to make accurate predictions at this stage.

You may now like to model some real-life situations to check your understanding of our discussion so far. Here is an Exercise for you to try.

పట్టిక A2.5

సంవత్సరం	నమోదు (% లలో)	(2) ద్వారా ఇవ్వబడ్డ విలువలు	విలువల మధ్య వ్యత్యాసం	(4) ద్వారా ఇవ్వబడ్డ విలువలు	విలువల మధ్య వ్యత్యాసం
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

మీరు గమనించినట్లుగా, (4) ఇచ్చే అనేక విలువలు (2) ఇచ్చే విలువల కంటే వాస్తవ విలువకు దగ్గరగా ఉంటాయి. ఈ సందర్భంలో దోషాల యొక్క సగటు 0..

మేము ఇక్కడ మా ప్రక్రియను ఆపివేస్తాము. కాబట్టి, సమీకరణం (4) అనేది మనకు సంవత్సరాలు మరియు మొత్తం నమోదులో బాలికల నమోదు శాతాల మధ్య గణిత సంబంధాన్ని తెలిపే గణిత వివరణను ఇస్తుంది. పెరుగుదలను వివరించే ఒక గణిత నమూనాను మనం నిర్మించాం.

పై పరిస్థితిలో మనం అనుసరించిన ప్రక్రియను గణిత నమూనీకరణ అంటారు.

మన వద్ద ఇప్పటికే ఉన్న గణిత ఉపకరణాలతో ఒక గణిత నమూనాను నిర్మించడానికి మేము ప్రయత్నించాము. మన వద్ద ఉన్న దత్తాంశం నుండి అంచనాలు చేయడానికి మెరుగైన గణిత సాధనాలు ఉన్నాయి. కానీ, వారు ఈ కోర్సు యొక్క పరిధికి మించి ఉన్నారు. ఈ నమూనాని నిర్మించడంలో మా లక్ష్యం నమూనీకరణ ప్రక్రియను మీకు వివరించడం, ఈ దశలో ఖచ్చితమైన అంచనాలు వేయడం కాదు.

ఇప్పటి వరకు మా చర్చపై మీ అవగాహనను తనిఖీ చేయడానికి మీరు ఇప్పుడు కొన్ని నిజ జీవిత పరిస్థితులను నమూనా చేయడానికి ఇష్టపడవచ్చు. మీరు ప్రయత్నించడానికి ఇక్కడ ఒక అభ్యాసం ఉంది.

EXERCISE A2.2

1. We have given the timings of the gold medalists in the 400-metre race from the time the event was included in the Olympics, in the table below. Construct a mathematical model relating the years and timings. Use it to estimate the timing in the next Olympics.

Table A2.6

Year	Timing (in seconds)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 The Process of Modelling, its Advantages and Limitations

Let us now conclude our discussion by drawing out aspects of mathematical modelling that show up in the examples we have discussed. With the background of the earlier sections, we are now in a position to give a brief overview of the steps involved in modelling.

Step 1 : Formulation : You would have noticed the difference between the formulation part of Example 1 in Section A2.2 and the formulation part of the model we discussed in A2.3. In Example 1, all the information is in a readily usable form. But, in the model given in A2.3 this is not so. Further, it took us some time to find a mathematical description. We tested our first formula, but found that it was not as good as the second one we got. This is usually true in general, i.e. when trying to model real-life situations; the first model usually needs to be revised. When we are solving a real-life problem, formulation can require a lot of time. For example, Newton's three laws of motion, which are mathematical descriptions of motion, are simple enough to state. But, Newton arrived at these laws after studying a large amount of data and the work the scientists before him had done.

అభ్యాసం A 2.2

1. 400 మీటర్ల పరుగు పందెంలో స్వర్ణ పతక విజేతల టైమింగ్స్ ను ఒలింపిక్స్ లో చేర్చినప్పటి నుంచి ఈ క్రింది పట్టికలో పొందుపరిచాం. సంవత్సరాలు మరియు సమయాలకు సంబంధించిన గణిత నమూనాను రూపొందించండి. తదుపరి ఒలింపిక్స్ లో సమయాన్ని అంచనా వేయడానికి దీనిని ఉపయోగించండి..

పట్టిక A2.6

సంవత్సరం	సమయం (సెకన్లలో)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 నమూనీకరణ ప్రక్రియ, దాని ప్రయోజనాలు మరియు పరిమితులు

ఇప్పుడు మనం చర్చించిన ఉదాహరణలలో కనిపించే గణిత నమూనా యొక్క అంశాలను గీయడం ద్వారా మన చర్చను ముగిద్దాం. మునుపటి విభాగాల నేపథ్యంతో, ఇప్పుడు నమూనీకరణలో ఇమిడి ఉన్న దశల యొక్క సంక్షిప్త అవలోకనాన్ని ఇవ్వగల స్థితిలో మేము ఉన్నాము.

సోపానం 1 : **సూత్రీకరణ :** విభాగం A 2.2లోని ఉదాహరణ 1 యొక్క సూత్రీకరణ భాగానికి మరియు A2.3లో మనం చర్చించిన నమూనా యొక్క సూత్రీకరణ భాగానికి మధ్య వ్యత్యాసాన్ని మీరు గమనించి ఉంటారు. ఉదాహరణ 1లో, మొత్తం సమాచారం తక్షణం ఉపయోగించదగిన రూపంలో ఉంటుంది. కానీ, A2.3లో ఇవ్వబడ్డ నమూనాలో ఇది అలా కాదు. ఇంకా, గణిత వివరణను కనుగొనడానికి మాకు కొంత సమయం పట్టింది. మేము మా మొదటి సూత్రాన్ని పరీక్షించాము, కాని అది మాకు లభించిన రెండవ సూత్రం వలె మంచిది కాదని కనుగొన్నాం. ఇది సాధారణంగా నిజం, అంటే నిజ జీవిత పరిస్థితులను నమూనా చేయడానికి ప్రయత్నిస్తున్నప్పుడు మొదటి నమూనాను సాధారణంగా సవరించాల్సిన అవసరం ఉంది. మనం నిజజీవిత సమస్యను పరిష్కరిస్తున్నప్పుడు, సూత్రీకరణకు చాలా సమయం అవసరం కావచ్చు. ఉదాహరణకు, న్యూటన్ యొక్క మూడు చలన నియమాలు, ఇవి చలనానికి సంబంధించిన గణిత వివరణలు, పేర్కొనడానికి తగినంత సరళమైనవి. కానీ, న్యూటన్ పెద్ద మొత్తంలో దత్తాంశాన్ని అధ్యయనం చేసిన తరువాత మరియు అతని ముందు శాస్త్రవేత్తలు చేసిన పనిని అధ్యయనం చేసిన తరువాత ఈ నియమాలకు వచ్చాడు.

Formulation involves the following three steps :

(i) Stating the problem : Often, the problem is stated vaguely. For example, the broad goal is to ensure that the enrolment of boys and girls are equal. This may mean that 50% of the total number of boys of the school-going age and 50% of the girls of the school-going age should be enrolled. The other way is to ensure that 50% of the school-going children are girls. In our problem, we have used the second approach.

(ii) Identifying relevant factors : Decide which quantities and relationships are important for our problem and which are unimportant and can be neglected. For example, in our problem regarding primary schools enrolment, the percentage of girls enrolled in the previous year can influence the number of girls enrolled this year. This is because, as more and more girls enrol in schools, many more parents will feel they also have to put their daughters in schools. But, we have ignored this factor because this may become important only after the enrolment crosses a certain percentage. Also, adding this factor may make our model more complicated.

(iii) Mathematical Description : Now suppose we are clear about what the problem is and what aspects of it are more relevant than the others. Then we have to find a relationship between the aspects involved in the form of an equation, a graph or any other suitable mathematical description. If it is an equation, then every important aspect should be represented by a variable in our mathematical equation.

Step 2 : Finding the solution : The mathematical formulation does not give the solution. We have to solve this mathematical equivalent of the problem. This is where your mathematical knowledge comes in useful.

Step 3 : Interpretating the solution : The mathematical solution is some value or values of the variables in the model. We have to go back to the real-life problem and see what these values mean in the problem.

Step 4 : Validating the solution : As we saw in A2.3, after finding the solution we will have to check whether the solution matches the reality. If it matches, then the mathematical model is acceptable. If the mathematical solution does not match, *we go back to the formulation step* again and try to improve our model.

This step in the process is one major difference between solving word problems and mathematical modelling. This is one of the most important step in modelling that is missing in word problems. Of course, it is possible that in some real-life situations, we do not need to validate our answer because the problem is simple and we get the correct solution right away. This was so in the first model we considered in A2.3.

సూత్రీకరణలో దిగువ పేర్కొన్న మూడు దశలుంటాయి :

(i) సమస్యను పేర్కొనడం: తరచుగా, సమస్య అస్పష్టంగా చెప్పబడుతుంది. ఉదాహరణకు, బాలురు మరియు బాలికల నమోదు సమానంగా ఉండేలా చూడటం అనేది విస్తృత లక్ష్యం. దీని అర్థం స్కూలుకు వెళ్ళే వయస్సులోని మొత్తం బాలురలో 50% మంది మరియు పాఠశాలకు వెళ్ళే వయస్సులోని బాలికలలో 50% మంది నమోదు చేసుకోవాలి. పాఠశాలకు వెళ్లే పిల్లల్లో 50% మంది బాలికలు ఉండేలా చూడటం మరో మార్గం. మా సమస్యలో, మేము రెండవ విధానాన్ని ఉపయోగించాము..

(ii) సంబంధిత కారకాలను గుర్తించడం: మన సమస్యకు ఏ పరిమాణాలు మరియు సంబంధాలు ముఖ్యమైనవి మరియు ఏవి అప్రధానమైనవి మరియు ఏవి అప్రధానమైనవి మరియు నిర్లక్ష్యం చేయబడతాయో నిర్ణయించండి. ఉదాహరణకు, ప్రాథమిక పాఠశాలల నమోదుకు సంబంధించిన మా సమస్యలో, మునుపటి సంవత్సరంలో నమోదు చేసుకున్న బాలికల శాతం ఈ సంవత్సరం నమోదు చేసుకున్న బాలికల సంఖ్యను ప్రభావితం చేస్తుంది. ఎందుకంటే, ఎక్కువ మంది బాలికలు పాఠశాలల్లో చేరడంతో, చాలా మంది తల్లిదండ్రులు తమ కుమార్తెలను కూడా పాఠశాలల్లో ఉంచాల్సిన అవసరం ఉందని భావిస్తారు. కానీ, మనం ఈ కారకాన్ని విస్మరించాం ఎందుకంటే నమోదు ఒక నిర్దిష్ట శాతాన్ని దాటిన తరువాత మాత్రమే ఇది ముఖ్యమైనది మారవచ్చు. అలాగే, ఈ కారకాన్ని జోడించడం వల్ల మన నమూనా మరింత సంక్లిష్టంగా మారుతుంది.

(iii) గణిత వివరణ : సమస్య ఏమిటి మరియు దానిలోని ఏ అంశాలు ఇతరుల కంటే ఎక్కువ సంబంధితమైనవి అనే దాని గురించి మనం ఇప్పుడు స్పష్టంగా ఉన్నామని అనుకుందాం. అప్పుడు మనం సమీకరణం, గ్రాఫ్ లేదా ఏదైనా ఇతర తగిన గణిత వివరణ రూపంలో ఇమిడి ఉండే అంశాల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొనాలి. ఒకవేళ ఇది సమీకరణం అయితే, అప్పుడు ప్రతి ముఖ్యమైన అంశాన్నీ మన గణిత సమీకరణంలోని చరరాశి ద్వారా ప్రాతినిధ్యపరచాలి.

సోపానం 2 : సాధనను కనుగొనడం : గణిత సూత్రీకరణ సాధన ఇవ్వదు. సమస్య యొక్క ఈ గణిత సమానత్వాన్ని మనం పరిష్కరించాలి. ఇక్కడే మీ గణిత పరిజ్ఞానం ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది..

సోపానం3 : ద్రావణానికి భాష్యం చెప్పడం : గణిత సాధన అనేది నమూనాలోని చరరాశులకు ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విలువలు కనుగొనుట. మనం తిరిగి నిజ జీవిత సమస్యలలోకి వెళ్లి, ఆ సమస్యలో ఈ విలువల అర్థం ఏమిటో చూడాలి.

సోపానం 4 : సాధనను ధృవీకరించడం: A2. 3లో మనం చూసినట్లుగా, సాధన కనుగొన్న తరువాత, సాధన వాస్తవికతతో సరిపోలుతుందో లేదో మనం తనిఖీ చేయాల్సి ఉంటుంది. ఒకవేళ ఇది సరిపోతే, అప్పుడు గణిత నమూనా ఆమోదించబడుతుంది. ఒకవేళ గణిత సాధన సరిపోనట్లయితే, మనం మళ్లీ సూత్రీకరణ సోపానంకు తిరిగి వెళ్లి, మన నమూనాను మెరుగుపరుచుకోవడానికి ప్రయత్నిస్తాం.

ఈ ప్రక్రియలో ఈ సోపానం పద సమస్యలను పరిష్కరించడం మరియు గణిత నమూనీకరణల మధ్య ఒక ప్రధాన వ్యత్యాసం అగును. పద సమస్యలలో లోపించిన నమూనీకరణ లో ఇది అత్యంత ముఖ్యమైన దశలలో ఒకటి. వాస్తవానికి, కొన్ని నిజ జీవిత పరిస్థితులలో, మన సమాధానాన్ని ధృవీకరించాల్సిన అవసరం లేదు, ఎందుకంటే సమస్య సరళమైనది మరియు మనకు వెంటనే సరైన పరిష్కారం లభిస్తుంది. A2. 3లో మనం పరిశీలించిన మొదటి నమూనా అలాంటిదే.

We have given a summary of the order in which the steps in mathematical modelling are carried out in Fig. A2.2 below. Movement from the validation step to the formulation step is shown using a **dotted arrow**. This is because it may not be necessary to carry out this step again.

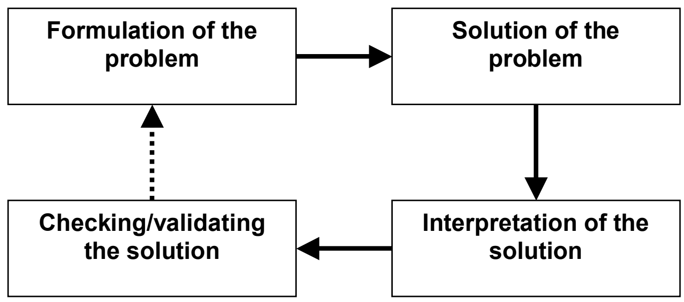


Fig.A2.2

Now that you have studied the stages involved in mathematical modelling, let us discuss some of its aspects.

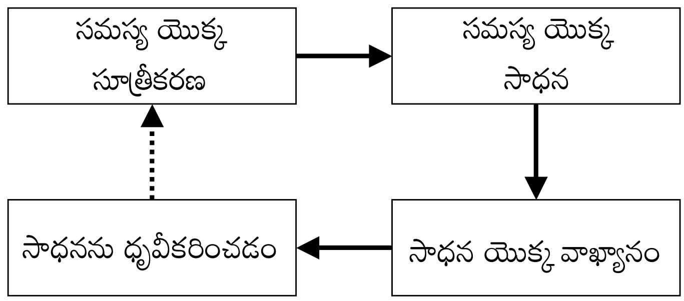
The *aim* of mathematical modelling is to get some useful information about a real-world problem by converting it into a mathematical problem. This is especially useful when it is not possible or very expensive to get information by other means such as direct observation or by conducting experiments.

You may also wonder why we should undertake mathematical modelling? Let us look at some **advantages of modelling**. Suppose we want to study the corrosive effect of the discharge of the Mathura refinery on the Taj Mahal. We would not like to carry out experiments on the Taj Mahal directly since it may not be safe to do so. Of course, we can use a scaled down physical model, but we may need special facilities for this, which may be expensive. Here is where mathematical modelling can be of great use.

Again, suppose we want to know how many primary schools we will need after 5 years. Then, we can only solve this problem by using a mathematical model. Similarly, it is only through modelling that scientists have been able to explain the existence of so many phenomena.

You saw in Section A2.3, that we could have tried to improve the answer in the second example with better methods. But we stopped because we do not have the mathematical tools. This can happen in real-life also. Often, we have to be satisfied with very approximate answers, because mathematical tools are not available. For example, the model equations used in modelling weather are so complex that mathematical tools to find exact solutions are not available.

గణిత నమూనాలో దశలను ఏ క్రమంలో చేపట్టాలో పటంలో మనం ఒక సారాంశాన్ని ఇచ్చాము. దిగువ A2.2. **చుక్కల బాణం** ఉపయోగించి ధ్రువీకరణ దశ నుంచి సూత్రీకరణ దశకు మార్గం చూపించబడుతుంది. ఎందుకంటే ఈ దశను మళ్లీ చేపట్టాల్సిన అవసరం ఉండకపోవచ్చు.



పటం. A2.2

ఇప్పుడు మీరు గణిత నమూనాలో ఇమిడి ఉన్న దశలను అధ్యయనం చేశారు, దానిలోని కొన్ని అంశాలను చర్చిద్దాం.

ఒక వాస్తవ ప్రపంచ సమస్యను గణిత సమస్యగా మార్చడం ద్వారా దాని గురించి కొంత ఉపయోగకరమైన సమాచారాన్ని పొందడమే గణిత నమూనా యొక్క లక్ష్యం. ప్రత్యక్ష పరిశీలన లేదా ప్రయోగాలు నిర్వహించడం వంటి ఇతర మార్గాల ద్వారా సమాచారాన్ని పొందడం సాధ్యం కానప్పుడు లేదా చాలా ఖరీదైనదిగా ఉన్నప్పుడు ఇది ప్రత్యేకంగా ఉపయోగపడుతుంది.

మనం గణిత నమూనాను ఎందుకు చేపట్టాలని కూడా మీరు ఆశ్చర్యపోవచ్చు. **నమూనా యొక్క కొన్ని ప్రయోజనాలను** మనం ఇప్పుడు చూద్దాం. తాజ్ మహల్ పై మధుర నూనెశుద్ధి కర్మగారం విడుదల చేసే కలుష్య ప్రభావాన్ని మనం అధ్యయనం చేయాలనుకుంటున్నారనుకోండి. తాజ్ మహల్ పై నేరుగా ప్రయోగాలు చేయడం మనకు ఇష్టం లేదు, ఎందుకంటే అలా చేయడం సురక్షితం కాకపోవచ్చు. వాస్తవానికి, మనం ఒక చిన్న ప్రతిరూప నమూనాను ఉపయోగించవచ్చు, కానీ దీని కోసం మనకు ప్రత్యేక సౌకర్యాలు అవసరం కావచ్చు, అది ఖరీదైనది కావచ్చు. ఇక్కడ గణిత నమూనా అనేది చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

మళ్ళీ, 5 సంవత్సరాల తరువాత మనకు ఎన్ని ప్రాథమిక పాఠశాలలు అవసరమవుతాయో తెలుసుకోవాలని అనుకుందాం. అప్పుడు, మనం గణిత నమూనాను ఉపయోగించి మాత్రమే ఈ సమస్యను పరిష్కరించగలం. అదేవిధంగా, నమూనీకరణ ద్వారా మాత్రమే శాస్త్రవేత్తలు అనేక దృగ్విషయాల ఉనికిని వివరించగలిగారు.

రెండవ ఉదాహరణలోని సమాధానాన్ని మెరుగైన పద్ధతులతో మెరుగుపరచడానికి ప్రయత్నించి ఉండవచ్చని మీరు విభాగం A2. 3లో చూశారు. కానీ మాకు గణిత ఉపకరణాలు లేనందున మేము ఆగిపోయాము. ఇది నిజజీవితంలో కూడా జరగవచ్చు. తరచుగా, గణిత ఉపకరణాలు అందుబాటులో లేనందున, మనం చాలా సుమారు సమాధానాలతో సంతృప్తి చెందాల్సి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, వాతావరణంలో ఉపయోగించే నమూనా సమీకరణాలు చాలా సంక్లిష్టమైనవి. ఖచ్చితమైన పరిష్కారాలను కనుగొనడానికి గణిత సాధనాలు అందుబాటులో లేవు.

You may wonder to what extent we should try to improve our model. Usually, to improve it, we need to take into account more factors. When we do this, we add more variables to our mathematical equations. We may then have a very complicated model that is difficult to use. A model must be simple enough to use. A good model balances two factors:

1. Accuracy, i.e., how close it is to reality.
2. Ease of use.

For example, Newton's laws of motion are very simple, but powerful enough to model many physical situations.

So, is mathematical modelling the answer to all our problems? Not quite! It has its limitations.

Thus, we should keep in mind that a model is *only a simplification* of a real-world problem, and the two are not the same. It is something like the difference between a map that gives the physical features of a country, and the country itself. We can find the height of a place above the sea level from this map, but we cannot find the characteristics of the people from it. So, we should use a model only for the purpose it is supposed to serve, remembering all the factors we have neglected while constructing it. We should apply the model only within the limits where it is applicable. In the later classes, we shall discuss this aspect a little more.

EXERCISE A2.3

1. How are the solving of word problems that you come across in textbooks different from the process of mathematical modelling?

2. Suppose you want to minimise the waiting time of vehicles at a traffic junction of four roads. Which of these factors are important and which are not?

(i) Price of petrol.

(ii) The rate at which the vehicles arrive in the four different roads.

(iii) The proportion of slow-moving vehicles like cycles and rickshaws and fast moving vehicles like cars and motorcycles.

A2.5 Summary

In this Appendix, you have studied the following points :

1. The steps involved in solving word problems.

2. Construction of some mathematical models.

మన మాదిరిని మెరుగుపర్చుకోవడానికి మనం ఎంత మేరకు ప్రయత్నించాలి అని మీరు ఆలోచించవచ్చు. సాధారణంగా, దానిని మెరుగుపరచడానికి, మనం మరిన్ని కారకాలను పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. దీనిని మనం చేసినప్పుడు, మన గణిత సమీకరణాలకు మనం మరిన్ని చరరాశులని జోడిస్తాం. అప్పుడు మనకు చాలా క్లిష్టమైన నమూనా ఉండవచ్చు, అది ఉపయోగించడం కష్టం. ఒక నమూనా ఉపయోగించడానికి తగినంత సరళంగా ఉండాలి. ఒక మంచి నమూనా రెండు కారకాలను సంతులనం చేస్తుంది::

1. ఖచ్చితత్వం, అంటే, అది వాస్తవికతకు ఎంత దగ్గరగా ఉంటుంది.
2. వాడుకలో సౌలభ్యం

ఉదాహరణకు, న్యూటన్ యొక్క చలన నియమాలు చాలా సరళమైనవి, కానీ అనేక భౌతిక పరిస్థితులను నమూనా చేసేంత శక్తివంతమైనవి.

కాబట్టి, గణిత నమూనా మన సమస్యలన్నింటికీ సమాధానమా? పూర్తిగా కాదు! దీనికి పరిమితులు ఉన్నాయి.

అందువల్ల, ఒక నమూనా అనేది వాస్తవ ప్రపంచ సమస్యను సరళీకృతం చేయడమేనని, ఈ రెండూ ఒకేలా ఉండవని మనం గుర్తుంచుకోవాలి. ఇది ఒక దేశం యొక్క భౌతిక లక్షణాలను ఇచ్చే పటం మరియు దేశం మధ్య వ్యత్యాసం వంటిది. ఈ పటం నుండి సముద్ర మట్టానికి ఎగువన ఉన్న ప్రదేశం యొక్క ఎత్తును మనం కనుగొనవచ్చు, కాని దాని నుండి ప్రజల లక్షణాలను మనం కనుగొనలేము. కాబట్టి, మనం ఒక నమూనాను అది పని చేయాల్సిన ప్రయోజనం కోసం మాత్రమే ఉపయోగించాలి, దానిని నిర్మించేటప్పుడు మనం నిర్లక్ష్యం చేసిన అన్ని కారకాలను గుర్తుంచుకోవాలి. నమూనా వర్తించే పరిమితుల్లోనే మనం దానిని అన్వయించాలి. తరువాతి తరగతులలో, మనం ఈ అంశాన్ని మరికొంత ఎక్కువగా చర్చిద్దాం..

అభ్యాసం A 2.3

1. పాఠ్యపుస్తకాల్లో మీరు చూసే పదసమస్యల పరిష్కారం, గణిత మోడలింగ్ ప్రక్రియకు భిన్నంగా ఎలా ఉంటుంది?
2. నాలుగు రోడ్ల రద్దీ కూడలి వద్ద వాహనాలు వేచియుండే సమయాన్ని మీరు కనిష్టం చేయాలని అనుకుంటున్నారనుకోండి. దిగువ పేర్కొన్న ఏ కారకాలు ముఖ్యమైనవి మరియు ఏవి కావు?
   (i) పెట్రోల్ ధర ..
   (ii) నాలుగు వేర్వేరు రోడ్లలో వాహనాలు వచ్చే పౌన:పున్యం
   (iii) సైకిళ్ళు మరియు రిక్షాలు వంటి నెమ్మదిగా కదిలే వాహనాలు మరియు కార్లు మరియు మోటారుసైకిళ్ల వంటి వేగంగా కదిలే వాహనాల నిష్పత్తి.

A2.5 సారాంశం

ఈ అనుబంధంలో, మీరు ఈ క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు:

1. పద సమస్యలను పరిష్కరించడంలో ఇమిడి ఉండే దశలు.

2. కొన్ని గణిత నమూనాల నిర్మాణం.

3. The steps involved in mathematical modelling given in the box below.

1. **Formulation :**
   - (i) Stating the question
   - (ii) Identifying the relevant factors
   - (iii) Mathematical description
2. **Finding the solution.**
3. **Interpretation of the solution in the context of the real-world problem.**
4. **Checking/validating to what extent the model is a good representation of the problem being studied.**

4. The aims, advantages and limitations of mathematical modelling.

3. దిగువ బాక్సులో ఇవ్వబడ్డ గణిత నమూనీకరణలో ఇమిడి ఉండే దశలు.

1. **సూత్రీకరణ :**
   - (i) ప్రశ్నను చెప్పడం
   - (ii) సంబంధిత కారకాలను గుర్తించడం
   - (iii) గణిత వివరణ
2. **పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం**
3. **వాస్తవ ప్రపంచ సమస్య సందర్భంలో పరిష్కారం యొక్క వ్యాఖ్యానం**
4. **అధ్యయనం చేయబడుతున్న సమస్యకు వమూనా ఎంత వరకు మంచి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుందో తనిఖీ చేయడం / ధృవీకరించడం.**

4. గణిత నమూనీకరణ యొక్క లక్ష్యాలు, ప్రయోజనాలు మరియు పరిమితులు.

ANSWERS/HINTS

EXERCISE 6.1

1. 30°, 250° **2.** 126° **4.** Sum of all the angles at a point = 360°

5. $\angle$ QOS = $\angle$ SOR + $\angle$ ROQ and $\angle$ POS = $\angle$ POR – $\angle$ SOR. **6.** 122°, 302°

EXERCISE 6.2

1. 126° **2.** 126°, 36°, 54° **3.** 60° **4.** 50°, 77°

5. Angle of incidence = Angle of reflection. At point B, draw BE $\perp$ PQ and at point C, draw CF $\perp$ RS.

EXERCISE 7.1

1. They are equal. **6.** $\angle$ BAC = $\angle$ DAE

EXERCISE 7.2

6. $\angle$ BCD = $\angle$ BCA + $\angle$ DCA = $\angle$ B + $\angle$ D **7.** each is of 45°

EXERCISE 7.3

3. **(ii)** From (i), $\angle$ ABM = $\angle$ PQN

EXERCISE 8.1

3. (i) From Δ DAC and Δ BCA, show $\angle$ DAC = $\angle$ BCA and $\angle$ ACD = $\angle$ CAB, etc.

(ii) Show $\angle$ BAC = $\angle$ BCA, using Theorem 8.4.

EXERCISE 8.2

2. Show PQRS is a parallelogram. Also show PQ || AC and PS || BD. So, $\angle$ P = 90°.

5. AECF is a parallelogram. So, AF || CE, etc.

జవాబులు / సూచనలు

అభ్యాసం 6.1

1. $30°, 250°$ **2.** $126°$ **4.** ఒక బిందువు వద్ద అన్ని కోణాల మొత్తం $= 360°$

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ మరియు $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. **6.** $122°, 302°$

అభ్యాసం 6.2

1. $126°$ **2.** $126°, 36°, 54°$ **3.** $60°$ **4.** $50°, 77°$

5. పతన కోణం విలువ = పరావర్తన కోణం విలువ. B బిందువు వద్ద $BE \perp PQ$ అగునట్లు BEను మరియు C $CF \perp RS$ అగునట్లు CF ను గీయండి.

అభ్యాసం 7.1

1. అవి సమానాలు **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

అభ్యాసం 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ **7.** ప్రతీకోణం విలువ $45°$

అభ్యాసం 7.3

3. **(ii)** నుండి (i), $\angle ABM = \angle PQN$

అభ్యాసం 8.1

3. (i) ΔDAC మరియు ΔBCA ల నుండి $\angle DAC = \angle BCA$ మరియు $\angle ACD = \angle CAB$ మొ॥ అని చూపాలి.

(ii)సిద్ధాంతం 8.4 ను ఉపయోగించి $\angle BAC = \angle BCA$ అని చూపండి.

అభ్యాసం 8.2

2. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపాలి. అంతేకాకుండా $PQ \parallel AC$ మరియు $PS \parallel BD$ అని చూపాలి. కావున, $\angle P = 90°$.

5. AECF అనేది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. కావున, $AF \parallel CE$ మొ॥

EXERCISE 9.1

1. Prove exactly as Theorem 9.1 by considering chords of congruent circles.
2. Use SAS axiom of congruence to show the congruence of the two triangles.

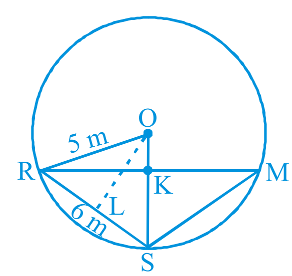
EXERCISE 9.2

1. 6 cm. First show that the line joining centres is perpendicular to the radius of the smaller circle and then that common chord is the diameter of the smaller circle.
2. If AB, CD are equal chords of a circle with centre O intersecting at E, draw perpendiculars OM on AB and ON on CD and join OE. Show that right triangles OME and ONE are congruent.
3. Proceed as in Example 2.
4. Draw perpendicular OM on AD.
5. Represent Reshma, Salma and Mandip by R, S and M respectively. Let KR = x m (see figure).

   Area of Δ ORS $= \frac{1}{2} x \times 5$. Also, area of Δ ORS $=$

   $\frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4$.

   Find x and hence RM.



6. Use the properties of an equilateral triangle and also Pythagoras Theorem.

EXERCISE 9.3

1. 45° 2. 150°, 30° 3. 10°
4. 80° 5. 110° 6. $\angle$BCD = 80° and $\angle$ECD = 50°
7. Draw perpendiculars AM and BN on CD (AB || CD and AB < CD). Show ΔAMD $\cong$ ΔBNC. This gives $\angle$C = $\angle$D and, therefore, $\angle$A + $\angle$C = 180°.

EXERCISE 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $900\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 2. ₹ 1650000 3. $20\sqrt{2}\,\text{m}^2$
4. $21\sqrt{11}\,\text{cm}^2$ 5. 9000 cm² 6. $9\sqrt{15}\,\text{cm}^2$

అభ్యాసం 9.1

1. సిద్ధాంతం 9.1 ప్రకారం సర్వసమాన వృత్తాల జ్యాలను పరిగణలోకి తీసుకుని నిరూపణ చేయాలి.

2. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అని చూపుటకు భు.కో.భు. సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించాలి.

అభ్యాసం 9.2

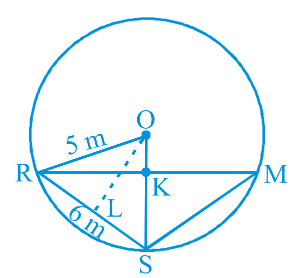
1. 6 సెం.మీ. మొదటగా వృత్త కేంద్రాలను కలుపు రేఖ చిన్నవృత్త వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటుందని చూపాలి మరియు ఉమ్మడి జ్యా చిన్న వృత్త వ్యాసం అని చూపాలి.

2. O కేంద్రంగా గల వృత్తం యొక్క రెండు సమాన జ్యా లు E వద్ద ఖండించుకొన్నట్లైతే AB కు లంబం OM మరియు CD కు లంబం ON ను గీయాలి మరియు OEను కలపండి. లంబకోణ త్రిభుజాలు OME మరియు ONEలు సర్వసమానమని చూపాలి.

3. ఉదాహరణకు 2ను అనుసరించండి.

4. AD మీద OM లంబాన్ని గీయండి.

5. రేష్మ, సల్మ మరియు మన్‌దీప్‌లను R, S మరియు M లతో సూచించండి. $KR = x$ m అనుకోండి. (పటాన్ని చూడండి). Δ ORS వైశాల్యం $= \frac{1}{2} x \times 5$. మరియు Δ ORS వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ $RS \times OL = \frac{1}{2} \times 6 \times 4$.



x మరియు RM విలువలను కనుగొనండి.

6. సమబాహు త్రిభుజ ధర్మాలు మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించండి.

అభ్యాసం 9.3

1. 45° **2.** 150°, 30° **3.** 10°

4. 80° **5.** 110° **6.** $\angle BCD = 80°$ మరియు $\angle ECD = 50°$

7. CDమీద AM మరియు BN లంబాలను గీయండి. ($AB \parallel CD$ మరియు $AB < CD$).
$\Delta AMD \cong \Delta BNC$ అని చూపాలి. దీనినుండి $\angle C = \angle D$ మరియు $\angle A + \angle C = 180°$.

అభ్యాసం 10.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2, 900\sqrt{3}$ సెం.మీ.^{2} **2.** ₹ 1650000 **3.** $20\sqrt{2}$ మీ.^{2}

4. $21\sqrt{11}$ సెం.మీ.^{2} **5.** 9000 సెం.మీ.^{2} **6.** $9\sqrt{15}$ సెం.మీ.^{2}

EXERCISE 11.1

1. 165 cm^2 **2.** 1244.57 m^2 **3.** (i) 7 cm (ii) 462 cm^2

4. (i) 26 m (ii) ₹ 137280 **5.** 63 m **6.** ₹ 1155

7. 5500 cm^2 **8.** ₹ 384.34 (approx.)

EXERCISE 11.2

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2

2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5 m^2

3. 942 cm^2 **4.** 1 : 4 **5.** ₹ 27.72

6. 3.5 cm **7.** 1 : 16 **8.** 173.25 cm^2

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

EXERCISE 11.3

1. (i) 264 cm^3(ii) 154 cm^3 **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35} l$

3. 10 cm **4.** 8 cm **5.** 38.5 kl

6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2 **7.** 100π cm^3 **8.** 240π cm^3; 5 : 12

9. 86.625x m^3, 99.825 m^2

EXERCISE 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ cm^3 (ii) 1.05 m^3 (approx.)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ cm^3 (ii) 0.004851 m^3 **3.** 345.39 g (approx.)

4. $\frac{1}{64}$ **5.** 0.303l (approx.) **6.** 0.06348 m^3 (approx.)

7. $179\frac{2}{3}$ cm^3 **8.** (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3 (approx.) **9.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 mm^3 (approx.)

అభ్యాసం 11.1

1. 165 సెం.మీ.^{2} **2.** 1244.57 మీ.^{2} **3.** (i) 7 సెం.మీ. (ii) 462 సెం.మీ.^{2}

4. (i) 26 మీ. (ii) ₹ 137280 **5.** 63 మీ. **6.** ₹ 1155

7. 5500 సెం.మీ.^{2} **8.** ₹ 384.34 (సుమారుగా)

అభ్యాసం 11.2

1. (i) 1386 సెం.మీ.^{2} (ii) 394.24 సెం.మీ.^{2} (iii) 2464 సెం.మీ.^{2}

2. (i) 616 సెం.మీ.^{2} (ii) 1386 సెం.మీ.^{2} (iii) 38.5 మీ.^{2}

3. 942 సెం.మీ.^{2} **4.** 1 : 4 **5.** ₹ 27.72

6. 3.5 సెం.మీ. **7.** 1 : 16 **8.** 173.25 సెం.మీ.^{2}

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

అభ్యాసం 11.3

1. (i) 264 సెం.మీ.^{3} (ii) 154 సెం.మీ.^{3} **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}$ లీ.

3. 10 సెం.మీ. **4.** 8 సెం.మీ. **5.** 38.5 కి.లీ.

6. (i) 48 సెం.మీ. (ii) 50 సెం.మీ. (iii) 2200 సెం.మీ.^{2} **7.** 100π సెం.మీ.^{3} **8.** 240π సెం.మీ.^{3}; 5 : 12

9. 86.625x మీ.^{3}, 99.825 మీ.^{2}

అభ్యాసం 11.4

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ సెం.మీ.^{3} (ii) 1.05 మీ.^{3} (సుమారుగా)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ సెం.మీ.^{3} (ii) 0.004851 మీ.^{3} **3.** 345.39 గ్రా. (సుమారుగా)

4. $\frac{1}{64}$ **5.** 0.303 లీ.(సుమారుగా) **6.** 0.06348 మీ.^{3} (సుమారుగా)

7. $179\frac{2}{3}$ సెం.మీ.^{3} **8.** (i) 249.48 మీ.^{2} (ii) 523.9 మీ.^{3} (సుమారుగా) **9.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 మి.మీ.^{3} (సుమారుగా)

EXERCISE 12.1

1. (ii)Reproductive health conditions.

3. (ii)Party A **4.** (ii) Frequency polygon (iii) No **5.** (ii) 184

8.

Age (in years)	Frequency	Width	Length of the rectangle
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

Now, you can draw the histogram, using these lengths.

9. (i)

Number of letters	Frequency	Width of interval	Length of rectangle
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

Now, draw the histogram.

(ii) 6 - 8

అభ్యాసం 12.1

1. (ii) పునరుత్పత్తికి సంబంధించిన ఆరోగ్య సమస్యలు.

3. (ii) పార్టీ A **4.** (ii) పౌన:పున్య బహుభుజి (iii) కాదు **5.** (ii) 184

8.

వయస్సు (సం॥లో)	తరచుదనం	వెడల్పు	దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

ఇపుడు ఈ పొడవులనుపయోగించి మీరు సోపానరేఖా చిత్రం హిస్టోగ్రామ్ గీయవలెను.

9. (i)

అక్షరాల సంఖ్య	తరచుదనం	వెడల్పు	దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

ఇపుడు హిస్టోగ్రామ్ గీయాలి.

(ii) 6 - 8

EXERCISE A1.1

1. (i) False. There are 12 months in a year.

(ii) Ambiguous. In a given year, Diwali may or may not fall on a Friday.

(iii) Ambiguous. At some time in the year, the temperature in Magadi, may be 26° C.

(iv) Always true.

(v) False. Dogs cannot fly.

(vi) Ambiguous. In a leap year, February has 29 days.

2. (i) False. The sum of the interior angles of a quadrilateral is 360°.

(ii) True (iii) True (iv) True

(v) False, for example, $7 + 5 = 12$, which is not an odd number.

3. (i) All prime numbers greater than 2 are odd.

(ii) Two times a natural number is always even. (iii) For any $x > 1$, $3x + 1 > 4$.

(iv) For any $x \geq 0$, $x^3 \geq 0$.

(v) In an equilateral triangle, a median is also an angle bisector.

EXERCISE A1.2

1. (i) Humans are vertebrates. (ii) No. Dinesh could have got his hair cut by anybody else. (iii) Gulag has a red tongue. (iv) We conclude that the gutters will have to be cleaned tomorrow. (v) All animals having tails need not be dogs. For example, animals such as buffaloes, monkeys, cats, etc. have tails but are not dogs.

2. You need to turn over B and 8. If B has an even number on the other side, then the rule has been broken. Similarly, if 8 has a consonant on the other side, then the rule has been broken.

EXERCISE A1.3

1. Three possible conjectures are:

(i) The product of any three consecutive even numbers is even. (ii) The product of any three consecutive even numbers is divisible by 4. (iii) The product of any three consecutive even numbers is divisible by 6.

2. Line 4: 1 3 3 1 $=11^3$; Line 5: 1 4 6 4 1$=11^4$; the conjecture holds for Line 4 and Line 5; No, because $11^5 \neq 15101051$.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. Student's own answer. For example, Euclid's postulates.

అభ్యాసం A1.1

1. (i) అసత్యం. ఒక సంవత్సరానికి 12 నెలలు.

(ii) సందిగ్ధత: ఒక సం॥లో దీపావళి శుక్రవారం రావచ్చు, రాకపోవచ్చు.

(iii) సందిగ్ధత : సం॥లో ఒకరోజు మగధి ఉష్ణోగ్రత $26°$ C ఉండవచ్చు.

(iv) ఎల్లప్పుడూ సత్యం.

(v) అసత్యం. కుక్కలు ఎగుర లేవు.

(vi) సందిగ్ధత : లీఫ్ సం॥లో ఫిబ్రవరి నెలకు 29 రోజులుండును.

2. (i) అసత్యం. చతుర్భుజంలో అంతరకోణాల మొత్తం $360°$.

(ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) సత్యం

(v) అసత్యం. ఉదాహరణకు $7 + 5 = 12$ బేసి సంఖ్య కాదు.

3. (i) 2 కంటె పెద్దదైన ప్రధాన సంఖ్యలన్నీ బేసి సంఖ్యలు.

(ii) ఒక సహజసంఖ్యకు రెట్టింపు ఎల్లపుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది.

(iii) $x > 1$ అయ్యేట్లు x యొక్క ఏ విలువకైనా $3x + 1 > 4$ అవుతుంది.

(iv) $x \geq 0$ అయ్యేట్లు x యొక్క ఏ విలువకైనా $x^3 \geq 0$ అవుతుంది.

(v) సమబాహు త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖయే కోణ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.

అభ్యాసం A1.2

1. (i) మానవులు సకశేరుకాలు (వెన్నుముక గల జీవులు) (ii) కాదు. దినేష్ జుట్టును మరెవరైనా కత్తిరించి ఉండకపోవచ్చు. (iii) గులాగ్ ఎర్రటి నాలుకను కలిగి ఉంది. (iv) కాలువలు రేపు శుభ్రం చేయాలని మేము నిర్ధారించాం. (v) తోకలున్న అన్ని జంతువులు కుక్కలు కానవసరం లేదు. ఉదాహరణకు గేదెలు, కోతులు, పిల్లులు మొదలగునవి తోకలు కలిగి ఉండును.

2. నీవు B మరియు 8ని మార్చాల్సి ఉంది. ఒకవేళ Bకు మరొకవైపు సరి సంఖ్య ఉంటే అపుడు నియమం పాటించబడదు. అదేవిధంగా ఒకవేళ Bకు వేరొకవైపు స్థిరరాశి ఉంటే అపుడు నియమం పాటించబడదు.

అభ్యాసం A1.3

1. మూడు సాధ్యమయ్యే పరికల్పనలు.

(i) ఏవైనా 3 వరుస సరిసంఖ్యల లబ్ధం సరి సంఖ్య. (ii) ఏవైనా 3 వరుస సరి సంఖ్యల లబ్ధం 4చే భాగించబడుతుంది. (iii) ఏవైనా 3 వరుస సరి సంఖ్యల లబ్ధం 6చే భాగించబడుతుంది.

2. 4వ వరుస : $1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$; 5వ వరుస : $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$; 4వ వరుస మరియు 5వ వరుసలకు పరికల్పన వర్తిస్తుంది. $11^5 \neq 15101051$ కావును వర్తించదు.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. విద్యార్థుల స్వంత సమాధానం. ఉదాహరణకు యూక్లిడ్ స్వీకృతాలు.

EXERCISE A1.4

1. (i) You can give any two triangles with the same angles but of different sides.

   (ii) A rhombus has equal sides but may not be a square.

   (iii) A rectangle has equal angles but may not be a square.

   (iv) For $a = 3$ and $b = 4$, the statement is not true.

   (v) For $n = 11$, $2n^2 + 11 = 253$ which is not a prime.

   (vi) For $n = 41$, $n^2 - n + 41$ is not a prime.

2. Student's own answer.

3. Let x and y be two odd numbers. Then $x = 2m + 1$ for some natural number m and $y = 2n + 1$ for some natural number n.

   $x + y = 2(m + n + 1)$. Therefore, $x + y$ is divisible by 2 and is even.

4. See Q.3. $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.

   Therefore, $x\,y$ is not divisible by 2, and so it is odd.

5. Let $2n$, $2n + 2$ and $2n + 4$ be three consecutive even numbers. Then their sum is $6(n + 1)$, which is divisible by 6.

7. (i) Let your original number be n. Then we are doing the following operations:

   $$n \to 2n \to 2n + 9 \to 2n + 9 + n = 3n + 9 \to \frac{3n \quad 9}{3} = n + 3 \to n + 3 + 4 = n + 7 \to n + 7 - n = 7.$$

   (ii) Note that $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Take any three digit number say, *abc*. Then $abc \times 1001 = abcabc$. Therefore, the six digit number *abcabc* is divisible by 7, 11 and 13.

EXERCISE A2.1

1. **Step 1: Formulation :**

   The relevant factors are the time period for hiring a computer, and the two costs given to us. We assume that there is no significant change in the cost of purchasing or hiring the computer. So, we treat any such change as irrelevant. We also treat all brands and generations of computers as the same, i.e. these differences are also irrelevant.

   The expense of hiring the computer for x months is ₹ $2000x$. If this becomes more than the cost of purchasing a computer, we will be better off buying a computer. So, the equation is

   $$2000\,x = 25000 \qquad (1)$$

అభ్యాసం A1.4

1. (i) సమాన కోణాలు కలిగి వేర్వేరు భుజాలు కలిగిన ఏవైనా 2 త్రిభుజాలను నీవు ఇవ్వవచ్చు.

(ii) రాంబస్ అనునది సమాన భుజాలను కలిగి ఉండును కాని చతురస్రం కాకపోవచ్చు.

(iii) దీ॥చ॥ సమాన కోణాలను కలిగి ఉండును. కాని చతురస్రం కాకపోవచ్చు.

(iv) $a = 3$ మరియు $b = 4$ లకు ప్రవచనం సత్యం కాదు.

(v) $n = 11$ అయిన $2n^2 + 11 = 253$ ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

(vi) $n = 41$ అయిన $n^2 - n + 41$ ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

2. విద్యార్థుల స్వయం(స్వంత) సమాధానం.

3. x మరియు y అనునవి రెండు బేసి సంఖ్యలు అనుకోండి. అపుడు $x = 2m + 1$. m ఒక సహజ సంఖ్య మరియు $y = 2n + 1$ n ఒక సహజ సంఖ్య.

$x + y = 2(m + n + 1)$. $x + y$ 2 తో భాగించబడును మరియు సరి సంఖ్య

4. Q.3 ను చూడండి. $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.

$x\,y$ అనునది '2' తో భాగించబడదు. కావున ఇది బేసి సంఖ్య.

5. $2n$, $2n + 2$ మరియు $2n + 4$ అనునవి మూడు వరుస సరిసంఖ్యలు. అపుడు వాని మొత్తం $6(n + 1)$ అనునది '6' తో భాగింపబడును.

7. (i) మీ యొక్క అసలు సంఖ్య n అనుకోండి. అపుడు మనం క్రింది విధంగా చేస్తాం.

$$n \to 2n \to 2n + 9 \to 2n + 9 + n = 3n + 9 \to \frac{3n \quad 9}{3} = n + 3 \to n + 3 + 4 = n + 7 \to n + 7 - n = 7.$$

(ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ అని గమనించండి. ఏదైనా 3 అంకెల సంఖ్య abc అనుకోండి. అపుడు $abc \times 1001 = abcabc$ కావున '6' అంకెలసంఖ్య $abcabc$ అనేది 7, 11 మరియు 13 లతో భాగించబడును.

అభ్యాసం A2.1

1. సూత్రీకరణ : 1వ దశ:

కంప్యూటర్‌ను అద్దెకు తీసుకొను కాలవ్యవధికి సంబంధించి కారకాలు మరియు రెండు ఖర్చులు మాకు ఇవ్వబడ్డాయి. కంప్యూటర్‌ను ఖరీదు చేయడానికి అయ్యే ఖర్చు మరియు అద్దెకు తీసుకొనుటకు అయ్యే ఖర్చులలో పెద్దగా మార్పులేదని మేము అనుకొంటున్నాం. కావున అటువంటి ఏ మార్పునైనా అసంబంధమైనదిగా పరిగణిస్తాం. అంతేకాకుండా అన్ని బ్రాండ్లు మరియు అన్ని తరాల కంప్యూటర్లను ఒకేరకమైనవిగా పరిగణిస్తాం. అనగా ఈ మార్పులు కూడా అసంబంధమైనవి.

కంప్యూటర్‌ను x నెలలు అద్దెకు తీసుకొనుటకు అగు ఖర్చు ₹ $2000x$. ఒకవేళ కంప్యూటర్‌ను ఖరీదు చేయుటకు అయ్యే ఖర్చు కంటే ఎక్కువైతే అపుడు కంప్యూటర్‌ను ఖరీదు చేయుట మంచిదని భావిస్తాం. కావున సమీకరణం

$$2000\,x = 25000 \qquad (1)$$

Step 2 : Solution : Solving (1), $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

Step 3 : Interpretation : Since the cost of hiring a computer becomes more **after** 12.5 months, it is cheaper to buy a computer, if you have to use it for more than 12 months.

2. **Step1 : Formulation :** We will assume that cars travel at a constant speed. So, any change of speed will be treated as irrelevant. If the cars meet after x hours, the first car would have travelled a distance of $40x$ km from A and the second car would have travelled $30x$ km, so that it will be at a distance of $(100 - 30x)$ km from A. So the equation will be $40x = 100 - 30x$, i.e., $70x = 100$.

Step 2 : Solution : Solving the equation, we get $x = \frac{100}{70}$.

Step 3 : Interpretation : $\frac{100}{70}$ is approximately 1.4 hours. So, the cars will meet after 1.4 hours.

3. **Step1 : Formulation :** The speed at which the moon orbits the earth is

$$\frac{\text{Length of the orbit}}{\text{Time taken}}.$$

Step 2 : Solution : Since the orbit is nearly circular, the length is $2 \times \pi \times 384000$ km $= 2411520$ km

The moon takes 24 hours to complete one orbit.

So, speed $= \frac{2411520}{24} = 100480$ km/hour.

Step 3 : Interpretation : The speed is 100480 km/h.

4. **Formulation :** An assumption is that the difference in the bill is only because of using the water heater.

Let the average number of hours for which the water heater is used $= x$

Difference per month due to using water heater = ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240

Cost of using water heater for one hour = ₹ 8

So, the cost of using the water heater for 30 days $= 8 \times 30 \times x$

Also, the cost of using the water heater for 30 days = Difference in bill due to using water heater

So, $240x = 240$

Solution : From this equation, we get $x = 1$.

Interpretation : Since $x = 1$, the water heater is used for an average of 1 hour in a day.

2వ దశ : సాధన : (1) ను సాధించగా $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

3వ దశ : వివరణ: 12.5 నెలల తర్వాత కంప్యూటర్‌ను అద్దెకు తీసుకొనుటకు అయ్యే ఖర్చు ఎక్కువ అవుతుంది. కావున కంప్యూటర్‌ను 12 నెలలు కంటే ఎక్కువ వినియోగించాల్సి వస్తే దానిని ఖరీదు చేయడానికి అయ్యే ఖర్చే చౌకగా ఉంటుంది.

2. **సూత్రీకరణ : 1వ దశ :** కార్లు స్థిరవేగంతో ప్రయాణిస్తున్నాయని అనుకుందాం. కావున వేగంలో ఏ మార్పునైనా అసంబంధమైనదిగా భావిస్తాం. ఒకవేళ x గంటల తర్వాత ఆ కార్లు ఒకచోట కలిస్తే అపుడు మొదటి కారు A నుండి $40x$ కి.మీ. దూరం ప్రయాణిస్తుంది మరియు 2వ కారు $30x$ దూరం ప్రయాణిస్తుంది. అపుడు A నుండి $(100 - 30x)$ కి.మీ. అవుతుంది.

2వ దశ : సాధన : సమీకరణాన్ని సాధించగా $x = \frac{100}{70}$ పొందుతాం.

3వ దశ : వివరణ : $\frac{100}{70} = 1.4$ గం॥ (సుమారుగా) కావున 2 కార్లు 1.4గంటల తర్వాత కలుస్తాయి.

3. **సూత్రీకరణ : 1వ దశ:** చంద్రుడు భూమి చుట్టూ తిరిగే వేగం = $\frac{\text{కక్ష్య పొడవు}}{\text{పట్టిన సమయం}}$

2వ దశ : సాధన : కక్ష్య దాదాపుగా వృత్తాకారంలో ఉన్నందున పొడవు $2 \times \pi \times 384000$ కి.మీ. $= 2411520$ కి.మీ.

చంద్రుడు ఒక పరిభ్రమణం చేయుటకు పట్టేకాలం 24గం॥

కావున వేగం $= \frac{2411520}{24} = 100480$ కి.మీ/గం॥

2వ దశ : వివరణ : పరిభ్రమణ వేగం 100480 కి.మీ./గం॥

4. **సూత్రీకరణ :** వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగించడం వలన మాత్రమే బిల్లులో తేడా వచ్చిందని అనుకుందాం. వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగించిన సరాసరి గంటల సంఖ్య $= x$ అనుకోండి.

వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగం వలన ఒక నెలకు తేడా $=$ ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240

1గం॥ వాటర్ హీటర్ వినియోగించుటకు అయ్యే ఖర్చు = ₹ 8

కావున, వాటర్ హీటర్‌ను 30 రోజులకు వినియోగించుటకు అయ్యే ఖర్చు $= 8 \times 30 \times x$

వాటర్ హీటర్‌ను 30 రోజులు వినియోగించుటకు అగు ఖర్చు = వాటర్ హీటర్‌ను వినియోగించటం వలన కరెంట్ బిల్లులో వచ్చిన తేడా

కావున, $240x = 240$

సాధన : ఈ సమీకరణం నుండి $x = 1$ అవుతుంది.

వివరణ : $x = 1$ నుండి వాటర్ హీటర్ ఒక రోజుకు సరాసరి 1గం॥ వినియోగింపబడుతుంది.

EXERCISE A2.2

1. We will not discuss any particular solution here. You can use the same method as we used in last example, or any other method you think is suitable.

EXERCISE A2.3

1. We have already mentioned that the formulation part could be very detailed in real-life situations. Also, we do not validate the answer in word problems. Apart from this word problem have a 'correct answer'. This need not be the case in real-life situations.
2. The important factors are (ii) and (iii). Here (i) is not an important factor although it can have an effect on the number of vehicles sold.

అభ్యాసం A2.2

1. ఒక ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని ఇక్కడ చర్చించాం. చివరి ఉదాహరణలో సూచించని విధానాన్ని గాని దీనికి సరిపోయే వేరే విధానాన్ని గాని మీరు ఉపయోగించవచ్చు.

అభ్యాసం A2.3

1. సూత్రీకరణ భాగం అనునది నిజ జీవిత పరిస్థితులకు వివరంగా ఉందని మనం ఇదివరకే పేర్కొన్నాం. పద సమస్యల సమాధానాన్ని కూడా ధృవీకరించలేం. ఇదికాకుండా పదసమస్యకు సరైన సమాధానం కలదు. నిజ జీవిత పరిస్థితుల్లో ఈవిధంగా ఉండాల్సిన అవసరం లేదు.

2. ముఖ్యమైన కారకాలు (ii) మరియు (iii) ఇక్కడ (i) అనేది ముఖ్యమైన కారకం కాదు. అయినప్పటికీ అమ్మబడిన వాహనాల సంఖ్య పై ఇది ప్రభావం చూపుతుంది.

Class IX

Suggested Pedagogical Processes	Learning Outcomes
The learners may be provided with opportunities individually or in groups and encouraged to—	**The learner—**
• work with real numbers and consolidate the concepts of numbers learnt in earlier classes. Some such opportunities could be: ▪ to observe and discuss real numbers.	• **applies** logical reasoning in classifying real numbers, proving their properties and using them in different situations.
▪ to recall and observe the processes involved in different mathematical concepts studied earlier and find situations in which they come across irrational numbers. For example, finding the length of the diagonal of a square with side, say, 2 units or area of a circle with a given radius, etc.	• **identifies/classifies** polynomials among algebraic expressions and factorises them by applying appropriate algebraic identities.
▪ to observe the properties of different types of numbers, such as, the denseness of the numbers, by devising different methods based on the knowledge of numbers gained in earlier classes. One of them could be by representing them on the number line.	• **relates** the algebraic and graphical representations of a linear equation in one or two variables and applies the concept to daily life situations.
▪ to facilitate in making mental estimations in different situations, such as, arranging numbers like 2, $2^{1/2}$, $2^{3/2}$, $2^{5/2}$, etc., in ascending (or descending) order in a given time frame or telling between which two integers the numbers like, $\sqrt{17}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{59}$, $-\sqrt{2}$, etc., lie.	• **identifies** similarities and differences among different geometrical shapes. • **derives** proofs of mathematical statements particularly related to geometrical concepts, like parallel lines, triangles, quadrilaterals, circles, etc., by applying axiomatic approach and solves problems using them.
• apply relevant results to factorise the polynomials. • draw and compare the graphs of linear equations in one or two variables.	
• discuss the proofs of mathematical statements using axioms and postulates. • play the following games related to geometry. ▪ For Euclid's axioms, if one group says, If equals are added to equals,	• **finds** areas of all types of triangles by using appropriate formulae and apply them in real life situations. • **constructs** different geometrical shapes like bisectors of line segments, angles and triangles under given

then the results are equal. The other group may be encouraged to provide example such as, If $a = b$, then $a + 3 = b + 3$, another group may extend it further as $a + 3 + 5 = b + 3 + 5$, and so on. ▪ By observing different objects in the surroundings one group may find the similarities and the other group may find the differences with reference to different geometrical shapes— lines, rays, angles, parallel lines, perpendicular lines, congruent shapes, non-congruent shapes, etc., and justify their findings logically.	conditions and provides reasons for the processes of such constructions. • **develops** strategies to locate points in a Cartesian plane. • **identifies and classifies** the daily life situations in which mean, median and mode can be used.
• work with algebraic identities using models and explore the use of algebraic identities in familiar contexts. • discuss in groups about the properties of triangles and construction of geometrical shapes such as, triangles, line segment and its bisector, angle and its bisector under different conditions	• **analyses** data by representing it in different forms like, tabular form (grouped or ungrouped), bar graph, histogram (with equal and varying width and length), and frequency polygon.
• find and discuss ways to fix position of a point in a plane and different properties related to it. • engage in a survey and discuss about different ways to represent data pictorially such as, bar graphs, histograms (with varying base lengths) and frequency polygons.	• **calculates** empirical probability through experiments and describes its use in words.
• collect data from their surroundings and calculate central tendencies such as, mean, mode or median. • explore the features of solid objects from daily life situations to identify them as cubes, cuboids, cylinders, etc. • play games involving throwing a dice, tossing a coin, etc., and find their chance of happening. • do a project of collecting situations corresponding to different numbers representing probabilities. • visualise the concepts using Geogebra and other ICT tools.	• **derives** formulae for surface areas and volumes of different solid objects like, cubes, cuboids, right circular cylinders/ cones, spheres and hemispheres and applies them to objects found in the surroundings. • **solves** problems that are not in the familiar context of the child using above learning. These problems should include the situations to which the child is not exposed earlier.

NOTES

NOTES

FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence.

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

- **Constitution of India,**
Part IV A (Article 51 A)

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children.
- Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expel from school till the completion of elementary education.
- No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time.
- Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.